DIIT
Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas

Universidad Nacional de La Matanza

PRINCIPIOS DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA

MODELADO DE SISTEMAS

Cristóbal R. Santa María
Agustín Bosio

Principios de Investigación Operativa

Modelado de Sistemas

Cristóbal R. Santa María

Agustín Bosio

Universidad Nacional de La Matanza

Santa María, Cristóbal R.
Principios de investigación operativa : modelado de sistemas / Cristóbal R. Santa María ; Agustín Bosio. - 1a ed. - San Justo : Universidad Nacional de La Matanza, 2023.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-8931-82-1

1. Ingeniería. I. Bosio, Agustín. II. Título.
CDD 620.007

Florencio Varela 1903 (B1754JEC)
San Justo / Buenos Aires / Argentina
Telefax: (54-11) 4480-8900
editorial@unlam.edu.ar
www.unlam.edu.ar

ISBN 978-987-8931-82-1

Diseño: Editorial UNLaM

Hecho el depósito que marca la ley 11.723

ÍNDICE

Prefacio

Este libro trata sobre algunos conceptos importantes para el ejercicio profesional de la ingeniería. Su objetivo es promover una forma de pensar los problemas que potencie, aunque suene redundante, el ingenio del ingeniero. Históricamente la matemática ha sido una manera de exponer los hechos de la vida real que persigue dos metas: abstraer y concentrarse en lo relevante, a la vez que intentar liberar al razonamiento de inconsistencias y errores. Como, en alguna medida, logra ambas cosas es que vuelan los aviones o que nos comunicamos por internet. En Occidente fue Pitágoras el primero en considerar la idea de modelo matemático para representar los asuntos del mundo. Para él, matemática, lo que se aprende en griego, era un campo integrado por la aritmética, la geometría, la astronomía y la música. Más cerca en el tiempo, durante los comienzos de la Modernidad, Descartes sostuvo que ”*…las matemáticas tienen invenciones muy sutiles, y que pueden servir de mucho, tanto para satisfacer a los curiosos como para facilitar todas las artes y disminuir el trabajo de los hombres…”*[1]

El material que se presenta aquí es el que habitualmente forma parte de cursos que, dependiendo del contexto, se denominan Investigación Operativa, Modelos y Simulación, Juegos de Empresa, Teoría de la Decisión, etc. En cualquier caso, no se trata de un árido tratado que aspira a compendiar todos los conocimientos sobre estas materias, ni a presentar un conjunto de reglas nemotécnicas para aplicar en cada caso, ni por último tampoco a suministrar un manual de uso de software para cada ocasión. Más bien se procura, a través de los distintos capítulos, mostrar la técnica ingenieril por la cual se concibe y estructura un modelo matemático desde la descripción de un sistema en el lenguaje natural. Precisamente es ese modelo el que aportará simpleza, relevancia y exactitud al análisis y permitirá el cálculo automatizado con un software adecuado. Es decir “ingeniar” el modelo, eso es lo que estas páginas intentan enseñar. Para ello hay que desarrollar hábitos de trasladar entidades a variables y actividades a fórmulas. Por supuesto cualquier desafío cabe desde estas palabras, pero aquí se presenta una colección de modelos que, más que ser exhaustiva, intenta mostrar los principios del arte. Se puede modelar la cola frente a un cajero automático y se puede modelar el viaje de una nave espacial. Sin embargo, las diferencias de complejidad se abordan desde principios similares siendo posiblemente las herramientas matemáticas necesarias las que atienden al nivel de dificultad. Toda la batería matemática aprendida en los cursos básicos de una carrera técnica, está entonces a disposición para describir y optimizar comportamientos y decisiones. Pero es aquí justamente donde importará más mostrar una relación, la vinculación entre fórmula y realidad, que demostrar en el sentido de la lógica matemática. Entender los sistemas tecnológicos significa modelarlos en términos matemáticos y ése es, básicamente, el lenguaje de la ingeniería.

Los contenidos se han seleccionado sobre la base de la experiencia en el dictado de materias del área en distintas universidades a lo largo de 30 años y en el ejercicio profesional de modelado de sistemas de muy diversa índole. En las explicaciones se ha intentado utilizar la palabra con claridad y precisión, construir las oraciones a nuestro modo cultural, y privilegiar el discurso frente a la imagen. Esto se juzga necesario pues la imagen, como forma explicativa, suele carecer del poder de abstracción de ideas necesario. Es fácil ver un gato y dibujar su imagen para comunicar lo que se vio. Pero no es tan fácil representar con una imagen nítida las palabras conocimiento o burocracia, justamente porque detrás de ellas hay un nivel de abstracción para el que una imagen simple no basta. Por eso la ingeniería también se trata de discurso y lenguaje.

[1] Descartes, R. El Discurso del Método. Losada. 1974

Programación Lineal, Teoría de Colas, Teoría de Inventarios, Algoritmos en Redes, Teoría de Juegos, Teoría de la Decisión y Simulación son los temas que se abordan con la perspectiva apuntada, pues resultan en modelos de aplicación sobre muy variados campos tecnológicos y administrativos. Cada capítulo contiene una exposición teórica que fundamenta la modelización, ejemplos y problemas resueltos que ejercitan el hábito de plantear y estudiar los sistemas a través de modelos, y finalmente ejercicios a resolver que no intentan constituir una práctica mecánica sino fomentar una actitud creativa, de ingenio frente a un problema. Un apéndice orienta sobre el software disponible para el cálculo una vez que el modelo ha sido planteado. Allí se encontrará comentado un listado de paquetes libres y versiones estudiantiles de software bajo licencia que puede utilizarse.

El enfoque adoptado resulta adecuado para el creciente y cada vez más extendido desarrollo de estas técnicas, pues fomenta la capacidad de modelización autónoma y la inventiva tan necesaria para el desarrollo tecnológico propio. No se trata sólo de aprender a usar herramientas sino también de inventarlas y desarrollarlas. Sobre generar esta destreza se pone aquí el acento a fin de apuntalar la independencia y robustez del desarrollo tecnológico social.

Agradecemos a la Ingeniera Mariana Bazán por su colaboración y comentarios. Lo propio hacemos hacia el Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas de la Universidad Nacional de La Matanza en donde llevamos a cabo nuestra actividad diaria.

San Justo. Agosto de 2022

Mg. Cristóbal R: Santa María
Ing. Agustín Bosio

I- Introducción a la Investigación de Operaciones

I.1 Aspectos Históricos

En el siglo III A.C. durante la II Guerra Púnica, Arquímedes gran matemático de la antigüedad griega, propuso usar algunos de sus inventos para defender la ciudad de Siracusa sitiada entonces por los romanos. Entre estos inventos, que fueron efectivamente usados, se encontraba la catapulta, que permitía arrojar a distancia piedras voluminosas e incandescentes, al utilizar el principio de la palanca. También había un sistema de espejos que concentraba y reflejaba la luz solar de tal manera que, al dirigir el rayo reflejado hacia embarcaciones enemigas, estas se incendiaban.

En 1503 Leonardo da Vinci participó como ingeniero en la guerra contra la ciudad de Pisa y aportó allí sus conocimientos sobre construcción de barcos, cañones, vehículos acorazados y otra maquinaria de uso militar.

Estos dos casos de colaboración entre conocimientos científicos y arte militar son útiles para ilustrar porqué, durante el desarrollo de la Segunda Guerra Mundial del siglo XX, el gobierno británico convocó a un nutrido y variado grupo de eminentes científicos a fin de *investigar* el carácter de las *operaciones* militares y elaborar, en consecuencia, métodos para optimizar costos, beneficios, equipamiento, hombres, etc. Lo propio hizo en 1942 al entrar en guerra EEUU, al fundar entonces el grupo SCOOP (Scientific Computations of Optimum Programs).

El primer asunto al que se abocó el grupo inglés fue la mejora de su sistema de defensa antiaérea, al estudiar la relocalización de sus radares de detección de naves enemigas de modo tal que cubriese la mayor cantidad de territorio y con el mayor tiempo de antelación al ataque posible. En términos matemáticos el estudio constituyó la resolución exitosa de un problema de optimización del uso de recursos y fue seguido por otros muchos problemas afines.

Finalizada la guerra con el triunfo aliado, George Dantzig (1914-2005), miembro del grupo SCOOP, desarrolló un algoritmo que podía ser usado en una amplia clase de problemas similares llamados de Programación Lineal**.** Tal algoritmo se denominó SIMPLEX y vio la luz en 1947.

Sin embargo los antecedentes matemáticos de dichos trabajos provenían de un tiempo anterior. En efecto, ya en 1928 el matemático húngaro J.Von Newmann comenzaba a desarrollar la luego llamada Teoría de Juegos, en la cual utilizaba conceptos de la teoría de matrices que más tarde estructuraron la programación lineal. Por los finales de los años treinta G.J. Stigler resolvió por métodos heurísticos el llamado "problema de la dieta" que consistía en optimizar la ración de comida diaria que recibía cada soldado británico a costo que resultara mínimo. En 1941 y 1942 el problema del transporte fue estudiado por primera vez por el matemático ruso L. Kantorovich (1912-1986) y el holandés T. J. Koopmans (1910-1985), quien acuñó el término programación lineal, usando métodos vinculados a las figuras geométricas convexas. Los resultados obtenidos los condujeron a recibir el premio Nobel de Economía en 1975. Todos estos estudios fueron utilizados por Dantzig para la construcción del SIMPLEX.

Pero la colaboración científico militar producida durante la guerra continuó en forma creciente a efecto de lo que se denominó entonces abreviadamente Investigación de Operaciones que incluía, claro está, a los métodos de la programación lineal entre otras teorías. A su vez, quienes habían participado en los grupos de investigación durante la guerra fueron llevando paulatinamente los distintos resultados a la industria y los servicios al comprobar que el tipo de problemas que se presentaban tenían fuertes similitudes con los que habían resuelto antes. Así creció el interés del mundo civil por la Investigación Operativa. Un aspecto que colaboró decisivamente a propagar el uso de estas técnicas fue el desarrollo de las computadoras, que permitieron resolver problemas involucrando cada vez mayor cantidad de operaciones matemáticas, en tiempos que resultaban también más cortos. Durante 1952 se utilizó en EEUU por primera vez una computadora en ese tipo de resoluciones y cobró entonces mayor vuelo todavía la aplicación de estas técnicas al arte militar. Se establecieron respuestas óptimas para la altura de vuelo de los aviones a fin de alcanzar submarinos enemigos durante un bombardeo, para el volumen y cantidad de bombas a utilizar a efecto de causar el mayor daño y para la inversión de recursos económicos en estas tecnologías.

Paulatinamente durante las décadas del 50 y del 60 comenzaron las aplicaciones a fines más altruistas y benéficos en todo el mundo. En 1958 se aplicaron en Moscú las técnicas de la programación lineal para diseñar el plan óptimo de transporte de arena para construcción, desde 10 puntos de origen a 230 de destino, utilizando computadora para el cálculo y logrando un ahorro del 11% sobre las estimaciones iniciales.

La gestión de gobiernos y de empresas, los problemas técnicos ingenieriles de todo tipo, muchos aspectos de la medicina, problemas de biología, ecología o química resultaron algunos de los campos a los que se extendió el uso de la Investigación Operativa, a punto tal de resultar quizás uno de los avances humanamente más significativos de la matemática del siglo xx.

En nuestro país el estudio y aplicación de estas herramientas comenzó en la Universidad de Buenos Aires a fines de la década del 50 con la creación del Instituto del Cálculo fundado por el matemático Manuel Sadosky (1914-2005), en el ámbito de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, y en la Cátedra de Investigación de Operaciones de la Facultad de Ingeniería, dirigida por el Ing. Isidoro Marín. En Marzo de 1960 se fundó la Sociedad Argentina de Investigación Operativa (SADIO) y actualmente funciona además la Escuela Permanente de Investigación Operativa (EPIO) conformada por especialistas de todo el país.

Si bien la Programación Lineal resultó el núcleo original de la disciplina, de a poco se fueron desarrollando distintos esquemas y teorías para abordar todo tipo de problemas en el marco general del modelado de sistemas. Así aparecieron distintas variantes de la programación lineal, la teoría de colas y la de stocks, la teoría de la decisión, la de juegos ya nombrada, los algoritmos para el recorrido de redes, los procedimientos de camino crítico PERT y CPM, y con auxilio de la teoría de probabilidades y de la estadística, la técnica poderosa de simulación. Los métodos de análisis y los paquetes de software basados en estas teorías permitieron optimizar costos, beneficios y tiempos en la producción industrial y los servicios, de modo que hoy sus elementos básicos constituyen parte esencial en la formación de ingenieros y administradores.

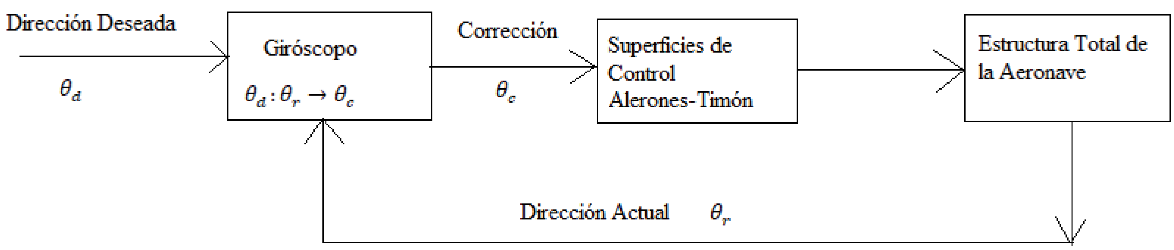
I.2 Perspectiva Sistémica

Se desarrolla a continuación un enfoque general de modelado de sistemas para las técnicas de la investigación operativa. Esto significa que la teoría matemática se utiliza como un modelo posible de un sistema, que permite analizarlo y extraer conclusiones acerca de su comportamiento actual y futuro. La idea es establecer entonces un lenguaje-marco ecléctico dentro del cual puedan quedar comprendidas las distintas teorías y su aplicación en situaciones y problemas reales de la ingeniería.

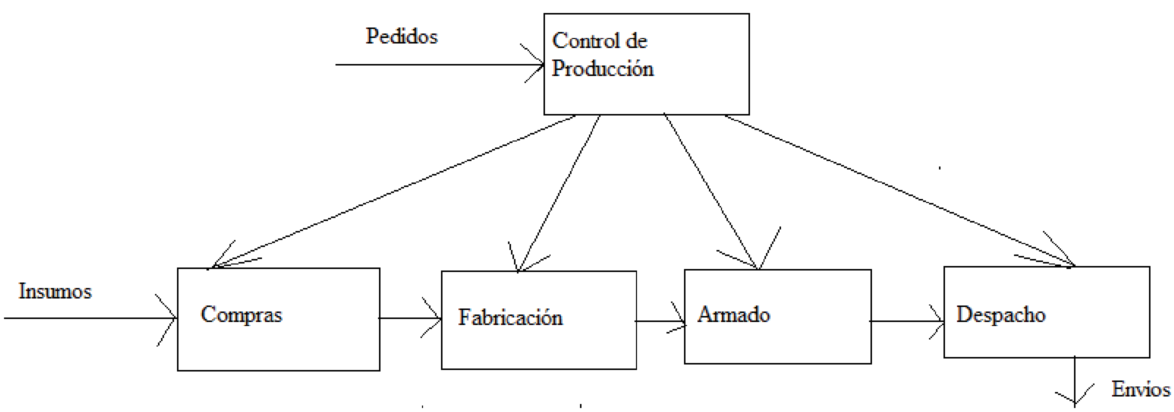
I.2.1- Sistemas

Un *sistema* es un conjunto de objetos, de existencia ser real o formal, que se hallan reunidos por alguna interacción o vinculación regular. Los diagramas de los ejemplos 1 y 2 describen distintos sistemas.

Ejemplo 1: Sistema de navegación aérea



Ejemplo 2: Sistema de fabricación



Conviene destacar que se trata de la descripción de dos sistemas en cuanto a los aspectos de interés de los mismos y en relación con lo que de ellos quiera analizarse. Es decir, los diagramas, así como la descripción en lenguaje coloquial, expondrán lo que resulte relevante de acuerdo a los objetivos del estudio. También se puede señalar aquí una característica marcada en la descripción del Ejemplo 1 para el cual se ve que hay un brazo de realimentación de la información que compara y controla la dirección de la estructura del aeronave con la deseada por el piloto. Este tipo de control "retroalimentado" no está presente en el Ejemplo 2. Los aspectos matemáticos de esta clase de sistemas son estudiados por la llamada Teoría de Control que usualmente no se considera dentro de la Investigación de Operaciones dada su autonomía, complejidad y extensión.

Al describir un sistema se trata de identificar sus distintos elementos y relaciones constitutivas. Para empezar, se buscan las *entidades* que son los objetos de interés. Por ejemplo, el giróscopo es una entidad en el ejemplo 1 o el departamento de fabricación lo es en el ejemplo 2. Las entidades tienen *atributos*, que pueden adoptar distintas cantidades o calidades. Por ejemplo, el giróscopo puede tener incorporada una dirección deseada expresada angularmente, digamos $\theta_d = 30°$, o el departamento de fabricación puede tener que fabricar 50 pantallas según la indicación del departamento de control de la producción. Estas cantidades representan el valor de los atributos que se modificarán al desarrollarse las *actividades* que, por separado o de manera relacionada, efectúen las entidades. Por ejemplo, es una actividad del giróscopo elaborar la corrección θ_c de la dirección real θ_r respecto de la deseada e informarla a las superficies de control, o fabricar las pantallas resulta una actividad que realiza el departamento de fabricación. Además, como consecuencia de las actividades que se realizan, los sistemas sufren cambios o *transformaciones* de su *estado.*

Los sistemas pueden clasificarse según distintos criterios. Serán *discretos* o *continuos* si las variables involucradas, especialmente el tiempo, se miden en una u otra de estas formas. Los habrá *estáticos* o *dinámicos*, según sean las transformaciones que verifiquen y finalmente podrán clasificarse como *determinísticos* o *estocásticos*, según la naturaleza de las actividades que realicen. Por ejemplo, el tiempo empleado por una cajera de supermercado en cobrar a un cliente tiene una duración aleatoria que queda establecida por una ley de probabilidad, por lo cual el sistema "supermercado" que contiene a la cajera es aleatorio o estocástico. En cambio, si todas las actividades de un sistema tienen resultado determinado sin azar el sistema es determinístico.

Un sistema siempre se encuentra rodeado de entidades y actividades que se vinculan o no con él, que no forman parte de su descripción, pero que constituyen su *medio ambiente.* En el ejemplo 2 los clientes son una entidad del medio ambiente y sus pedidos una actividad que realizada originariamente allí, modifica sin embargo al sistema. Lo importante respecto del modelado es entonces la *descripción* del sistema, que marcará la distinción entre él y el medio ambiente, a la vez que resaltará los aspectos importantes a efecto del estudio que desee realizarse. Con vistas al modelado, habrá que tener en cuenta algunos principios a aplicar en la descripción. Por un lado, contar con *información exacta y fidedigna*, por otro incorporar solo los *conceptos relevantes* como ha quedado dicho. Además, y con el fin de facilitar la modelización, se procederá a partir el sistema en *bloques* por entidad o actividad o, por el contrario, *agregar* o reunir un conjunto de entidades y/o actividades bajo un solo concepto cuando sea posible la simplificación de la descripción por esa vía.

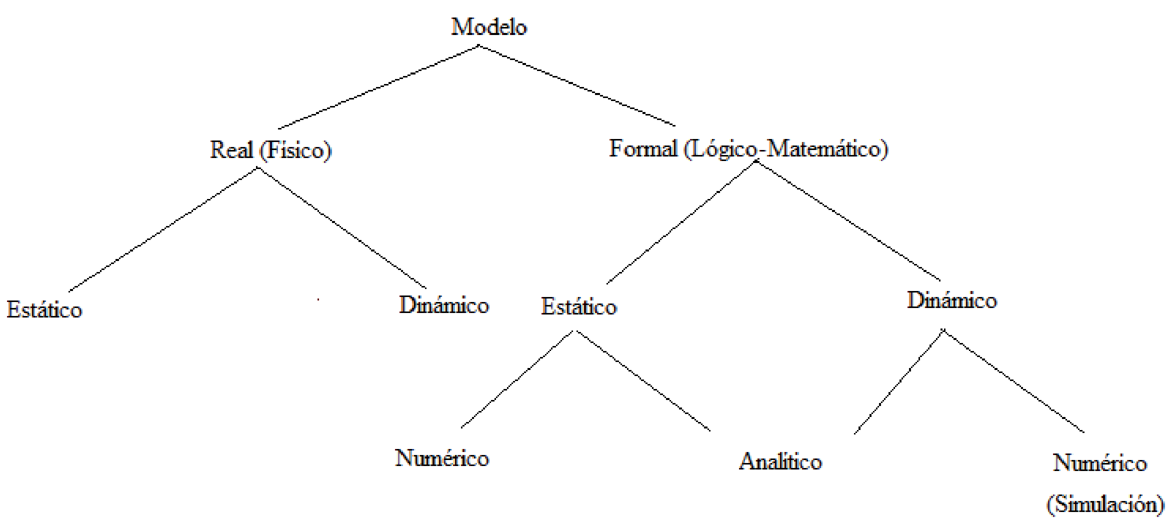
En el ejemplo 3 se muestran descripciones de distintos sistemas que atienden a la metodología detallada.

Ejemplo 3:

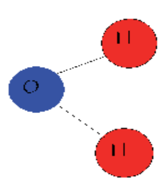
Sistema	Entidades	Atributos	Actividades
Tienda	Clientes Mercaderías	Compras, Horario Cantidades	Elegir, Pagar
Financiera	Clientes	Estado de Crédito	Pagar, Solicitar
Correo	Cartas	Peso, Forma	Enviar, Recibir
Tránsito	Vehículos	Velocidad, Peso, Distancia	Conducir, Cargar

I.2.2- Modelos

Un *modelo* es un conjunto o cuerpo de información sobre un sistema. Por ejemplo una foto del aula en la que se dicta la materia es un modelo del sistema de enseñanza-aprendizaje de la misma. Pero en particular aquí hay interés en el tipo de modelos utilizados en la investigación de operaciones que resultarán útiles respecto de ciertas decisiones a tomar sobre el sistema. Se inicia entonces el desarrollo del concepto ubicando este tipo de modelos en una clasificación usualmente aceptada que se desarrolla brevemente. La Gráfica 1 aporta entonces ese esquema general.
Gráfica 1



En primer término, conviene aclarar que los modelos reales, de existencia física, no serán objeto de estudio aquí. Sin embargo y para situar contextualmente la clasificación se dan a continuación algunos ejemplos de modelos.
Ejemplo 4: Modelo Icónico

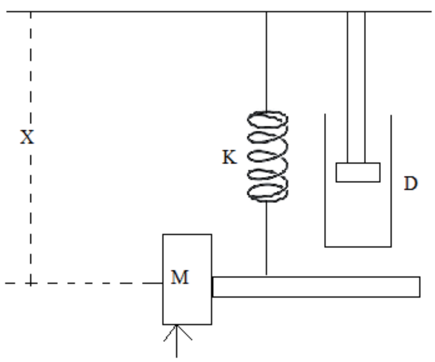


Una pelota de ping-pong pintada de azul y unida por medio de escarbadientes a otras dos pintadas de rojo representan en forma real e icónica una molécula de agua compuesta de una átomo de oxígeno y dos de hidrógeno (H_2O). Tal modelo es estático y puede servir por ejemplo para enseñar esa estructura a escolares .

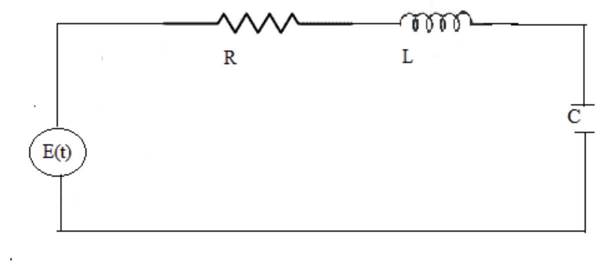
Ejemplo 5: Modelo Real a Escala

Un velero construido en miniatura, pero respetando las proporciones y materiales del que luego habrá de construirse en realidad es un modelo a escala y estático del mismo y puede permitir por ejemplo estudios de flotabilidad en piletas que simulen las condiciones reales de navegación.

Ejemplo 3. Modelo Físico Análogo



Sistema mecánico



Sistema electrico

El sistema mecánico está integrado por una masa M a la que se aplica una fuerza F que depende del tiempo, un resorte R cuya fuerza es proporcional a su extensión o contracción con constante de rigidez K y un amortiguador que ejerce una fuerza de amortiguación proporcional a la velocidad de la masa. Tal sistema puede representar por ejemplo la suspensión del neumático de un automóvil. El movimiento x del sistema está en relación con las partes constitutivas del mismo y puede a su vez expresarse, con adecuadas condiciones iniciales, por la solución de la ecuación diferencial:

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = KF(t)$$

El sistema eléctrico es precisamente un modelo del sistema mecánico construido por analogía. En él, la carga q en el capacitor C resulta el elemento análogo a x. La intensidad de corriente $I = \dot{q}$ representa a la velocidad $\dot{x}$, la diferencia de potencial E(t) a la fuerza F, la inductancia L a la masa M, el valor R de la resistencia al factor de amortiguación D y la constante 1/C a la constante K del resorte. De tal forma la ecuación diferencial cuya solución es precisamente q representa al sistema eléctrico.

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = \frac{E(t)}{C}$$

Esta ecuación es independientemente de las magnitudes físicas que representen las variables, enteramente análoga a la que representa en términos matemáticos al sistema mecánico. Es esta analogía entre fórmulas la que sugiere y autoriza entonces la sustitución física de un sistema por otro para estudiar propiedades, constituyendo en ese caso el sistema elegido un modelo físico análogo y dinámico del sistema original. Por supuesto y además las respectivas ecuaciones resultan modelos matemáticos de cada uno de los sistemas analizados.

Los modelos matemáticos son el objetivo principal de esta exposición. Un *modelo matemático estático y numérico* del curso de Investigación Operativa es por ejemplo una estadística sobre presencias de estudiantes, temas, notas, etc. del mismo. Algunos modelos matemáticos de los se verán aquí tendrán por ejemplo características invariantes en sus restricciones y objetivos constituyendo *modelos matemáticos estáticos y analíticos* porque involucrarán fórmulas para representar al sistema. Habrá también modelos que en sus fórmulas incluyan las diferentes transformaciones que el sistema pueda verificar y serán por esto *modelos matemáticos dinámicos y analíticos.* Finalmente habrá modelos que emulen le desempeño del sistema por medio de una estadística construida en forma ficticia a través de la aplicación de patrones de comportamiento conocidos dados por fórmulas simples. Estos *modelos matemáticos dinámicos y experimentales* son los que aportan las técnicas de *simulación*. Por ejemplo: conocido por el ajuste de datos estadísticos observados el comportamiento probabilístico exponencial del tiempo de atención de una cajera en un supermercado, se pueden generar tiempos ficticios de atención utilizando la ley matemática hallada, y simular así nuevos tiempos de atención de la cajera como si fueran reales.

Como es fácil imaginar la construcción de modelos matemáticos es una tarea cuya dificultad y duración dependen de la complejidad del sistema involucrado. No se requieren los mismos tiempos ni los mismos conocimientos para modelar por ejemplo la actividad de un satélite en órbita que para saber cuánto y cuando reponer en el stock de una fábrica. Pero en ambos casos, como en infinidad de otros, puede construirse un modelo matemático. Algunos sistemas suficientemente conocidos y relativamente sencillos tienen sus modelos estándar, en general analíticos. A ciertos modelos de ese tipo se refiere al menos inicialmente la Investigación de Operaciones, sin perjuicio que el uso y/o la combinación de modelos conocidos pueda extenderse a situaciones no analizadas o nuevas. Conviene entonces distinguir algunas etapas genéricas en la construcción de modelos nuevos y/o más complejos:

Etapa 1: Planteo del tipo de estudio o problema que desea realizarse acerca de un sistema.

Etapa 2: Descripción acabada del sistema con acopio de toda la información relevante dada por estadísticas, fórmulas relacionales, teorías, etc.

Etapa 3: Desarrollo del modelo matemático.

Etapa 4: Confección de un programa de computadora que en base al modelo calcule los valores de sus variables de decisión.

Etapa 5: Validación de parámetros.

Etapa 6: Uso del modelo. Evaluación de resultados y toma de decisiones.

Un breve comentario acerca de estas etapas debe comenzar destacando que por lo general se construye un modelo matemático a efecto de tomar, mediante su uso, alguna decisión. El planteo de cuál es esa decisión, cuáles son sus alcances y modalidades está contemplado en la Etapa 1. La Etapa 2 plantea un estudio pormenorizado del sistema para obtener su descripción en términos de entidades, atributos y actividades que normalmente serán representadas en términos matemáticos por variables, rangos de valores de las mismas y funciones que las ligan. Así se plantea la Etapa 3 para la cual puede hacerse necesario reconsideraciones sucesivas de las Etapas 1 y 2 a efecto de aumentar la claridad y precisión de la representación que el modelo haga del sistema y de la solución al problema de decisión involucrado. Terminado este proceso o al menos bien avanzado su desarrollo debe comenzar la Etapa 4 de confección de un programa de computadora que calcule los valores que hacen a la decisión a tomar. Este puede desarrollarse de muy variadas formas por medio de lenguajes de propósito general como por ejemplo Fortran Pythom, o R o C, aptos para el trabajo con expresiones matemáticas, o bien pueden utilizarse paquetes de software preparados para propósitos generales como el GPSS (Sistema de Simulación de Propósito General)) en el caso de un modelo experimental por simulación. También se dispone de paquetes por tipos de actividad como por ejemplo finanzas, exploración petrolera etc. La Etapa 5 significa un ajuste fino, buscando aportar máxima precisión en los parámetros de cálculo, a efecto que en situaciones conocidas el modelo y el sistema produzcan respuestas lo más parecidas posibles. Si esto ocurre, si el modelo ajusta a la realidad de comportamiento del sistema en situaciones conocidas, se podrá tener cierta certeza en que lo hará para casos desconocidos, en los cuales haya modificaciones o planteos nuevos. Por ende, se podrán utilizar las respuestas obtenidas en las pruebas con el modelo, para tomar las decisiones sobre qué hacer con la realidad del sistema. Esto involucra la realización de la Etapa 6.

Ejercicios resueltos

Ejercicio N°1- Detallar posibles entidades, atributos y actividades de los siguientes sistemas señalando objetivos de la descripción y caracterizando el medio ambiente de acuerdo a ello.

a) Sistema de tránsito

b) Sistema de comunicaciones

c) Sistema bancario

d) Sistema hospitalario

e) Supermercado

Sistema	Objetivos	Entidades	Atributos	Actividades	Medio Ambiente
Sistema de Tránsito	Organizar la circulación de forma efectiva	Semáforos, automóviles, peatones	Velocidad, luces normativas, senda peatonal	Frenar, esperar, circular	Parada de ómnibus, subte
Sistema de Comunicaciones	Comunicar entre dos o más puntos, intercambiando datos o información	Emisor, receptor	Longitud del mensaje, hora	Enviar-recibir información	Computadoras
Sistema Bancario	Gestionar los valores de los clientes según las necesidades de los mismos, en forma segura	Banco, cliente	Valores monetarios ($) en cuentas.	Depósitos, extracciones, transferencias	Edificio, cajas
Sistema Hospitalario	Diagnosticar y resolver la situación del paciente	Médico, enfermero, paciente	Tiempo de espera, equipamientos, insumos	Internación, consulta médica, atención de urgencia	Consultorios, computadoras
Supermercado	Abastecer a sus clientes	Empleado, cliente, repositor, proveedor, cajas	Lista de compras, mercadería en camiones, tiempo de atención	Comprar, vender, reponer mercadería	Fila de cobro y control de productos

Ejercicio N°2- Describir el sistema de enseñanza-aprendizaje de la materia Investigación Operativa

El sistema enseñanza-aprendizaje de la materia tiene por entidades fundamentales a los estudiantes y los profesores. Los atributos ligados con los primeros son los conocimientos previos, su interés por la materia y algunos más como el número de presencias y la nota obtenida en cada evaluación. En cuanto a los profesores son atributos sus conocimientos, sus recursos didácticos, sus clases asignadas. El aula es otra entidad a tener en cuenta con su disponibilidad horaria, la cantidad de sillas, escritorios y pizarrones disponibles como atributos. Si el curso se impartiera a distancia, recursos tales como la plataforma de enseñanza-aprendizaje y sus facilidades disponibles serían entidades y respectivos atributos también. Se trata de un sistema dinámico pues muchos de los atributos señalados cambian en razón de la actividad de enseñanza y aprendizaje compuesta, a su vez, por sub actividades tales como exposición teórica, realización de ejercicios, comprensión, estudio y evaluación. El tiempo puede considerarse en forma continua pues las distintas entidades pueden desarrollar en conjunto y/o separadamente estas actividades en cualquier momento, aunque puede también conceptuarse la discretización en días, por ejemplo. El sistema es estocástico pues muchas de las actividades tienen a priori varios posibles resultados con distinta probabilidad de ocurrencia. Por supuesto cabría aquí un mayor detalle si se precisara en la consigna del problema el objetivo por el cual se requiere la descripción y el ulterior modelado que ésta supone.

Ejercicios propuestos

Ejercicio N°3- Dar ejemplos de sistemas:

a) estáticos y dinámicos

b) continuos y discretos

c) determinísticos y estocásticos.

Ejercicio N°4- Según la siguiente descripción indicar entidades, atributos, actividades y tipo de sistema:

"A un puerto llegan barcos que atracan junto a un muelle si está disponible; en caso contrario, esperan hasta que se libere uno. Los descargan varias cuadrillas de trabajo cuyos tamaños dependen del tonelaje de la nave. Una bodega contiene una nueva carga para el barco. Se carga el barco y luego se hace a la mar."

Ejercicio N°5- Se desea agregar una nueva ruta de colectivo en la ciudad y el director de transporte debe determinar con cuantos colectivos adicionales hay que contar para ello. ¿Cuáles son los atributos fundamentales de pasajeros y colectivos a tener en cuenta?

II- El Modelo de Programación Lineal

II.1 Descripción y Ejemplo

El modelo de programación lineal busca *optimizar* una expresión *funcional* de carácter lineal sujeta a *restricciones* representadas por inecuaciones que también son lineales. A efecto de comprender esta definición se proporciona ahora un ejemplo en el cual el modelo se aplica.

Ejemplo 1:

Una mueblería fabrica mesas en dos tipos de madera de distinta calidad. En un sector de la fábrica se corta la madera y en otro se la ensambla y lustra. En el sector de corte se dispone semanalmente de $3m^2$ de madera de pino y $8m^2$ de madera de roble para la fabricación de mesas mientras que, el sector de lustrado y ensamble, puede destinar al mismo fin 10 hs. a la semana. Se sabe que cada mesa de pino requiere 1 m^2 de madera y 2 horas de lustre mientras que una mesa de roble insume el mismo tiempo de lustrado, pero utiliza 2 m^2 de madera. Expresadas en cientos de pesos se dan a continuación las ganancias que se obtienen por cada mesa de pino y por cada mesa de roble: 1 (es decir 100 pesos) y 3 (es decir 300 pesos) respectivamente. Se desea establecer entonces un plan de producción semanal que maximice las ganancias.

Este es un típico problema de programación lineal. El primer comentario debe ser acerca de la naturaleza de los enunciados. En efecto, al plantear un problema hay una serie de datos, condiciones y restricciones que se expresan en el detalle del mismo con toda claridad. Por ejemplo, es muy claro que la ganancia por cada mesa de roble que se venda es de 300 pesos. Sin embargo, el enunciado nada dice sobre la cantidad de mesas de roble que se podrían vender a la semana lo cual, dado el contexto del problema, puede resolverse asumiendo como verdadera la hipótesis de que habrán de venderse todas las que puedan fabricarse y por lo tanto no hay limitación que surja de la demanda para la fabricación semanal. Está claro que esta es simplemente una hipótesis, pero también que queda lógicamente fundamentada por la ausencia de una restricción de ventas por semana en el enunciado del problema. En conclusión; los enunciados no suelen decirlo todo acerca de un problema y por lo general dejan un espacio que necesita ser llenado por la aceptación implícita de hipótesis o, en un caso real, por la verificación de las mismas.

Al continuar con el análisis del enunciado y tratar de llevar el planteo del problema a fórmulas matemáticas, se observa que surge claramente la proporcionalidad directa entre las ganancias por mesa de cada tipo y la ganancia por el total de mesas del mismo tipo. Por otra parte, es claro también que el número de mesas de roble y el número de mesas de pino a fabricar semanalmente, determinaran con esa proporcionalidad directa, la ganancia semanal total y que lo que se intenta es establecer que cantidad de un tipo y de otro fabricar, de acuerdo a las limitaciones de recursos imperantes, para obtener la mayor ganancia. En términos matemáticos:

Maximizar $z = x_1 + 3x_2$ Esta expresión es lo que usualmente se denomina la *funcional objetivo* y en ella x_1 representa la cantidad de mesas de pino a fabricar y x_2 la cantidad de mesas de roble a fabricar que producen según sus valores una ganancia total z.

Se observa, además, que también para las restricciones aparece la proporcionalidad directa entre el número de unidades de cada tipo de mesa que se fabrique y la cantidad de cada recurso que ello insuma. De tal forma las llamadas *restricciones por limitación de recursos* son las siguientes inecuaciones lineales:

$x_1 \leq 3$ Restricción por limitación del recurso madera de pino

$2x_2 \leq 8$ Restricción por limitación del recurso madera de roble

$2x_1 + 2x_2 \leq 10$ Restricción por limitación del recurso horas de lustre disponibles.

Además hay otro tipo de restricciones obvias para el lenguaje usual: las cantidades de mesas a fabricar x_1 y x_2 deben ser positivas o cero. Matemáticamente esto hay que expresarlo para que la solución del problema no conduzca a valores absurdos o imposibles. Son estas las llamadas *restricciones de no-negatividad* de las variables. Así se tiene:
$x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$ Restricciones de no-negatividad.

En suma, el problema planteado tiene como expresión matemática el conjunto de relaciones:

Maximizar $z = x_1 + 3x_2$

Sujeto a:

$$x_1 \leq 3$$

$$2x_2 \leq 8$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 10$$

con $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$

Todas las expresiones resultan de tipo lineal y el problema así planteado es hallar el máximo valor posible para z cumpliendo con las restricciones de las variables x_1 y x_2. Se dice entonces que la solución se hallará aplicando el *modelo de programación lineal.*

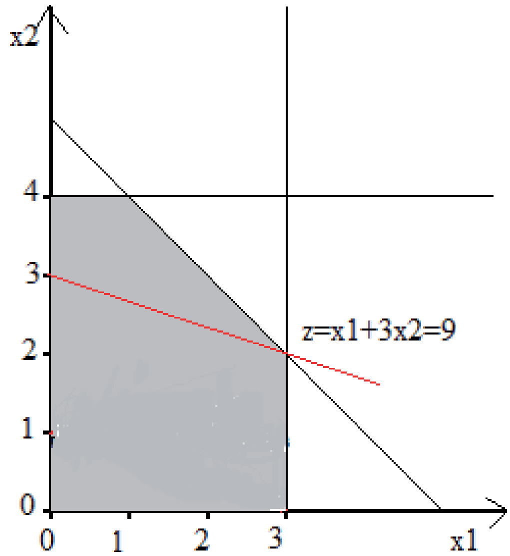
II.2 Resolución Gráfica

El problema planteado puede en este caso resolverse gráficamente utilizando un par de ejes coordenados cartesianos para representar la región de valores admitida para las variables x_1 y x_2. Esta es la *región de soluciones factibles* establecida por las distintas inecuaciones que expresan las restricciones del problema. Al dar valores crecientes a z quedan determinadas distintas rectas que atraviesan la región. Si el problema tiene solución una de ellas corresponderá al valor máximo de z intersectándose, en al menos un punto vértice, con la región factible como se muestra en la Gráfica 1.

Grafica 1.

a)

b)



c)

En a) la recta trazada corresponde al valor de z=3. Todos los puntos de la zona sombreada, en particular por ejemplo (0,1) y (3,0), son entonces soluciones posibles del problema, aunque no óptimas. En b) se ha desplazado la recta de ganancias haciendo crecer las mismas al valor z = 9. Finalmente, en c) se ha alcanzado el máximo valor de z compatible con una solución que por estar en la zona factible cumple con todas las restricciones del problema. Hay que observar que esta solución óptima se presenta en un punto vértice del conjunto de soluciones posibles. Se concluye que la máxima ganancia semanal posible es de 13 cientos de pesos (1300 pesos) que se obtendrá al fabricar 1 mesa de pino y 4 de roble.

II.3 Generalización

De forma general el modelo de Programación Lineal incluye los siguientes elementos:

1- Una funcional objetivo, de carácter lineal en cada una de las variables de interés. Esta funcional es en realidad una familia de funciones. Obsérvese que en el Ejemplo 1 cada valor de z se correspondía con una recta distinta pero paralela a todas las de la familia. Esta funcional debe ser "optimizada", es decir maximizada o minimizada según el problema a resolver. Es claro que, si intervienen solamente dos variables de interés como ocurre en el Ejemplo 1, entonces un procedimiento gráfico análogo al descripto bastará para hallar la solución. Sin embargo, en los problemas reales muchas veces el número de variables se eleva a decenas o centenas lo que torna imposible el tratamiento gráfico.

2- Un conjunto de restricciones por limitación de recursos representadas por expresiones de carácter lineal. En el caso del Ejemplo 1, éstas contenían el símbolo $\leq$ pero podrían también haber contenido los símbolos $\geq$, =, $<$ o $>$ Estas restricciones colaboran para determinar la región de soluciones factibles que es un subconjunto de la dimensión geométrica que corresponda al número de variables involucradas.

3- Las restricciones de no negatividad que podrán, o no, figurar en las condiciones del problema si las variables no pueden tomar valores negativos.

En el caso de que el número de variables sea mayor que dos, la resolución del problema no podrá efectuarse gráficamente y habrá que aplicar algún procedimiento algorítmico para hallar la solución. Un algoritmo de tal tipo se estudiará en breve pero, mientras tanto, obsérvese que en el Ejemplo 1 hay que maximizar la función objetivo con restricciones de $\leq$ cuyos segundos miembros son positivos, y las variables deben ser además no negativas. Este tipo de expresión del problema de Programación Lineal se denomina convencionalmente *forma estándar* y constituye el punto de partida para la confección del algoritmo.

En fórmulas entonces el modelo estándar se expresa:

$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ [MAX]

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1,2\ldots,m$

$x_j \geq 0 \quad j = 1,2..n$

II.4 El Método Simplex.

II.4.1 Comentario Introductorio.

Existen dos métodos de cálculo de la solución óptima al problema de programación lineal que han resultado suficientemente probados desde el punto de vista matemático y confiables desde la óptica computacional. El procedimiento más conocido es el *algoritmo simplex* que surgió en los comienzos de la Investigación Operativa y es el que se desarrollará a continuación. El otro método, también eficiente, es el llamado *algoritmo de Karmarkar*, matemático de origen hindú que lo desarrolló alrededor de 1980 trabajando para los laboratorios Bell de EEUU. Ambos métodos buscan la solución óptima probando en cada iteración con una solución factible perteneciente al conjunto de dichas soluciones, aunque lo hacen de formas conceptualmente distintas. El Simplex trabaja recorriendo vértices mientras hace crecer le valor z de la funcional objetivo, realizando un número de cuentas que crece exponencialmente con la cantidad de coeficientes y variables del problema. El algoritmo de Karmarkar, de mayor complejidad matemática, trabaja yendo desde el centroide del conjunto convexo de soluciones factibles hacia el óptimo, con un crecimiento polinomial del número de operaciones necesarias en relación con la cantidad de datos y variables involucradas. Por esa razón para problemas de gran tamaño, resueltos en general mediante supercomputadoras, el método de Karmarkar es más eficiente, aunque para aplicaciones más comunes el Simplex resulta muy apropiado y requiere menos conocimiento matemático para su aplicación certera.

La región de soluciones factibles tiene la importante característica matemática de ser *convexa* y puede probarse que si existe al menos un punto que produce el óptimo de la funcional objetivo, este se encontrará en un *punto vértice* del conjunto convexo de soluciones factibles. Estos aspectos matemáticos y las demostraciones correspondientes a los diferentes pasos del algoritmo simplex que se expondrá a continuación, se basan en la teoría de espacios métricos y en resultados del álgebra lineal. Aquí sólo se detallarán los pasos del procedimiento y la forma mnemotécnica de efectuar el cálculo dando simplemente una idea intuitiva de su justificación.

El método simplex es aplicable sin importar, al menos en teoría, el número de variables y de restricciones que posea el problema. En este aspecto la limitación vendrá dada únicamente por la velocidad de cálculo y capacidad de almacenamiento de la computadora que se utilice, aunque está claro que, los avances de la tecnología de procesadores han permitido una creciente ampliación de esas cantidades.

El procedimiento simplex se aplica sobre la forma del problema que se ha adoptado convencionalmente como estándar. Aquí tal forma requiere maximizar la funcional objetivo, de acuerdo a restricciones de menor o igual con segundos miembros positivos y variables no negativas. Cualquier cambio en esas condiciones iniciales del problema, como por ejemplo resultaría por tener que minimizar, por ser de igualdad o de mayor o igual o de menor algunas o todas las restricciones, por ser negativo algún segundo miembro, o por aceptarse valores negativos para algunas de las variables, requerirá adaptación a la forma estándar por medio de transformaciones matemáticas como se verá más adelante. El algoritmo trabaja en el sentido de hacer crecer el valor de z desde estas condiciones estándar por lo cual, si alguna de ellas no se presenta, es necesario realizar previamente transformaciones algebraicas para reestablecer la naturaleza estándar del problema. Por supuesto estas condiciones estándar son arbitrarias y podrían tomarse otras, pero en tal caso los pasos del algoritmo también debieran variar para que se produjera la búsqueda de un valor óptimo para z.

A efecto de ilustrar adecuadamente los distintos pasos del cálculo se utilizará el problema planteado en II-1 Ejemplo 1:

Maximizar $z = x_1 + 3x_2$

Sujeto a:

$$x_1 \leq 3$$

$$2x_2 \leq 8$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 10$$

con $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$

El procedimiento requiere llevar el problema a la forma de un sistema lineal. Para ello se dispone la funcional objetivo colocando todas las variables en el mismo miembro de la igualdad y las inecuaciones se transforman en ecuaciones lineales agregando una variable de *holgura* que se supone tomará los valores necesarios para transformar las desigualdades en igualdades en cada caso. Siendo además que las variables originales serán no negativas es inmediato que lo mismo tendrá que ocurrir para las variables de holgura incorporadas.

De acuerdo a esto el sistema queda:

Maximizar ***z*** tal que:

$$z - x_1 - 3x_2 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$2x_2 + x_4 = 8$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_5 = 10$$

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1,2,3,4,5$$

Las variables x_3, x_4, x_5 son las de holgura que representan lo que falta a cada inecuación para transformarse en igualdad.

El sistema que ha resultado tendrá un conjunto de soluciones que incluirán valores para z y para cada x_i del tipo $(z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. De ser este conjunto no vacío el algoritmo buscará entonces una de la o las soluciones que correspondan al máximo valor posible de z.

II.4.2 Algoritmo Simplex

A partir de una expresión del tipo de la indicada en II.4.1 comienza entonces la aplicación del procedimiento simplex en el cual pueden distinguirse tres pasos. A efectos de ordenar apropiadamente el cálculo estos pasos se expresan en un cuadro. Se utiliza aquí el sistema resultante del Ejemplo 1 para introducir tal metodología.

1- **Paso Inicial**

Variables Básicas	Número de Ecuación	Coef. de Z	Coef. de X_1	Coef. de X_2	Coef. de X_3	Coef. de X_4	Coef. De X_5	Segundo Miembro
Z	0	1	-1	-3	0	0	0	0
X_3	1	0	1	0	1	0	0	3
X_4	2	0	0	2	0	1	0	8
X_5	3	0	2	2	0	0	1	10

En este paso inicial se supone que las variables x_1 y x_2 que interesa conocer son *no básicas y* por tanto su valor es 0. Entonces la tabla expresa en forma directa una solución del sistema que tiene en cuenta esos dos valores. En efecto:

$$
\begin{aligned}
z - 0 - 3.0 \qquad\qquad &= 0 \\
0 \quad + x_3 \qquad\qquad &= 3 \\
2.0 \quad + x_4 \qquad &= 8 \\
2.0 + 2.0 \qquad + x_5 &= 10
\end{aligned}
$$

El vector $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0,0,3,8,10)$ y $z = 0$. Esta es una solución del sistema planteado, aunque no necesariamente la óptima. Para saber si lo es o no se aplica entonces el paso 2-.

2- Detención del procedimiento

Se inspecciona el renglón 0 para determinar si existen coeficientes de x_i (en este caso para $i = 1, 2, 3, 4, 5$) con signo negativo. Si esto ocurriese habrá que seguir con el paso 3-. Pero si todos los coeficientes de las x_i resultan positivos o cero entonces la solución calculada es la óptima. La razón de esta regla es que un coeficiente negativo en cualquier x_i resultará para z en un valor menor del que adoptaría si ese mismo coeficiente fuese 0 o mayor pues $x_i \geq 0$.

El cuadro inicial muestra que los coeficientes de x_1 y x_2 en el renglón cero son -1 y -3 respectivamente por lo cual se debe continuar con el paso 3-.

3- Iteración

La iteración para hallar una nueva solución comprende a su vez los tres pasos siguientes:

i) Identificación de la columna pivote
ii) Identificación de la fila pivote
iii) Determinación de un sistema equivalente e identificación de una nueva solución dentro del conjunto factible.

Estos tres pasos se basan en conocidas propiedades de los sistemas de ecuaciones lineales en los cuales ciertas operaciones entre filas llevan a sistemas equivalentes que tienen el mismo conjunto de soluciones. En efecto es posible multiplicar una fila por un escalar para reemplazar la original, sumar dos filas para reemplazar una de ellas por la fila suma o intercambiar el orden de las filas, sin que varíe el conjunto de soluciones, aunque cambie la formulación del sistema. En el caso del algoritmo simplex esto lleva a hallar otras soluciones factibles y por consiguiente nuevos valores de z que, si existe solución óptima, convergerán a un máximo luego de algunas iteraciones.

i) Identificación de la columna pivote.

Existen razones matemáticas por las cuales conviene elegir como columna pivote aquella que posee el coeficiente negativo de mayor valor absoluto (es decir el menor valor negativo) en la fila correspondiente a la ecuación 0, pero intuitivamente se aprecia que un coeficiente negativo menor (es decir de mayor valor absoluto) podría restar más al valor de z que uno mayor (de menor valor absoluto). Con este criterio se elige entonces la columna pivote como se ve en el cuadro simplex de más abajo.

ii) Identificación de la fila pivote.

Para elegir la fila pivote se efectúan los cocientes entre los segundos miembros y sus correspondientes elementos en la columna pivote solo cuando estos son estrictamente positivos (es decir no negativos ni 0). La fila para la cual este cociente resulte mínimo será la elegida porque señala a la variable que menos contribuirá al valor de z.

Los pasos i) y ii) de la iteración se ilustran en el siguiente cuadro:

Variables Básicas	Número de Ecuación	Coef. de Z	Coef. de X_1	Coef. de X_2	Coef. de X_3	Coef. de X_4	Coef. De X_5	Segundo Miembro
Z	0	1	-1	-3	0	0	0	0
X_3	1	0	1	0	1	0	0	3
X_4	2	0	0	**2**	0	1	0	8 (8/2=4) min
X_5	3	0	2	2	0	0	1	10 (10/2=5)

Hasta aquí resulta entonces que la columna de coeficientes de x_2 ha sido elegida como columna pivote y esa variable tendrá que entrar como *básica* pues su valor resulta importante para el crecimiento de z, mientras que la fila pivote corresponde a la variable x_4, siendo entonces que ésta pasará a ser no básica pues es la que menos contribuye a aumentar el valor de z.

iii) Determinación de un sistema equivalente e identificación de una nueva solución dentro del conjunto factible.

Para mostrar esto último debemos transformar el sistema en uno equivalente que tenga el mismo conjunto de soluciones, pero que evidencie una nueva y distinta que la hallada en la anterior iteración, con un valor de z mayor o a lo sumo igual que el anterior. Para ello entonces operamos con las ecuaciones de la siguiente forma:

(Ecuación 2)/2->Nueva Ecuación 2

Coef. de Z	Coef. de X_1	Coef. de X_2	Coef. de X_3	Coef. de X_4	Coef. De X_5	Segundo Miembro	
0/2=0	0/2=0	2/2=1	0/2=0	1/2	0/2=0	8/2=4	Nueva Ecuación 2

Con la Nueva Ecuación 2 pivoteamos para obtener todas las nuevas ecuaciones:

[(Ecuación 0) + 3x(Nueva Ecuación 2)]->Nueva ecuación 0

Coef. de Z	Coef. de X_1	Coef. de X_2	Coef. de X_3	Coef. de X_4	Coef. De X_5	Segundo Miembro	
1	-1	-3	0	0	0	0	
0x3	0x3	1x3	0x3	(½)x3	0x3	4x3	
1	-1	0	0	3/2	0	12	Nueva Ecuación 0

(Ecuación 1) -> Nueva Ecuación 1

Aquí no se requiere pivoteo pues ya está en 0 el coeficiente de la celda

[(Ecuación 3) + (-2)(Nueva Ecuación 2)] -> Nueva Ecuación 3

Coef. de Z	Coef. de X1	Coef. de X2	Coef. de X3	Coef. de X4	Coef. De X5	Segundo Miembro	
0	2	2	0	0	1	10	
0	0	1x(-2)	0	(½)x(-2)	0	4x(-2)	
0	2	0	0	-1	1	2	Nueva Ecuación 3

Como la variable x_4 salió del cuadro como no básica, es decir adoptando valor 0, y la variable x_2 entró al cuadro como básica queda los siguiente:

Variables Básicas	Número de Ecuación	Coef. de Z	Coef. de X_1	Coef. de X_2	Coef. de X_3	Coef. de X_4	Coef. De X_5	Segundo Miembro
Z	0	1	-1	0	0	3/2	0	12
X_3	1	0	1	0	1	0	0	3
X_2	2	0	0	1	0	1/2	0	4
X_5	3	0	2	0	0	-1	1	2

Esto quiere decir que el nuevo valor de z es z=12 pues teniendo en cuenta que $x_1=0$ y $x_4=0$, se tiene que la ecuación correspondiente al renglón de coeficientes es:
$1 \times z + (-1) \times 0 + 0 \times x_2 + 0 \times x_3 + \frac{3}{2} \times 0 + 0 \times x_5 = 12$ es decir, z=12.

Calculando así surge que el vector de solución que representa el punto hallado en la región de soluciones es:
$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0,4,3,0,2)$ que realiza un valor 12 para la variable objetivo z.

Al aplicar la regla de detención se ve que hay un coeficiente en el renglón 0 que es negativo por lo cual habrá que realizar una nueva iteración para llegar al óptimo. Las filas y columnas pivotes quedan entonces identificadas como sigue:

Variables Básicas	Número de Ecuación	Coef. de Z	Coef. de X_1	Coef. de X_2	Coef. de X_3	Coef. de X_4	Coef. De X_5	Segundo Miembro
Z	0	1	-1	0	0	3/2	0	12
X_3	1	0	1	0	1	0	0	3/1=3
X_2	2	0	0	1	0	1/2	0	4
X_5	3	0	**2**	0	0	-1	1	2/2=1min

Aplicando las distintas etapas del paso iterativo resulta al terminar esta segunda iteración el cuadro:

Variables Básicas	Número de Ecuación	Coef. de Z	Coef. de X_1	Coef. de X_2	Coef. de X_3	Coef. de X_4	Coef. De X_5	Segundo Miembro
Z	0	1	0	0	0	1	1/2	13
X_3	1	0	0	0	1	1/2	-1/2	2
X_2	2	0	0	1	0	1/2	0	4
X_1	3	0	1	0	0	-1/2	1/2	1

La solución hallada es ahora:

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1,4,2,0,0)$ con z=13. Se observa que además este es el valor óptimo a alcanzar pues no quedan negativos en el renglón 0 y por lo tanto el procedimiento debe detenerse al no poder hallar mayor valor para z. Como era de esperar la solución hallada al usar el algoritmo simplex coincide con la hallada gráficamente en II.2.

Todo este cálculo no nos debe hacer perder de vista lo que estábamos buscando. El fabricante deberá construir una mesa de pino y cuatro de roble semanalmente para maximizar su ganancia que será de que será de 1300 $. Que la variable x_3 haya quedado en 2 al hallar el óptimo significa que sobran 2 m^2 de madera de pino cada semana.

II.5 Tratamiento de Formulaciones No Estándar

II.5.1 Formulaciones No Estándar

En oportunidades puede ocurrir que el problema se exprese sin atenerse a la formulación estándar. Por ejemplo; que la funcional objetivo deba minimizarse. O, que las restricciones se expresen por igualdades o mayores. O que las variables puedan adoptar valores negativos. En todos estos casos si se aplicara directamente el algoritmo simplex, éste no llevaría al óptimo buscado porque está construido para hacer crecer el valor z hasta un máximo, a partir de restricciones de menor o igual, con segundos miembros positivos y variables no negativas. Cualquier alteración de estas condiciones llevaría el cálculo iterativo a valores de z que no serían los buscados. Así, resulta necesario reformular el problema en los términos algebraicos iniciales estándar para que el Simplex trabaje adecuadamente.

1- Restricciones de igualdad

Supongamos que, en nuestro ejemplo original II.1, toda la madera de roble disponible debiera ser obligatoriamente consumida en la producción semanal. En ese caso la ecuación que simboliza la restricción por limitación del recurso quedaría: $2x_2 = 8$
No puede agregarse una variable de holgura a esta ecuación pues su valor constante sería 0. El algoritmo no funcionaría adecuadamente en esta situación precisamente porque faltaría una variable. El camino para resolver esto es agregar una variable artificial a todo el problema, pero de forma tal que si esa variable fuera distinta de 0 la funcional estuviera lejos de alcanzar el máximo. Considerando entonces M un número positivo muy grande, fuera de la escala de todos los coeficientes del problema, el sistema a resolver quedaría:

$$\begin{aligned}
z - x_1 - 3x_2 + \quad\quad M\bar{x}_4 \quad &= 0\\
x_1 + \quad\quad x_3 \quad\quad &= 3\\
2x_2 + \quad\quad \bar{x}_4 \quad &= 8\\
2x_1 + 2x_2 + \quad\quad x_5 &= 10\\
x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad \bar{x}_4 \geq 0 \quad x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

$\bar{x}_4$ es una variable artificial positiva que debe ser 0 en el momento de alcanzar la solución pues no representa a ninguna cantidad de recursos real ni a las variables de interés $x_1 o\ x_2$. Solo es una ayuda para el cálculo. Su disposición y su signo en el sistema de ecuaciones de arriba deviene de considerar su agregado en la funcional objetivo
$z = x_1 + x_2 - M\bar{x}_4$
Cuando $\bar{x}_4$ positiva es distinta de 0 y es multiplicada por M, un valor positivo que se supone tan grande como se necesite, el valor de z no puede ser máximo. De modo que deberá hacerse 0 cuando el máximo se alcance. Es decir, a lo sumo en la última iteración del simplex habrá "salido como no básica".
El cuadro simplex inicial quedará:

Variables Básicas	Número de Ecuación	Coef. de Z	Coef. de X_1	Coef. de X_2	Coef. de X_3	Coef. de $\bar{X}_4$	Coef. De X_5	Segundo Miembro
Z	0	1	-1	-3	0	M	0	0
X_3	1	0	1	0	1	0	0	3
$\bar{X}_4$	2	0	0	2	0	1	0	8
X_5	3	0	2	2	0	0	1	10

A partir de aquí la resolución sigue los mismos pasos del procedimiento Simplex ya indicados teniendo siempre en cuenta el valor grande que adopta M tanto cuando se suma como cuando se resta.

2- Restricciones de mayor o igual

Supongamos ahora que $2x_2 \geq 8$. En tal caso, a efecto de transformar la inecuación en una de menor igual, podemos multiplicar ambos miembros por -1. Obtenemos entonces $-2x_2 \leq -8$. Ahora agregamos una variable de holgura para obtener la igualdad: $-2x_2 + x_4 = -8$. Pero a efecto de no considerar un segundo miembro negativo tenemos que multiplicar por -1. Obtenemos entonces la nueva igualdad
$2x_2 - x_4 = 8$ que precisamente requiere la incorporación de una variable artificial como en 1- Es decir; $2x_2 - x_4 + \bar{x}_5 = 8$. Nuestro sistema de ecuaciones queda ahora:

$$
\begin{aligned}
z - x_1 - 3x_2 + \qquad\qquad M\bar{x}_5 &= 0\\
x_1 + \quad x_3 \qquad\qquad &= 3\\
2x_2 + \qquad x_4 + \quad \bar{x}_5 &= 8\\
2x_1 + 2x_2 + \qquad\qquad x_6 &= 10
\end{aligned}
$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0 \quad \bar{x}_5 \geq 0 \quad x_6 \geq 0$$

A partir de aquí se construye el cuadro simplex inicial:

Variables Básicas	Número de Ecuación	Coef. de Z	Coef. de X_1	Coef. de X_2	Coef. de X_3	Coef. de X_4	Coef. de $\bar{X}_5$	Coef. de X_6	Segundo Miembro
Z	0	1	-1	-3	0	0	M	0	0
X_3	1	0	1	0	1	0	0	0	3
X_4	2	0	0	2	0	1	1	0	8
X_6	3	0	2	2	0	0	0	1	10

Y esto se resuelve por el procedimiento Simplex usual

3- Minimización

El principio aplicado para minimizar es sencillo. La idea consiste en transformar el problema de minimización en uno equivalente de maximización. Es decir; buscar el mínimo de z resulta igual que buscar el máximo de –z. De acuerdo a esto si se tratara de minimizar la funcional del problema original planteado en II.1 habría que formalizar el sistema de ecuaciones como sigue:

Maximizar $-z = -x_1 - 3x_2$

Sujeto a:

$$x_1 \leq 3$$

$$2x_2 \leq 8$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 10$$

con $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$

El sistema de ecuaciones queda entonces:

$$\begin{array}{lllll}
-z + x_1 + 3x_2 & & & & = 0 \\
\quad x_1 & + x_3 & & & = 3 \\
\quad\quad 2x_2 & & + x_4 & & = 8 \\
\quad 2x_1 + 2x_2 & & & + x_5 & = 10
\end{array}$$

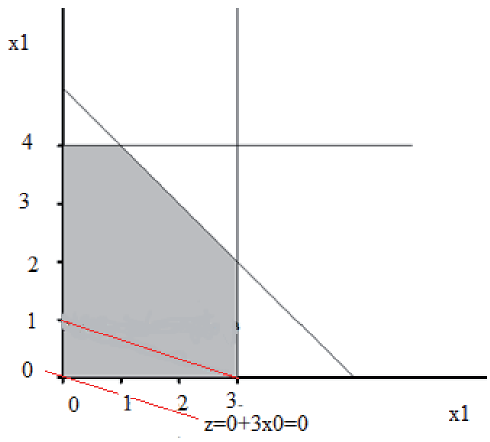
$x_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5$

Y el cuadro simplex inicial:

Variables Básicas	Número de Ecuación	Coef. de Z	Coef. de X_1	Coef. de X_2	Coef. de X_3	Coef. de X_4	Coef. De X_5	Segundo Miembro
Z	0	-1	1	3	0	0	0	0
X_3	1	0	1	0	1	0	0	3
X_4	2	0	0	2	0	1	0	8
X_5	3	0	2	2	0	0	1	10

Aquí se obtiene la primera solución factible $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0,0,3,8,10)$ y $z = 0$. Al aplicar la regla de detención se observa que se ha alcanzado el óptimo pues no hay ningún coeficiente negativo en el renglón 0. Esto es razonable pues las variables son todas no negativas y la región de soluciones factibles contiene al punto (0,0) según se ve en la Gráfica 2 que se presenta a continuación. Cabe aclarar que el signo negativo del coeficiente de *z* no es tenido en cuenta pues se trata de la variable a optimizar.

Gráfica 2



Si en la misma dirección de paralelismo se desplaza la recta roja punteada de modo que decrezca el valor de z, se llegará a una recta que intersecte en el vértice (0.0) a la zona sombreada de soluciones factibles. Por lo tanto, allí se hallará el valor z=0 que es la minimización buscada. No siempre, por supuesto, se alcanzará la minimización tan fácilmente pues en los casos que el vértice nulo no pertenezca a la región de soluciones factibles puede requerirse la realización de pasos iterativos según el signo de las inecuaciones que la definan.

4- Variables negativas

Si no se cumplen las restricciones de no negatividad se pueden presentar dos casos.

a) La variable está acotada inferiormente

$x_i \geq L_i$ con $L_i < 0$ En este caso se reemplaza la variable en cuestión teniendo en cuenta que si $x'_i = x_i - L_i$ entonces $x'_i \geq 0$. El reemplazo será entonces $x_i = x'_i + L_i$. Por ejemplo, si en nuestro problema consideramos $L_i = -4$ resultaría el siguiente planteo.

Maximizar $z = x'_1 - 4 + 3x_2$

Sujeto a:

$x'_1 - 4 \leq 3$

$2x_2 \leq 8$

$2(x'_1 - 4) + 2x_2 \leq 10$

con $x'_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$

Una vez maximizada esta funcional para calcular el valor de la variable original $x_1$bastará hacer $x_1 = x'_1 - 4$.

b) La variable no está acotada

Esto es $-\infty \leq x_i \leq \infty$. La cuestión aquí es considerar dos variables positivas $x'_i \geq 0$ y $x''_i \geq 0$ de modo que resulte $x_i = x''_i - x'_i$ y así representar adecuadamente todos los valores posibles de x_i. Es decir en el planteo del problema corresponderá hacer ese reemplazo al inicio y resolver según el procedimiento simplex usual, cuidando de que al terminar se calcule el valor de x_i a partir de los valores hallados para las variables auxiliares.

II.6 Sensibilidad y Dualidad

II.6.1 Introducción

Con el cuadro simplex final a la mano, se tiene la suficiente información no solo sobre la o las soluciones que producen el óptimo de la funcional lineal, sino también sobre como calcular el efecto de la modificación de algún recurso sobre esa solución y sobre el valor óptimo hallado. Esos cálculos constituyen el llamado análisis de sensibilidad. Por otro lado, la teoría matemática de dualidad a veces resulta muy útil a efecto de resolver problemas, llamados duales, que tienen significación real en la actividad de un sistema modelado en términos de programación lineal. Ocurre que al calcularse la solución óptima de un problema de este tipo se obtiene también la solución óptima de otro llamado su dual.

II.6.2 Sensibilidad

Realizar un análisis de sensibilidad significa, en general, estudiar la respuesta de un modelo en función de pequeñas modificaciones en sus parámetros. En el caso del modelo de programación lineal hay involucrados tres tipos de parámetros: los coeficientes de costos (o de beneficios) que multiplican a las variables en la funcional lineal objetivo, los segundos miembros de cada una de las inecuaciones que dan cuenta de la limitación de recursos y los coeficientes que en cada restricción indican cuantas unidades del recurso se requieren por cada unidad de las variables de interés. Nos concentraremos en la variación de los recursos que suele ser el punto más importante de este análisis. El cuadro simplex final contiene toda la información necesaria para realizar este estudio según a continuación veremos.

1- Precio sombra

Un incremento (o decremento) de alguno de los recursos altera seguramente el valor óptimo hallado. Hay básicamente dos tipos de situaciones que pueden presentarse: esa variación altera el valor óptimo, pero no los coeficientes hallados para el renglón 0 del cuadro simplex final que lo realiza, o también los modifica. Analizaremos ahora el primer caso. La Gráfica 3 muestra la solución alcanzada para el problema original planteado en II.1

Gráfica 3

Supongamos ahora que el recurso 2, m^2 de madera de roble, aumentara en una unidad. Es decir que hubiera disponibles 9 m^2 de madera de roble. El problema quedaría formulado ahora:

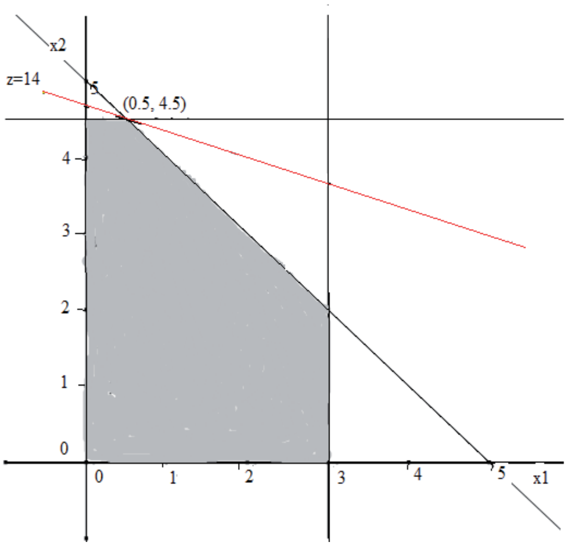
Maximizar $z = x_1 + 3x_2$

Sujeto a:

$$x_1 \leq 3$$
$$2x_2 \leq 9$$
$$2x_1 + 2x_2 \leq 10$$

con $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$

Gráfica 4

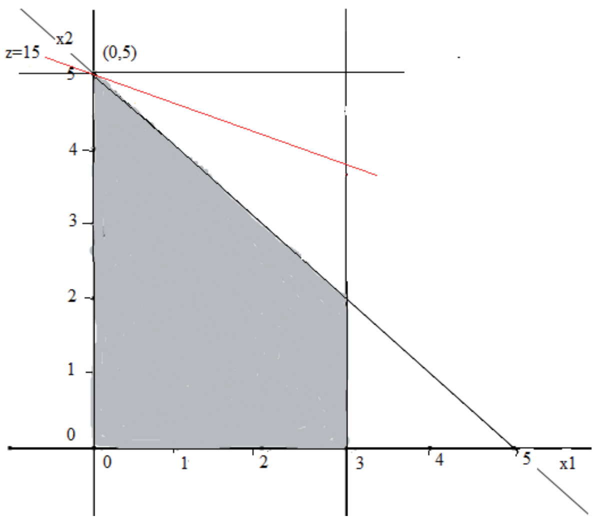


La Gráfica 4 muestra como varía la región de soluciones factibles y cuál es el nuevo vértice que realiza un nuevo óptimo. Resulta $z = 14$ y el punto que realiza ese valor es el vértice (0.5,4.5). Más allá de que sea inviable fabricar media mesa de pino y cuatro mesas y media de roble está claro que al aumentar en una unidad el recurso 2 la funcional objetivo alcanza un óptimo incrementado en 1 (100 pesos). En realidad, eso resulta anunciado en el renglón 0 del cuadro simplex final del problema original, en la columna correspondiente a la variable de holgura agregada a la restricción por limitación de ese recurso 2.

Variables Básicas	Número de Ecuación	Coef. de Z	Coef. de X_1	Coef. de X_2	Coef. de X_3	Coef. de X_4	Coef. De X_5	Segundo Miembro
Z	0	1	0	0	0	**1**	1/2	13
X_3	1	0	0	0	1	1/2	-1/2	2
X_2	2	0	0	1	0	1/2	0	4
X_1	3	0	1	0	0	-1/2	1/2	1

En efecto, este renglón 0 expresa la ecuación $z + 1x_4 + \frac{1}{2}x_5 = 13$ que como $x_4 = 0$ y $x_5 = 0$ por ser no básicas es directamente z = 13. Sin embargo, si dado este valor de z, el recurso 2 aumenta en 1, la variable de holgura valdría $x_4 = 1$ pues, según lo indica la restricción asociada, solo se gastaría $2x_2 = 2 \times 4 = 8$ y sobraría (holgaría) la unidad agregada del recurso. Por lo tanto, el nuevo valor de z se debe calcular como la suma del anterior más $1x_4 = 1$ resultando z = 14. En síntesis; se llama precio sombra, o costo de oportunidad, al valor del coeficiente de la variable de holgura correspondiente al recurso incrementado (o decrementado). Este precio sombra representa cuanto varía la funcional objetivo cuando el recurso varía en una unidad. Está claro entonces que si se aumenta en 2 m^2 la cantidad de madera de roble disponible, debiera calcularse el nuevo valor de z según $13 + 1 \times 2 = 15$. En este caso la solución encontrada tendría sentido fáctico pues, como se ve en la Gráfica 5, correspondería fabricar 0 mesas de pino y 5 mesas de roble.

Gráfica 5



2- **Sensibilidad según los recursos disponibles**

¿Hasta cuánto puede aumentarse, o decrementarse, un recurso sin que varíen las condiciones del problema? Es fácil averiguar esto a partir del cuadro simplex final. Como se ve a continuación la zona sombreada del cuadro final de nuestro ejemplo presentado en II. y 2, da cuenta de todas las transformaciones que el sistema original ha sufrido en las iteraciones hasta que se arribó a una solución óptima. Si se quisiera introducir una variación Δ en algún recurso, resultaría sencillo calcular que rango de valores podría tener de forma que el óptimo pudiera seguir siendo calculado desde el cuadro final obtenido.

Variables Básicas	Número de Ecuación	Coef. de Z	Coef. de X_1	Coef. de X_2	Coef. de X_3	Coef. de X_4	Coef. De X_5	Segundo Miembro
Z	0	1	0	0	0	1	0	13
X_3	1	0	0	0	1	1/2	-1/2	2
X_2	2	0	0	1	0	1/2	0	4
X_1	3	0	1	0	0	-1/2	1/2	1

Para fijar ideas supongamos que queremos averiguar el rango de variación posible para el recurso 2. Si en el problema original teníamos el vector columna $\begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$ de términos independientes las transformaciones sucesivas del sistema aplicadas sobre ellos resultan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + \frac{8}{2} - \frac{10}{2} \\ \frac{8}{2} \\ -\frac{8}{2} + \frac{10}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que es la solución hallada.
Sin embargo, si ahora se incrementara el segundo recurso en una cantidad Δ se tendría que la solución quedaría expresada en función de esta cantidad. Es decir;

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 8+\Delta \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + \frac{8+\Delta}{2} - \frac{10}{2} \\ \frac{8+\Delta}{2} \\ -\frac{8+\Delta}{2} + \frac{10}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + \frac{\Delta}{2} \\ 4 + \frac{\Delta}{2} \\ 1 - \frac{\Delta}{2} \end{bmatrix}$$

Cada componente del vector columna de la derecha será el valor de cada una de las variables x_3, x_2 y x_1 respectivamente, y tal valor deberá ser mayor o igual que 0 porque se ha partido de que las variables son no negativas. Siendo así el rango de valores admisible para Δ se calculará a partir de las inecuaciones:

$2 + \frac{\Delta}{2} \geq 0$, $4 + \frac{\Delta}{2} \geq 0$ y $1 - \frac{\Delta}{2} \geq 0$ que respectivamente arrojan

$\Delta \geq -4$, $\Delta \geq -8$ y $\Delta \leq 2$.
Entonces las tres desigualdades se cumplen para el rango de valores $-4 \leq \Delta \leq 2$. Esto quiere decir que si se dispone entre 4 y 10 m^2 de madera de roble los costos marginales serán los mismos y el valor del óptimo fluctuará entre 900 y 1500 pesos. Por supuesto las mesas de roble que será posible fabricar dependerán del valor del recurso m^2 de madera de roble disponible.

II.6.3 Dualidad

Todo problema de programación lineal tiene asociado, en términos matemáticos, otro problema que se denomina dual. Al plantear el problema que podemos llamar primal, implícitamente estamos también formulando su problema dual. Pero además cuando empleamos el procedimiento simplex en realidad estamos resolviendo ambos y la solución del problema de programación lineal dual también aparece en el cuadro correspondiente a la iteración final del algoritmo.

Comencemos por dar una formulación general del problema primal. La expresión

$[Max]\ \ z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ con

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{y}$$

$x_i \ge 0\ \forall i = 1, \dots, n$
simboliza en forma matricial el problema:

$[Max]\ \ z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$ con

$a_{11}x_1 + \cdots a_{1n}x_n \le b_1$
……
$a_{m1}x_1 + \cdots a_{mn}x_n \le b_m$ y

$x_1 \ge 0, \dots, x_n \ge 0$

En este problema suponemos que cada c_i es un coeficiente de costo (o beneficio) , que cada a_{ij} es la cantidad de recurso j-ésimo que insume una unidad de cada variable x_i, que las cantidades son tales que $b_j > 0$ y que las variables son no negativas. Es un problema de programación lineal dado en forma estándar que denominamos ahora problema primal. Definimos el problema dual como sigue:

$[min]\ \ y_0 = \sum_{j=1}^{m} b_j y_j$ con

$$(y_1 \quad \cdots \quad y_m) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \ge (c_1 \quad \cdots \quad c_n) \quad \text{y}$$

$\forall j = 1, \dots, m\ y_j \ge 0$

Construyamos ahora el problema dual del ejemplo de II.1 con el que venimos trabajando.

Problema Primal
$[Max]\ z = x_1 + 3x_2$
$x_1 \le 3$
$2x_2 \le 8$
$2x_1 + 2x_2 \le 10$
$x_1 \ge 0$ y $x_2 \ge 0$

Problema Dual
$[min]\ \ y_0 = 3y_1 + 8y_2 + 10y_3$
$y_1 + 2y_3 \ge 1$
$2y_2 + 2y_3 \ge 3$
$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0$ e $y_3 \ge 0$

El algoritmo al mismo tiempo que arriba al valor z máximo, llega al mínimo de y_0. Es decir; Max z = min y_0 Además en el cuadro simplex final del problema primal encontramos los valores de las variables del dual que realizan el mínimo. Estos valores de las variables duales y_j no son otra cosa que los coeficientes de las variables de holgura en el renglón 0 del cuadro.

Variables Básicas	Número de Ecuación	Coef. de Z	Coef. de X_1	Coef. de X_2	Coef. de X_3	Coef. de X_4	Coef. De X_5	Segundo Miembro
Z	0	1	0	0	0	1	1/2	13
X_3	1	0	0	0	1	1/2	-1/2	2
X_2	2	0	0	1	0	1/2	0	4
X_1	3	0	1	0	0	-1/2	1/2	1

Por lo tanto $y_1 = 0, y_2 = 1$ e $y_3 = 1/2$ que minimizan la funcional objetivo del dual
$y_0 = 3 \times 0 + 8 \times 1 + 10 \times \frac{1}{2} = 13$

En suma, los precios sombra son las soluciones del problema dual. La teoría matemática de dualidad tiene sus complejidades, pero a efecto de nuestra exposición solo nos interesará su aplicación en algunos casos, como veremos más adelante.

II.7 Problemas Especiales

II.7.1 Introducción

Ciertos problemas de programación lineal tienen una forma tal que pueden ser resueltos por procedimientos abreviados. Estos requieren un número sustancialmente menor de operaciones que las que emplea el método Simplex en su versión original. Tal es el caso de los problemas llamados de transporte cuyas inecuaciones, como veremos, tienen una disposición de los coeficientes no nulos que facilita y disminuye la cantidad de cuentas a realizar para obtener el óptimo de la funcional. También el llamado problema de asignación puede a su vez ser visto como una variante del problema de transporte. Veamos para comenzar un ejemplo.

Una empresa debe transportar su producción que elabora en las plantas I, II y III a los destinos A, B y C. El costo en miles de pesos de transportar una unidad del producto desde cada planta a cada destino se conoce, así como también la oferta de cada planta y la demanda de cada destino. Además, en este caso, las sumas de ofertas y de demandas coinciden. La información está resumida en la siguiente tabla:

Planta/Destino	A	B	C	Oferta en unidades
I	2	1	3	5
II	2	3	1	6
III	1	2	1	4
Demanda en unidades	7	3	5	15

Como se suponen directamente proporcionales las relaciones entre las distintas cantidades, para conocer la cantidad de unidades de producto que deben transportarse de cada planta a cada destino, de modo que el costo sea mínimo, se planteará un modelo de programación lineal.

$[\min]\ z = 2x_{11} + x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + 3x_{22} + x_{23} + x_{31} + 2x_{32} + x_{33}$
sujeto a:

$$\begin{array}{lllr} x_{11} + x_{12} + x_{13} & & & = 5 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} & & = 6 \\ & & x_{31} + x_{32} + x_{33} & = 4 \end{array}$$

y a:

$$\begin{array}{lllllllllr} x_{11} + & & & x_{21} + & & & x_{31} & & & = 7 \\ & x_{12} + & & & x_{22} + & & & x_{32} & & = 3 \\ & & x_{13} + & & & x_{23} + & & & x_{33} & = 5 \end{array}$$

con $x_{ij} \geq 0\ \ i = 1,2,3\ \ \ j = 1,2,3$

En términos generales entonces un problema de transporte tiene la forma:

$[\min] \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$
donde c_{ij} son los coeficientes de costos y x_{ij} las variables que indican la cantidad de transportes entre cada origen i y cada destino j

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i$
con $s_i\ \ i = 1, \dots m$ restricciones de origen
$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j$
con $d_j\ \ j = 1, \dots n$ restricciones de destino

$x_{ij} \geq 0\ \ i = 1, \dots, m\ \ \ j = 1, \dots, n$ restricciones de no negatividad

En este contexto se cumplen las siguientes dos condiciones:

Propiedad 1: Si s_i y d_j son cantidades enteras las variables básicas son también enteras.

Propiedad 2: $\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{m} d_j$ la suma de las ofertas es igual a la suma de las demandas.

II.7.2 Algoritmo Simplex de Transporte

Un problema de transporte tiene, como está a la vista, diferencias con lo que consideramos el problema estándar a partir del cual funciona el método simplex tal cual lo vimos. Para empezar, hay que minimizar la funcional objetivo, pero además, las restricciones son igualdades lo que devendría en el agregado de tantas variables artificiales como cantidad de restricciones por limitación de recursos haya. Afortunadamente la complicación que las modificaciones necesarias supondrían en las cuentas se ve allanada por la particular disposición de los coeficientes en el sistema lineal resultante que en el ejemplo de II.7.1 es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} 111 & 000 & 000 \\ 000 & 111 & 000 \\ 000 & 000 & 111 \\ 100 & 100 & 100 \\ 010 & 010 & 010 \\ 001 & 001 & 001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \\ 7 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Es esta disposición que se da en cualquier problema de transporte y la cantidad de ceros presentes la que permite abreviar el procedimiento. Así el cálculo se reduce a modificaciones que pueden seguirse observando solo lo que ocurre en el renglón 0 del cuadro original. Su aspecto general en cualquier iteración, y no ya para el ejemplo solamente, es el que sigue.

V. Básica	Ec N°	Coeficientes de				Segundo Miembro
		z	x_{ij}	z_i	z_{m+j}	
z	0	-1	$c_{ij}-u_i-v_j$	$M-u_i$	$M-v_j$	$-\sum s_i u_i - \sum d_i v_j$

Expliquemos:

-1 es el coeficiente de z pues se trata de una minimización.

M es un número muy grande colocado para que las variables artificiales $z_1, \cdots z_n, z_{n+1}, \cdots z_{n+m}$, que se utilizarían en virtud de cada restricción de igual, deban ser 0 cuando se alcance el óptimo.

u_i es el múltiplo del renglón i-ésimo original que se restó del renglón 0 original durante el paso iterativo respectivo con $i = 1, \dots, m$

v_j es el múltiplo del renglón m+j-ésimo original que se restó del renglón 0 original durante el paso iterativo respectivo con j=1 ,…, n

Cada variable x_{ij} tiene un coeficiente que es el original c_{ij} menos las cantidades u_i y v_j correspondiente a las respectivas iteraciones.

De acuerdo a lo expuesto resulta que:

- i- El simplex de transporte no requiere las variables artificiales para construir la solución factible inicial
- ii- Se puede usar sólo el renglón 0 en cada iteración calculando directamente los valores de u_i y v_j. Como la variable básica debe tener coeficiente 0 en el renglón 0, estos valores se encuentran resolviendo el sistema de ecuaciones: $c_{ij} - u_i - v_j = 0 \quad \forall i, j \; tal \; que \; x_{ij}$ es básica.
- iii- La variable básica que sale a no básica en cada iteración se puede identificar en forma sencilla.

Estas características nos llevan a considerar el cuadro simplex de transporte de la siguiente forma:

		Destino					
Origen		1	2	…	n	Oferta	u_i
	1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	s_1	
	2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	s_2	
	…	…	…	…	…	…	
	m	c_{m1}	c_{m2}		c_{mn}	s_m	
	Demanda	d_1	d_2	…	d_n		
	v_j						

Hay información adicional que se carga en cada celda. Si la variable x_{ij} es básica se anota su valor en el círculo respectivo del cuadro de la izquierda. Si en cambio es no básica de calcula el valor de su coeficiente en el renglón 0 según se ve en el cuadro a derecha.

C_{ij}	
	X_{ij}

C_{ij}	
$C_{ij} - u_i - v_j$	

A continuación, se analizan los pasos del procedimiento simplex de transporte.

1- Paso inicial

El objetivo es obtener una solución básica factible inicial. Se observa que el número de variables básicas es m+n-1 pues si se cumple ese número de restricciones de igualdad la restante también se cumple. Hay una restricción redundante. Por ejemplo, en nuestro problema de II.7.1 habrá cinco variables básicas a asignar. Empleando la llamada regla de la esquina noroeste se hace la asignación primera en la variable correspondiente a la posición arriba a la izquierda. Se debe observar que la asignación no supere ni la oferta disponible en la fila, ni la demanda requerida en la columna. Así se procede cubriendo la oferta de una fila hasta acabarla en las distintas columnas y luego se cambia a la fila de abajo. Se completan las asignaciones hasta que se obtiene la primera solución factible. Como se ve en el cuadro la primera solución que se obtiene es:

$$(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}) = (5,0,0,2,3,1,0,0,4)$$

Las variables que son básicas tienen coeficiente 0 en el renglón 0, mientras que el valor del coeficiente de las variables no básicas, que valen 0, se calculan mediante la cuenta c_{ij}-u_i-v_j = 0 respectiva.

		DESTINO				
		1	2	3	Oferta	u_i
ORIGEN	I	2 5	1 $1-0-3$ $=-2$	3 $3-0-1$ $=2$	5	0
	II	2 2	3 3	1 1	6	0
	III	1 $1-0-2$ $=-1$	2 $2-0-3$ $=-1$	1 4	4	0
	Demanda	7	3	5		
	v_j	2	3	1		

2- Prueba de optimalidad

Si en el renglón 0 hay coeficientes que son negativos sabemos que no se ha alcanzado el óptimo. Para conocer los valores de esos coeficientes hay que tener en cuenta que surgirán de la operatoria entre filas del sistema según la cuenta c_{ij}-u_i-vj=0 que corresponde a los coeficientes de las variables básicas. Se conforma así un sistema de m+n-1 ecuaciones, en este caso 5, con m+n incógnitas, en nuestro ejemplo 6. Por lo tanto, habrá un grado de libertad y podrá fijarse arbitrariamente el valor de una de las variables para deducir entonces los otros valores. En nuestro ejemplo:

$u_1 + v_1 = 2$
$u_2 + v_1 = 2$
$u_2 + v_2 = 3$
$u_2 + v_3 = 1$
$u_3 + v_3 = 1$

Haciendo $u_2 = 0$ se obtiene el resto de los valores que figuran en la tabla de arriba. Al calcular con ellos los valores de los coeficientes de las variables no básicas en el renglón 0 se ve que todavía hay negativos y por lo tanto no se ha alcanzado el mínimo de la funcional.

3- Paso Iterativo

Como en el procedimiento original aquí también elegimos el coeficiente negativo de mayor valor absoluto para seleccionar la variable que entrará como básica. A su vez, para seleccionar la variable que sale a no básica hay que atender a una reacción en cadena. Habrá celdas receptoras para las cuales los valores de las variables aumentan y celdas donadoras donde las variables disminuirán. La celda donadora que primero llegue a 0 será la correspondiente a la variable que sale a no básica. Sigamos con el ejemplo.

		DESTINO				
		1	2	3	Oferta	u_i
ORIGEN	I	2 5	1 $1-0-3$ $=-2$	3 $3-0-1$ $=2$	**5**	0
	II	2 2	3 3	1 1	**6**	0
	III	1 $1-0-2$ $=-1$	2 $2-0-3$ $=-1$	1 4	4	0
	Demanda	**7**	**3**	**5**		
	v_j	2	3	1		

La celda correspondiente a la variable x_{12} contiene el coeficiente negativo de mayor valor absoluto. Luego será esa variable la que entre como básica. Es decir, tendrá que incrementarse desde el valor actual 0, recibiendo valor. Para ello la celda de la variable x_{11} tendrá que perderlo, por lo cual será un celda donadora. Pero lo que se ceda y reciba en esa fila deberá sumar 5 que es el valor de la oferta del origen I. Esto a su vez conlleva a que, para mantener el valor de la demanda en 7, la celda de la variable x_{21} reciba valor que donará la celda de x_{22} siempre manteniendo los equilibrios de ofertas y demandas. En ese mecanismo de donación y recepción de a una unidad la variable x_{22} será la primera que se haga 0 y por lo tanto saldrá como no básica en esta iteración. El cuadro actualizado resulta entonces el de abajo donde figuran también los nuevos valores calculados para los u_i y los v_j y también han sido identificadas las nuevas celdas receptoras y donadoras junto con la variable x_{33} que saldrá a no básica y la x_{31}que entrará como básica.

		DESTINO				
		1	2	3	Oferta	u_i
ORIGEN	I	2 2	1 3	3 2	**5**	0
	II	2 5	3 1	1 1	**6**	0
	III	1 -1	2 0	1 4	4	0
	Demanda	**7**	**3**	**5**		
	v_j	2	1	1		

El siguiente cuadro muestra la última iteración donde ya no hay coeficientes negativos en el renglón 0 y por lo tanto se ha arribado al mínimo valor para la funcional z.

		DESTINO				
		1	2	3	Oferta	u_i
ORIGEN	I	2 2	1 3	3 2	**5**	0
	II	2 1	3 2	1 5	**6**	0
	III	1 4	2 1	1 0	4	0
	Demanda	**7**	**3**	**5**		
	v_j	2	1	1		

La solución que minimiza la funcional es entonces $(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}) = (2,3,0,1,0,5,4,0,0)$
El valor mínimo de z es $z = 2 \times 2 + 3 + 2 \times 1 + 5 + 4 = 18$

Ejercicios resueltos

Ejercicio N°1- Resolver en forma gráfica el problema:

[Max] $Z = x + y$
$3x + 2y \leq 6$
$2x + 3y \leq 6$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

$3x + 2y \leq 6$
$2y \leq 6 - 3x$
$y \leq 3 - \frac{3}{2}x$

$2x + 3y \leq 6$
$3y \leq 6 - 2x$
$y \leq 2 - \frac{2}{3}x$

Realizamos el grafico acotado para el análisis, y observamos que para obtener un z optimo debemos hallar el punto máximo (x,y), el cual en este caso, es el punto de intersección entre ambas rectas.

$3 - \frac{3}{2}x = 2 - \frac{2}{3}x$

$-\frac{5}{6}x = -1$

$x = 1,2$

$y = 3 - \frac{3}{2}(1,2)$

$y = 1,2$

Entonces el punto de intersección es $P = (1,2\ ;\ 1,2)$ y finalmente

$z = x + y$
$z = 1,2 + 1,2$
$z = 2,4$

Ejercicio N° 2- Plantear el problema de programación lineal adecuado y resolver utilizando el método simplex.

Una persona acaba de heredar \$6000 y desea invertirlos. Al oír esta noticia dos amigos distintos le ofrecen oportunidad de participar como socio en dos negocios, cada uno planeado por cada amigo. En ambos casos, la inversión significa dedicar un poco de tiempo el siguiente verano, al igual que invertir efectivo. Con el primer amigo al convertirse en socio completo tendría que invertir \$5000 y 400 horas, y la ganancia estimada (ignorando el valor del tiempo) sería de \$4500. Las cifras correspondientes a la proposición del segundo amigo son \$4000 y 500 horas, con una ganancia estimada de \$4500.Sin embargo ambos amigos son flexibles y le permitirían entrar con cualquier fracción de la sociedad; la participación en las utilidades sería proporcional a esa fracción. Como de todas maneras esta persona está buscando un trabajo interesante para el verano (600 horas a lo sumo), ha decidido participar en una o ambas propuestas, con la combinación que maximice la ganancia total estimada. Es necesario resolver el problema de obtener la mejor combinación.

x_1: Proporción de participación a la proposición el primer amigo
x_2: Proporción de participación a la proposición del segundo amigo
Restricción por limitación de dinero disponible (en \$): $5000x_1 + 4000.x_2 \leq 6000$
Restricción por limitación de horas disponibles (en hs): $400.x_1 + 500.x_2 \leq 600$
Restricciones de proporción: $x_1 \leq 1$, $x_2 \leq 1$
Restricciones de no-negatividad: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$
Funcional lineal: (\$): $z = 4500x1 + 4500x2$
Entonces procedemos a realizar el método simplex: por ende, debemos llevar el problema a la forma de un sistema lineal, para ello se dispone la función objetivo(Z) colocando todas las variables en el mismo miembro de la igualdad y las inecuaciones, excepto las de no negatividad, se transforman en ecuaciones lineales agregando la variable de holgura.

$$z - 4500x_1 - 4500x_2 \qquad\qquad\qquad = 0$$
$$5000x_1 + 4000.x_2 + x_3 \qquad\qquad = 6000$$
$$400x_1 + 500.x_2 \qquad + x_4 \qquad = 600$$
$$x_1 + \qquad\qquad\qquad x_5 \quad = 1$$
$$x_1 + \qquad\qquad\qquad x_6 = 1$$

Además $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

	Número de Ecuación	Coef. de z	Coef. de x_1	Coef. de x_2	Coef. de x_3	Coef. de x	Coef. de x_5	Coef. de x_6	S M
z	0	1	-4500	-4500	0	0	0	0	0
x_3	1	0	5000	4000	1	0	0	0	6000
x_4	2	0	400	500	0	1	0	0	600
x_5	3	0	1	0	0	0	1	0	1
x_6	4	0	0	1	0	0	0	1	1

Se observa que la solución planteada no es la óptima ya que por lo menos existe un Xi (en este caso lo son X_1 y X_2)negativo, por lo tanto, se procede a hallar la nueva solución:
Identificamos la columna y fila pivote con determinado criterio:

	Número de Ecuación	Coef. de z	Coef. de x_1	Coef. de x_2	Coef. de x_3	Coef. de x	Coef. de x_5	Coef. de x_6	S M
z	0	1	-4500	-4500	0	0	0	0	0
x_3	1	0	5000	4000	1	0	0	0	6000
x_4	2	0	400	500	0	1	0	0	600
x_5	3	0	1	0	0	0	1	0	1
x_6	4	0	0	1	0	0	0	1	1

Realizamos nuestro nuevo cuadro al llevar a 0 los elementos de la columna pivote. Obtenemos una nueva fila x_3 que ahora será nombrada x_1 (dividimos todos sus elementos por 5000). Entonces nuestra nueva ecuación 1 será utilizada para pivotear y obtener las nuevas ecuaciones 0,2,3 y 4
Para obtener nueva ecuación 0 [(elemento fila 0) +4500 x elemento de la nueva ecuación 1]
Para obtener nuestra nueva ecuación 2: [(elemento de ecuación 2) – 400 x elemento nueva ecuación 1]
Para obtener nuestra nueva ecuación 3 [(elemento de ecuacion3 – 1 x elemento nuevo ecuación 1]
No hará falta pivotear la ecuación 4 ya el elemento correspondiente a la columna pivote es igual a 0

Queda así:

	Número de Ecuación	Coef. de z	Coef. de x_1	Coef. de x_2	Coef. de x_3	Coef. de x	Coef. de x_5	Coef. de x_6	S M
z	0	1	0	-900	0,9	0	0	0	5400
x_1	1	0	1	0,8	0,0002	0	0	0	1,2
x_4	2	0	0	180	-0,08	1	0	0	120
x_5	3	0	0	-0,8	-0,0002	0	1	0	-0,2
x_6	4	0	0	1	0	0	0	1	1

Como observamos que hay un coeficiente negativo en el renglón 0. La solución no es todavía óptima. Se identifican nuevamente columna y fila pivote, y se realizan los cálculos. Se obtiene:

	Número de Ecuación	Coef. de z	Coef. de x_1	Coef. de x_2	Coef. de x_3	Coef. de x	Coef. de x_5	Coef. de x_6	S M
z	0	1	0	0	0,5	5	0	0	6000
x_1	1	0	1	0	1/1800	-1/225	0	0	2/3
x_2	2	0	0	1	-1/2250	1/180	0	0	2/3
x_5	3	0	0	0	-1/1800	1/225	1	0	1/3
x_6	4	0	0	0	1/2250	-1/180	0	1	1/3

Entonces la solución óptima es $(x_1; x_2; x_3; x_4: x_5: x_6) = (\frac{2}{3}; \frac{2}{3};\ 0;\ 0; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ con z=6000$. Esto quiere decir que la mejor opción para optimizar la utilidad será participar en un 66,67% de cada propuesta.

Ejercicio N°3- Dado el problema de programación lineal

$$z = 2x_1 + 3x_2 \quad [\text{Max}] \text{ sujeto a}$$
$$2x_1 \leq 4$$
$$x_2 \leq 3$$
$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

a- Determinar el valor de z óptimo si el recurso correspondiente a la tercera inecuación aumenta en una unidad.

El cuadro simplex final resulta:

	VBásica	z	x1	x2	x3	x4	x5	SM
0	z	1	0	0	0	1	2	11
1	x3	0	0	0	1	2	-2	2
2	x2	0	0	1	0	1	0	3
3	x1	0	1	0	0	-1	1	1

$z = 1,\ x_1 = 1$ y $x_2 = 3$

El coeficiente en el renglón 0 correspondiente a la variable de holgura en la inecuación sobre el tercer recurso es 2 por lo tanto al aumentar en una unidad el recurso la funcional crece en 2. Es decir, $z = 11 + 2 = 13$

b- Hallar el intervalo de variación del recurso correspondiente a la tercera inecuación de modo que el precio sombra obtenido no varíe.

	VBásica	z	x1	x2	x3	x4	x5	SM
0	z	1	0	0	0	1	2	11
1	x3	0	0	0	1	2	-2	2
2	x2	0	0	1	0	1	0	3
3	x1	0	1	0	0	-1	1	1

Los coeficientes de la zona sombreada en el cuadro final revelan todas las transformaciones realizadas entre filas. Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 + \Delta b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + 6 - 8 - 2\Delta b_3 \\ 3 \\ -3 + 4 + \Delta b_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$2 - 2\Delta b_3 \geq 0$

$1 + \Delta b_3 \geq 0$

Es decir; $-1 \leq \Delta b_3 \leq 1$

Con la tabla actual podemos agregar o quitar una unidad sin que varíe el precio sombra

Ejercicio N°4- Una empresa productora de tractores tiene 4 centros de comercialización que demandan respectivamente 300, 100, 250 y 150 unidades por año. La producción se hará coincidir con la demanda. En el mercado hay tres empresas que pueden transportar los tractores. Los costos de cada una para cada traslado se presentan en la siguiente tabla.

	D1	D2	D3	D4
E1	30	25	50	60
E2	45	20	60	90
E3	50	30	75	70

Determinar qué compañía conviene contratar para cada destino, si la capacidad máxima de transporte de cada una de ellas es: E1 150; E2 300; E3 350.

¿Cuál es el costo total?

	D1	D2	D3	D4	Oferta
E1	30	25	50	60	150
E2	45	20	60	90	300
E3	50	30	75	70	350
Demanda	300	100	250	150	800

		DESTINO					
		1	2	3	4	Oferta	u_i
ORIGEN	I	30 150	25 $25+15-20$ $=20$	50 $50+15$ $-60=5$	60 $60+15-55$ $=20$	150	-15
	II	45 150	20 100	30 50	90 $90-0-55$ $=35$	300	0
	III	50 $50-15-45$ $=-10$	30 $30-15-20$ $=-5$	75 200	70 150	350	15
	Demanda	300	100	250	150		
	v_j	45	20	60	55		

$Z_0 = 41.750$

1)

		DESTINO					
		1	2	3	4	Oferta	u_i
ORIGEN	I	30 150	25	50	60	150	-15
	II	45	20 100	30 200	90	300	0
	III	50 150	30	75 50	70 150	350	1
	Demanda	300	100	250	150		
	v_j	45	20	60	55		

$Z_1 = 40.250$

2)

		DESTINO					
		1	2	3	4	Oferta	u_i
ORIGEN	I	30 150	25 $25 + 20 - 35 = 10$	50 $50 + 20 - 75 = -5$	60 $60 + 20 - 70 = 10$	150	-20
	II	45 $45 + 15 - 50 = 10$	20 100	30 200	90 $90 + 15 - 70 = 35$	300	-15
	III	50 150	30 $30 - 0 - 35 = -5$	75 50	70 150	350	0
	Demanda	300	100	250	150		
	v_j	50	35	75	70		

		DESTINO					
ORIGEN		1	2	3	4	Oferta	u_i
	I	30 150	25	50	60	150	-20
	II	45	20 50	30 250	90	300	-15
	III	50 150	30 50	75	70 150	350	0
	Demanda	300	100	250	150		
	v_j	50	35	75	70		

$Z_2 = 40.000$

3)

		DESTINO					
ORIGEN		1	2	3	4	Oferta	u_i
	I	30 150	25 $25 + 20 - 30 = 15$	50 $50 + 20 - 70 = 0$	60 $60 + 20 - 70 = 10$	150	-20
	II	45 $45 + 10 - 50 = 5$	20 50	30 250	90 $90 + 10 - 70 = 30$	300	-10
	III	50 150	30 50	75 $75 - 0 - 70 = 5$	70 150	350	0
	Demanda	300	100	250	150		
	v_j	50	30	70	70		

La solución que minimiza la funcional es entonces

$(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}) = (150,0,0,0,0,50,250,0,150,50,0,150)$

El valor mínimo de z es $z = 30 \times 150 + 20 \times 50 + 30 \times 250 + 50 \times 150 + 30 \times 50 + 70 \times 150 = 40.000$

Ejercicios propuestos

Ejercicio N° 5- Resolver en forma gráfica los siguientes problemas:

a) [Max]

$z = x + \frac{3}{2} y$

$3x + 2y \leq 6$

$2x + 3y \leq 6$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

b) [Min]

$z = x + y$

$3x + 2y \leq 6$

$2x + 3y \leq 6$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

c) [Max]

$\frac{1}{10} x + y = z$

$-x + 2y \leq 2$

$3x + 5y \leq 15$

$x = 4$

Ejercicio N° 6- Una compañía manufacturera descontinuó la producción de cierta línea de productos no redituable. Esto creo un exceso considerable en la capacidad de producción. La gerencia quiere dedicar esta capacidad a una o más de tres productos, llámese productos 1, 2 y 3. En la siguiente tabla se resume la capacidad disponible de cada maquina que puede limitar la producción:

Tipo de maquina	Tiempo disponible (en horas-maquina por semana)
Fresadora	500
Torno	350
Rectificadora	150

El número de horas máquina que se requiere para cada producto es:

Coeficiente de productividad (en horas-maquina por unidad)

Tipo de maquina	Producto 1	Producto 2	Producto 3
Fresadora	9	3	5
Torno	5	4	0
Rectificadora	3	0	2

El departamento de ventas ha indicado que las ventas potenciales para los productos 1 y 2 exceden la tasa máxima de producción y que las ventas potenciales del producto 3 son 20 unidades por semana. La ganancia unitaria sería de $50, $20 y $25, respectivamente, para los productos 1, 2 y 3. El objetivo es determinar cuantos productos de cada tipo debe producir la compañía para maximizar la ganancia.

Ejercicio N° 7- Plantear el modelo de Programación lineal adecuado.

a) Un fabricante entrega sus productos en cajas de un kilogramo en dos variedades, A y B. La caja tipo A, contiene 300 gramos de bombones de licor, 500 gramos de bombones de nuez y 200 gramos de bombones de fruta. La caja tipo B contiene 400 gramos, 200 gramos y 400 gramos de cada tipo de bombón, respectivamente.
La utilidad por cada caja de tipo A es de $120, y por caja de tipo B es de $90.
El fabricante dispone de 100 kilogramos de licor, 120 kilogramos de bombones de nuez, y 100 kilogramos de bombones de fruta.
Se pide definir la cantidad de cajas de cada tipo que debe armar en esta situación, para que su beneficio sea máximo.

b) Un fraccionador de whisky importa el licor en tres distintas graduaciones, A, B y C. Mediante la mezcla de estos de acuerdo a sus formulas, se obtienen los whiskys de calidades comercializables Escocés, Kilt y Tartan.
Las citadas fórmulas especifican las siguientes relaciones entre los elementos a mezclar:

Marca	especificación	Precio de venta0 ($/litro)
Escocés	No menos del 60% de A No más del 20% de C	680
Kilt	No mas del 60% de C No mas del 15% de A	570
Tartan	No mas del 50% de C	450

Se conoce asimismo las disponibilidades y precios de los licores a, B y C, que se indican en el siguiente cuadro:

Tipo	Litros disponibles	Precio de costo ($/litro)
A	2000	200
B	2500	150
C	1200	250

Se desea definir la composición de cada marca para maximizar el beneficio total.

c) Una empresa se dedica al pintado y montaje de heladeras, lanzando el mercado tres tipos diferentes: A, B, y C
Existen distintos proveedores para las diversas partes de la heladera: motor, circuitos eléctricos, elementos plásticos, gabinete, etc. Pueden comprarse gabinetes sin pintar o

pintados; estos últimos son un recargo de \$2300/gab., para las heladeras A y B, y de las heladeras \$3,500/gab para las heladeras C.
Los talleres de la empresa pueden montar 100 unidades A, y 80 unidades B, y 40 unidades C por mes, y tienen una capacidad de pintura de 60 heladeras por mes, independientemente del tipo de la misma. Los costos de pintura son de \$1800/gab. A, \$2000/gab. B y \$3000/gab. C. Existen contratos firmados para entregar mensualmente 30 unidades A y 20 unidades B. Asimismo se conocen la cantidad demandada máxima de heladeras C, que es 10 por mes.
La utilidad que tienen la empresa por tipo de heladera cuando realiza el proceso de pintura en sus talleres , es de \$15000/heladera A, \$20000/heladera B y \$3 5000/heladera C.
Se desea determinar el plan de producción que maximice el beneficio.

d) Un criador de animales de raza debe regular la dieta alimenticia de estos ajustándose a lo prescrito por el informe veterinario. Este indica las cantidades mínimas y/o máximas de tres componentes nutritivos que deben suministrarse diariamente, a cada animal, según el siguiente detalle:
Componente “A”: Como mínimo 150 gr/día y no más de 400 gr/día.

Componente “B”: Como máximo 800 gr/día.

Componente “C”: No menos de 350 gr/día.

Esta dieta debe lograrse por medio de tres tipos de alimentos cuya composición nutritiva, costo unitario y disponibilidad diaria se conocen. Se sabe asimismo que la cantidad diaria total de alimentos a suministrar a cada animal no debe exceder de 10 Kgs. Se desea establecer la cantidad de cada elemento que debe proporcionarse diariamente a cada animal de modo de minimizar el costo total diario de alimentación.
Plantear el sistema de inecuaciones que permiten resolver el problema.

Composición de los alimentos.
(gramos del componente/Kg de alim.)

	Alimento I	Alimento II	Alimento III
Componente “A”	50	----	100
Componente “B”	200	150	40
Componente “C”	80	60	120
Disponib. diaria de alimento (Kg/día*animal)	3	5	8
Costo unitario (\$/KG)	120	80	200

Ejercicio N° 8- Resolver utilizando el método simplex:

a) Maximizar $Z = 2x_1 + 3x_2$ sujeto a :

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1 + x_2 = 3$$
$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

b) Maximizar $Z = - x_1 + 4x_2$ sujeto a :

$$-3x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_2 \geq -3$$

c) minimizar $Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$ sujeto a:

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 6$$
$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0$$

Ejercicio N°9-

a) Construir el problema dual para los ejercicios 8 b) y 8 c)

b) Para el ejercicio 2 producir las variaciones en las disponibilidades que se indican a continuación y determinar en cada caso la nueva tabla final del Simplex.
Incrementar la disponibilidad de horas en 50
Disminuir la de dinero en \$600
Incrementar la de horas en 60
Disminuir la de dinero en \$750

c) Para el ejercicio 2 disminuir la ganancia de la primer propuesta de negocio en \$500 y observar como queda la tabla del Simplex. Hallar la nueva tabla óptima.

Ejercicio N° 10- Una empresa productora de combustible (Nafta especial) cuenta con 2 refinerías ubicadas en las ciudades A y B. Debe decidir la forma mas conveniente par trasladar su producción a los tanques de almacenamiento que se encuentran ubicados en las ciudades C, D, E y F. Las capacidades de producción son A : 400.000 barriles y B : 600.000 barriles. Las capacidades de almacenamiento son C : 200.000 barriles ; D : 300.000 barriles ; E : 200.000 barriles y F : 500.000 barriles.
Los costos de traslado en \$/barril aparecen en la siguiente tabla.

	C	**D**	**E**	**F**
A	0,10	0,05	0,07	0,09
B	0,05	0,11	0,08	0,07

Determinar la distribución óptima y el costo total involucrado.

Ejercicio N° 11- El entrenador de un equipo de natación debe asignar competidores para la prueba de 200 metros combinados por 50 metros en cada uno de los cuatro estilos. Debe formar entonces el equipo asignando un estilo a cada nadador de forma que la suma de tiempos sea potencialmente la menor. Para esto se basará en los tiempos de entrenamiento que registran los 5 mejores nadadores disponibles. Los tiempos son los siguientes:

	Carlos	Cristina	David	Antonio	José
Espalda	37.7	32.9	33.8	37.0	35.4
Pecho	43.4	33.1	42.2	34.7	41.8
Mariposa	33.3	28.5	38.9	30.4	33.6
Libre	29.2	26.4	29.6	28.5	31.1

Resolver.

Ejercicio N° 12- Una compañía fabrica dos productos. El producto A da una ganancia de 3 pesos por unidad y el B una de 4 pesos. Los requerimientos en términos de horas de trabajo por unidad de producto en cada una de las secciones de la empresa se presentan en la siguiente tabla:

Sección	Producto A	Producto B
1	1	2
2	3	1
3	2	3

Los supervisores de estas secciones han estimado que tienen las siguientes disponibilidades de horas de trabajo durante el próximo mes: 800 horas en la sección 1; 600 horas en la sección 2 y 2400 horas en la sección 3

a- Halle el plan de producción óptimo y la ganancia que arrojaría.
b- Cual es el precio sombra o costo marginal de la hora de trabajo en la sección 3.
c- Realizar el análisis de sensibilidad necesario para establecer el rango de variación posible para las horas de trabajo disponibles en la segunda sección.

Ejercicio N° 13- Un pequeño agricultor posee 100 hectáreas de tierra disponibles para cultivo. Por cada hectárea puede obtener un rinde de 2 toneladas de soja o 4 toneladas de trigo. Por cada tonelada de trigo obtendrá como ganancia 180$ y por cada tonelada de soja ganará 210 $. Dispone de 300 horas-hombre para realizar los trabajos de campo que en el caso de la tonelada de trigo o de soja requieren indistintamente una hora- hombre.

a) De acuerdo a estas restricciones de carácter lineal el agricultor desea saber cual es el plan de producción que maximizará sus ganancias.

b) Quiere también realizar un análisis de sensibilidad de la solución respecto de la cantidad de horas-hombre disponibles a efecto de determinar la máxima reducción posible de las mismas sin tener que replantear el problema.
c) Por último desea establecer en cuanto se incrementará la ganancia total por cada hectárea de cultivo que pueda agregar.

Ejercicio N° 14- En un taller metalúrgico se fabrican dos tipos de piezas, A y B, que deben seguir los siguientes procesos: estampado en hojas metálicas, soldado y pintado.
La operación de estampado consiste en preparar partes idénticas que luego serán soldadas de a pares, formando la pieza A. El mismo proceso se realiza para la pieza B. Los insumos de equipos son los siguientes, para la realización de cada una de las operaciones (expresados en segundos por pieza):

Operación	Pieza A	Pieza B	Tiempo disponible en seg/semana
Estampado de cada parte	3	8	48000
Soldado	12	6	42000
Pintado	9	9	36000

La utilidad unitaria es de \$4 para la pieza A y de \$3 para la pieza B.
a) Se desea establecer el programa semanal de producción que maximice la utilidad del taller con respecto a las piezas consideradas.
b) Si se agregan 1000 seg/semana para la operación de estampado ¿Cuál es la utilidad? Justifique la respuesta.

Ejercicio N° 15- Una compañía fabrica los perfumes Brute y Chanelle. Compra cada kg de materia prima para elaborar perfume en cualquiera de sus tipos a 3\$. Para procesar 1 kg de dicha materia prima se necesita 1 hora de laboratorio. Cada kg. de materia prima procesada rinde 3 litros de perfume Brute regular y 4 litros de perfume Chanelle regular El primero se vende a 7 \$ el litro y el segundo a 6 \$ el litro. A su vez la compañía tiene la opción de procesar estos perfumes en forma adicional para obtener Luxury Brute que se vende a 18 \$ el litro y Luxury Chanelle que se vende a 14 \$ el litro. Este segundo proceso tiene un costo adicional de 4\$ por litro y requiere 3 horas mas de laboratorio por litro en el caso del Luxury Brute y de 4\$ por litro y 2 horas mas por litro en el caso del Luxury Chanelle . La compañía tiene disponibles 6000 horas de laboratorio al año (cuyos costos se suponen ya incorporados al precio de venta) y puede comprar hasta 4000 kg de materia prima . Se desea entonces obtener el plan de producción que maximice las utilidades. Plantear el modelo necesario para hallarlo.

14. Impacto S.A. desea anunciar sus productos por radio y televisión. Cuenta con un presupuesto para publicidad de 10000\$ mensuales. Cada minuto de anuncio en radio cuesta 15\$ y en televisión cuesta 300\$. La idea es hacer por lo menos el doble de publicidad en radio que en televisión pero hay que tener en cuenta que no es bueno realizar más de 400 minutos de propaganda radial por mes. Se estima que la publicidad por televisión es 25 veces mas efectiva que por radio.

a) Determinar la asignación óptima de tiempos de publicidad por radio y televisión.
b) Calcular cuanto crece la efectividad publicitaria si puede agregarse un minuto de propaganda radial.
c) Si el presupuesto mensual aumentara a 15000$ cual sería la eficacia publicitaria resultante.

Ejercicio N°16- La compañía SiloTrans transporta granos desde tres silos hasta cuatro molinos. La oferta y la demanda (en camionadas) se resume en la tabla junto con los costos unitarios de transporte de cada silo a cada molino expresados en cientos de pesos. Se busca el programa de transporte entre silos y molinos que tenga costo mínimo.

Silo/molino	1	2	3	4	Oferta
1	10	2	20	11	15
2	12	7	9	20	25
3	4	14	16	18	10
Demanda	5	15	15	15	

Ejercicio N° 17- Un fabricante de rollos de cinta engomada produce cintas de 100 metros enrollados, cuyo ancho es 1 metro. Recibe pedidos de clientes por rollos de distinto ancho de forma que debe cortar los rollos de 1 metro para satisfacer las medidas requeridas por cada cliente. Recientemente le han hecho un encargo de 20 rollos de 60 cm de ancho, 35 rollos de 45cm de ancho y 50 rollos de 25 cm de ancho. Todos los rollos deberán contener 100 m de cinta. El fabricante se pregunta cómo cortar los rollos necesarios descartando la menor cantidad de papel. Resolver el problema por medio de programación lineal realizando el planteo del modelo y su optimización mediante software.

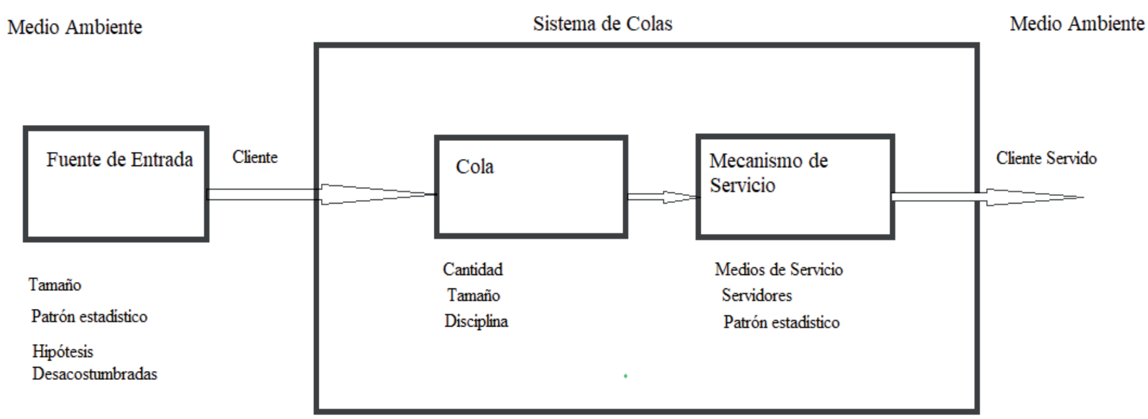
III- Teoría de Colas

III.1 Sistemas de Espera

La teoría de colas estudia y modela los sistemas de espera. Se entiende por tales sistemas a aquellos en los que un cliente, término técnico que pude referirse a personas u objetos según el contexto, ingresa desde el medio ambiente en una suerte de cola para esperar la realización de un servicio. Por ejemplo; una persona llega a una peluquería y espera hasta que le toca su turno para cortarse el pelo, luego se lo cortan y finalmente paga y sale del sistema. Una situación similar ocurre cuando un automóvil llega a un lavadero, cuando una trama de bits llega a un nodo de ruteo en una red y así, en un número grande de sistemas posibles.

El objetivo de la teoría es descriptivo e intenta evaluar algunos parámetros de comportamiento de un sistema de espera partiendo de la idea de que las actividades conformantes se representan por variables aleatorias. Estas variables adquieren sus valores con distinta probabilidad y poseen esperanzas matemática y varianzas. Las distribuciones de cada una de las variables se integran entonces para formar una variable de estado del sistema con su ley de probabilidad. Es a partir de esta nueva distribución que pueden calcularse los referidos parámetros tales como la cantidad esperada de clientes en el sistema o en la cola, o el tiempo esperado de permanencia en el sistema o en la cola, además de las propias probabilidades de que el sistema esté vacío, o de que haya en él una cantidad determinada de clientes.

Comenzaremos entonces por una descripción general de las entidades, atributos y actividades que integran el sistema y de aquellas que interactúan con él desde medio ambiente.



La figura muestra los elementos de interés. En el medio ambiente se ubica la Fuente de Entrada, que emite los clientes hacia el sistema de colas. Esta fuente puede ser de tamaño infinito, lo que quiere decir que tiene la capacidad de emitir clientes sin que estos se agoten o, por el contrario, puede ser finita. En tal caso la cantidad de clientes que debieran pasar por el sistema en algún momento se agotaría. Por supuesto, se trata de un esquema teórico por lo cual, si el número potencial de clientes fuese muy grande, la fuente podría pensarse o modelarse como de tamaño infinito, aunque esto no fuera estrictamente real. La fuente de entradas emite los clientes con un patrón estadístico. Esto quiere decir que se observa una estadística de la entrada de clientes en una dada unidad de tiempo y se utiliza su distribución de frecuencias como un patrón. Por ejemplo, se observa durante un mes la cantidad de compradores que entra por cada hora, de las 12 diarias, en que está abierto un supermercado. Se cuenta entonces la cantidad de horas en las que entró 0 clientes, la cantidad de horas en las que entró 1 cliente, la cantidad de horas en las que entraron 2 clientes y así. Se obtiene entonces una distribución de frecuencias que detalla lo ocurrido.

X = cantidad de clientes que entraron al supermercado en una hora. Variable estadística	F= cantidad de veces que entraron X clientes en una hora. Frecuencia Absoluta	f= cantidad de veces que entraron X clientes en una hora / total de horas de observación. Frecuencia relativa
0	F_0	$f_0 = \frac{F_0}{\sum_{i=0}^{k} F_i}$
1	F_1	$f_1 = \frac{F_1}{\sum_{i=0}^{k} F_i}$
2	F_2	$f_2 = \frac{F_2}{\sum_{i=0}^{k} F_i}$
…	…	…
k	F_k	$f_k = \frac{F_k}{\sum_{i=0}^{k} F_i}$

Esta es claramente una función dada por una tabla. Pero además es de gran importancia pues al ser todas las frecuencias absolutas $F_i \geq 0\ \forall i$, se verifica que $f_i \geq 0$ y también que $\sum_1^k f_i = 1$. De tal modo la tabla puede interpretarse también como una función de probabilidad. Es decir; en base a la estadística registrada se puede calcular la probabilidad de que en la próxima hora lleguen 3 clientes al supermercado, por ejemplo. Por supuesto una función dada por una tabla puede reemplazarse por una fórmula mediante un ajuste adecuado y por lo tanto este patrón estadístico de la fuente de entrada podrá expresarse mediante distribuciones discretas muy conocidas como la de Poisson, por ejemplo, en el caso en que esto corresponda. Esta variable aleatoria que representa la cantidad de clientes en la unidad de tiempo, está asociada a su recíproca que representa, en este caso, el tiempo que transcurre entre la llegada de dos clientes. Así la variable aleatoria tiempo tiene una distribución que también suele ser expresada por fórmulas, por ejemplo, la exponencial. Observemos que si decimos que se producen 30 llegadas por hora, $\frac{1}{30}$ horas/llegadas $=\frac{60}{30}$ minutos/llegadas= 2 minutos entre clientes. En suma, el patrón estadístico es en realidad doble. Por un lado proporciona la probabilidad de que arriben x clientes en una unidad de tiempo, y por otro da la probabilidad de que el tiempo que pase entre la llegada de dos clientes sea $\frac{1}{x}$. Digamos además que, a veces, puede ser necesario considerar alguna hipótesis no muy usual. Si se tratara de analizar un sistema de transporte público, podría muy bien ocurrir que un cliente, potencial pasajero de una línea de colectivos, se contrariara al llegar a la cola porque hay demasiada gente y renunciara a entrar en el sistema. Es decir, renunciara a viajar por ese medio. Si ese fuera un fenómeno frecuente, debiéramos tenerlo en cuenta como hipótesis posible al elaborar un modelo.

Ya dentro del sistema, el cliente, persona u objeto, entra en la cola. Cola es, en el marco de esta teoría, una palabra general que designa tanto la existencia de una como de varias colas. Por ejemplo, en un banco hay tres cajeros automáticos. Puede hacerse una sola cola para dirigirse al primero de ellos que se desocupe, como también podría hacerse una cola delante de cada cajero. En un caso habrá una única cola y en otro la cantidad de colas será tres. Ambas situaciones se modelan distintamente. Por otra parte, el tamaño de la cola se dirá infinito, no estrictamente porque lo sea, sino porque la cola admitirá tantos clientes como le lleguen. Al contrario, cuando la cola admite solo un número de clientes, como por ejemplo en una situación en que se dan 20 números diarios para acceder a un servicio, la cola se dirá finita. Por último, hay que explicar el tema de la disciplina. Una cola puede funcionar bajo la idea que el primero que llega será el primero en ser atendido y así. Es decir, una disciplina que se denomina FIFO (First Input First Output). También puede ocurrir que el último que llega sea el primero en atenderse (LIFO). Y también puede establecerse un sistema de prioridades asignando una valoración en un rango numérico distinto a los clientes, por ejemplo si fueran personas, teniendo en cuenta su edad.

Al pasar al mecanismo de servicio el cliente puede encontrarse con distintos medios de servicio. Por ejemplo, en una gran estación de servicio hay un medio para el despacho de la nafta, otro para poner aire a las cubiertas, otro para cambiar aceite y otro para pagar y comprar golosinas. En cada uno de esos distintos medios del mecanismo hay a su vez servidores que son los surtidores donde se expende la nafta, las fosas donde se cambia el aceite o las distintas cajas donde pagar. De tal modo hay en el mecanismo de servicio distintos medios de servicio y dentro de estos hay servidores. A su vez, se puede considerar para cada servidor un patrón estadístico de servicio cuya variable será, o bien el tiempo que se tarda en concluir un servicio, o bien la cantidad de clientes que son atendidos en una unidad de tiempo. Habrá entonces dos distribuciones de frecuencias asociadas con la actividad de cada servidor en las cuales una variable será la recíproca de la otra como en el caso de las llegadas. Por supuesto también aquí esas distribuciones pueden ser vistas como de probabilidad y permitirnos calcular la probabilidad de concluir un servicio en un dado tiempo o la probabilidad de atender una cantidad de clientes en una unidad temporal.

Esta exposición nos revela el alto grado de variación que pueden tener los supuestos de un sistema de espera. Pueden ser distintos los tamaños y los patrones estadísticos de la fuente de entrada. La cola puede ser única o varias, puede admitir tantos clientes como se quiera o no y puede tener distintas disciplinas de atención. El mecanismo de servicio puede tener uno o varios medios, cada uno con uno o varios servidores, con iguales o distintos patrones estadísticos.

Cualesquiera sean las hipótesis iniciales, el modelado apunta a combinarlas de modo de establecer la forma de medir la cantidad esperada de clientes en el sistema, la cantidad esperada de clientes en la cola, el tiempo esperado de permanencia en el sistema y en la cola y la ley de probabilidad de la variable aleatoria de estado del sistema, que nos permite calcular todos los parámetros antedichos que no son otra cosa que esperanzas matemáticas.

III.2 Proceso de Nacimiento y Muerte

Existe un modelo para representar la vida de las personas según la forma en que se producen los nacimientos y las muertes en la sociedad. La observación estadística de vieja data permite dar por sentado que el número de nacimientos en un período de tiempo fijado es una variable aleatoria que se distribuye Poisson. Lo mismo se ha observado respecto de las muertes producidas en un lapso de tiempo determinado. Recordemos que la distribución de Poisson tiene la fórmula:

$$p(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad k = 0,1,2,\ldots$$

dónde el parámetro λ es la esperanza de la variable aleatoria $E(k) = \lambda$. Las unidades de la variable son, en este modelo, personas/unidad de tiempo. Llamaremos entonces λ a la cantidad esperada de nacimientos en la unidad de tiempo y μ a la cantidad esperada de muertes en la misma unidad temporal. Ahora bien; en términos del modelo que se plantea, la recíproca de la variable k, tanto si representa nacimientos como muertes en el tiempo fijado, modela el tiempo entre eventos. Es decir $t = \frac{1}{k}$ unidades de tiempo/personas es la variable aleatoria que simboliza el tiempo entre nacimientos o muertes según corresponda. Esta variable es continua y puede probarse que su distribución es exponencial. Dicho de otra forma, su función de densidad de probabilidad es:

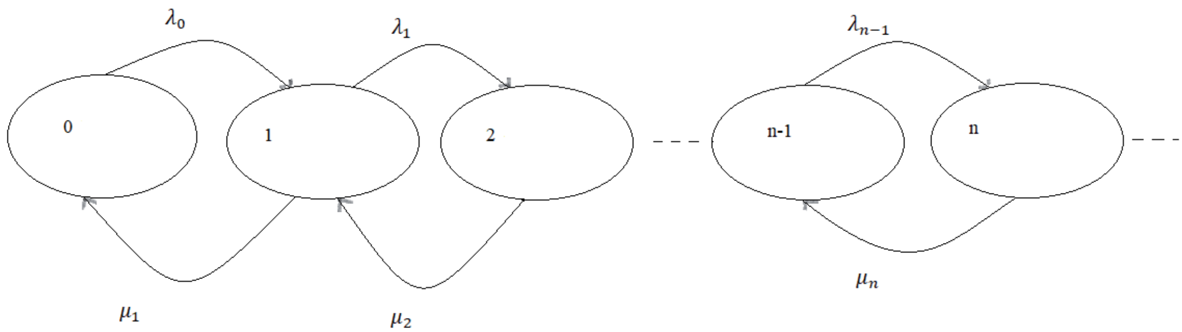
$$f(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t} & t \geq 0 \; y \; \alpha > 0 \\ 0 & en\ otra\ parte \end{cases}$$

La esperanza de tal variable aleatoria es $E(t) = \frac{1}{\alpha}$ y existe una relación recíproca también entre la esperanza de Poisson y la de la exponencial, habida cuenta que ambas son valores esperados de las recíprocas variables aleatorias *k* y *t*. Así resulta:

$$\lambda = E(k) = \frac{1}{E(t)} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha}} = \alpha.$$

En definitiva, el parámetro de la exponencial es la esperanza de la variable Poisson asociada. Así si, por ejemplo, en una determinada comunidad nacen en promedio 6 personas por día, teniendo en cuenta la distribución de Poisson de los nacimientos podremos decir que $\lambda = 6 \; \frac{nacimientos}{día}$. También podremos afirmar que el tiempo promedio que transcurre entre nacimientos en un día es $E(t) = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{6} \; \frac{dias}{nacimiento} = \frac{24}{6} \; \frac{horas}{nacimiento} = 4 \; \frac{horas}{nacimiento}$
Debe leerse entonces que, en promedio, al día transcurren 4 horas entre cada nacimiento. A partir de lo expuesto se observa que el patrón estadístico es doble pues contiene a la distribución de Poisson de la variable aleatoria que representa los nacimientos (o las muertes) en la unidad de tiempo, y, también, a la variable aleatoria que simboliza al tiempo que transcurre entre nacimientos (o muertes). En adelante hablaremos entonces de patrón estadístico Poisson-Exponencial.

Ahora debemos considerar el tamaño de la población. Si hay 1000 personas vivas podemos pensar que al año habrá una cierta cantidad esperada de nacimientos. Para fijar ideas supongamos que esa cantidad promedio fuera $\lambda = 200 \frac{nacimientos}{año}$. Pero si hubiera 1000000 de personas vivas los nacimientos tendrían que ser, en promedio, más. Es decir que en nuestro modelo de nacimiento y muerte debemos considerar también como variable la cantidad de personas vivas para registrar el hecho que los parámetros de las distribuciones de nacimientos y muertes deben variar según ella. Así las cosas, en términos generales diremos que si el estado del sistema es n, n personas vivas, habrá un parámetro λ_n para los nacimientos y un parámetro μ_n para las muertes. Si el estado n se considera también una variable aleatoria que depende a su vez de las variables aleatorias que representan los nacimientos y las muertes, en cada valor de la variable aleatoria n habrá distribuciones poisson-exponencial distintas, con diferentes parámetros λ_ny μ_n. Una sucesión de distintas variables aleatorias a través del tiempo se denomina proceso estocástico y entonces este que aquí presentamos será llamado el proceso de nacimiento y muerte. El diagrama de tasas que se muestra a continuación expresa esta idea.



Las flechas indican la dirección de cambio de estado según se trate de nacimientos o muertes. Es claro que para que el sistema permanezca en estado 0 se hace necesario que las personas que nacen y cambian el estado hacia 1 se equilibren con las que mueren y cambian el estado hacia 0. Pero los estados 0 y 1 no son igualmente probables. Es decir hay una p_0 de que el sistema esté en estado 0 y una p_1 de que el sistema esté en estado 1. De modo que el equilibrio para el estado 0 se alcanza cuando $\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1$. De similar forma el equilibrio en estado 1 se alcanza cuando $\lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2 = \lambda_1 p_1 + \mu_1 p_1$. En forma general este balance se expresa por una lista de ecuaciones:

$\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1$ $\qquad$ $p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0$

$\lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2 = \lambda_1 p_1 + \mu_1 p_1$ $\qquad$ $\lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2 = \lambda_1 \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 + \cancel{\mu_1} \frac{\lambda_0}{\cancel{\mu_1}} p_0$ $\qquad$ $p_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} p_0$

$\lambda_1 p_1 + \mu_3 p_3 = \lambda_2 p_2 + \mu_2 p_2$ $\qquad$ $p_3 = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} p_0$

$\ldots$ $\qquad$ $\ldots$

$\lambda_{n-2} p_{n-2} + \mu_n p_n = \lambda_{n-1} p_{n-1} + \mu_{n-1} p_{n-1}$ $\qquad$ $p_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} p_0$

$\lambda_{n-1} p_{n-1} + \mu_{n+1} p_{n+1} = \lambda_n p_n + \mu_n p_n$ $\qquad$ $\ldots$

$\ldots$

En suma, las probabilidades de los distintos estados quedan en función de los parámetros de cada una de las distribuciones de nacimiento y muerte en cada estado y de la probabilidad de estado 0. Puede hacerse ahora el reemplazo: $p_n = C_n p_0$ donde $C_n = \frac{\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \ldots \mu_n}$. La sucesión $p_0, p_1, \ldots p_{n-1}, p_n$ ...expresa la distintas probabilidades de estado, o sea las probabilidades de que haya un número n de personas en el sistema de nacimiento y muerte. Como se trata de una función de probabilidad se cumple que $\sum_0^\infty p_n = 1$ y habrá parámetros de la distribución tales como la cantidad esperada de personas en el sistema que sean de interés.

Para conocer un tanto mejor esta distribución de la variable aleatoria de estado se pueden hacer algunas cuentas y reemplazos.

$$1 = \sum_0^\infty p_n = p_0 + \sum_{n=1}^\infty p_n = p_0 + \sum_{n=1}^\infty C_n p_0 = p_0(1 + \sum_{n=1}^\infty C_n)$$

Es decir; $p_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^\infty C_n}$

lo que significa que la probabilidad de estado 0 también queda en función de los parámetros λ_n y μ_n $\forall\, n = 0, 1, 2, \ldots$

El proceso de nacimiento y muerte puede ser visto como un sistema de colas en el cual los nacimientos se interpretan como emisiones de la fuente de entrada, la vida como el tiempo que la persona permanece en la cola y la muerte como el servicio. Según la cantidad de personas vivas, es decir el estado del sistema, serán las tasas de nacimiento y muerte de las respectivas distribuciones exponenciales. Además, el proceso es una cadena de Markov pues, en cada estado, la probabilidad de un evento, se trate de un nacimiento o una muerte, depende solo de ese estado actual. En efecto, el modelado exponencial de los tiempos entre nacimientos y los de muertes, surge en cada estado con independencia de cualquier otro estado anterior o futuro. Esto es lo que define su propiedad markoviana.

III.3 El modelo M/M/1

El nombre M/M/1 se refiere a una modificación simplificadora en las hipótesis que condujeron a establecer el proceso de nacimiento y muerte. Aquí se supondrá que, no importa cuál sea el valor de la variable de estado, las distribuciones de tiempos entre llegadas y de tiempos de servicio tendrán siempre iguales valores en sus parámetros. O sea, suponemos que $\lambda = \lambda_n$ es una constante cualquiera sea el valor de *n*, y que, de la misma forma, $\mu = \mu_n$ es también una constante. Se observa que, bajo este supuesto, la propiedad markoviana en las llegadas al sistema y en los servicios se continúa manteniendo. La nomenclatura M/M/1 nombra entonces a un sistema que tenga estas características para entradas y salidas con un solo servidor. El resumen de los supuestos que realizamos para este modelo M/M/1 es el siguiente: la fuente de entrada tiene tamaño infinito con patrón estadístico Poisson-exponencial y sin hipótesis desacostumbradas; la cola será única, de tamaño potencialmente infinito y disciplina FIFO; y el mecanismo de servicio tendrá un solo medio de servicio con un solo servidor cuyo patrón será Poisson-exponencial.

Como ya se ha mencionado, el interés de la teoría está en conocer la ley de probabilidad de estado para calcular efectivamente la probabilidad de que haya n clientes en el sistema. A su vez, interesa también establecer la cantidad esperada de clientes en el sistema y en la cola. Otros parámetros de interés son el tiempo esperado total de espera en la cola y en el sistema. A partir del proceso de nacimiento y muerte y de todas las suposiciones hechas, en particular las de constancia de λ y μ, trataremos ahora de deducir las fórmulas necesarias.

La constancia de λ y μ permite definir el llamado factor de tráfico del sistema $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. Si se considera que los clientes deben entrar al sistema a una velocidad promedio menor de la que salen, pues de lo contrario el sistema se saturaría al existir una cola cada vez más larga, se ve que $\lambda < \mu$. Por lo tanto, habida cuenta además, que $\lambda > 0$ y $\mu > 0$, debe resultar que $0 < \rho < 1$. Si las velocidades de entrada y salida son similares el parámetro estará cercano a 1, mientras que si son muy distintas el parámetro se acercará al valor 0. Obsérvese ahora que $C_n = \frac{\lambda_0\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \dots \mu_n} = \frac{\lambda\lambda \dots \lambda}{\mu\mu \dots \mu} = \frac{\lambda^n}{\mu^n} = \rho^n$. Por lo tanto, como $\rho^0 = 1$, resulta

$$1 = \sum_0^\infty p_n = p_0 + \sum_{n=1}^\infty p_n = p_0 + \sum_{n=1}^\infty C_n p_0 = p_0(1 + \sum_{n=1}^\infty \rho^n) = p_0 \sum_{n=0}^\infty \rho^n$$

Dado que $0 < \rho < 1$, la última suma es la de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón ρ, que converge a $\frac{1}{1-\rho}$ por lo que resulta $1 = p_0(\frac{1}{1-\rho})$ y de aquí:

$p_0 = 1 - \rho$. Además como $p_n = C_n p_0$ se tiene que $p_n = \rho^n(1-\rho)$. Ahora contamos entonces con una expresión para la probabilidad de estado n con $n = 0,1,2, \dots$

La cantidad esperada de clientes en el sistema nos es otra cosa que la esperanza matemática de la variable aleatoria de estado. Por lo tanto, llamándola L tenemos:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \sum_{n=0}^{\infty} n\,\rho^n(1-\rho) = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n\rho\rho^{n-1} = (1-\rho)\rho\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^{n-1}$$

El argumento bajo la última sumatoria es la derivada de ρ^n respecto de ρ, entoces :

$$L = (1-\rho)\rho\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d\rho^n}{d\rho} = (1-\rho)\rho\frac{d}{d\rho}(\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n) = (1-\rho)\rho\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{1-\rho}\right)$$

Luego: $$L = (1-\rho)\rho\frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\frac{\mu-\lambda}{\mu}} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

Es decir, finalmente tenemos que la cantidad esperada de clientes en el sistema queda en función de los parámetros λ y μ de las distribuciones de entrada y salida del sistema.

Con un cálculo similar se establece que la cantidad esperada de clientes en la cola es:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

En 1961 el matemático John Little estableció dos relaciones importantes entre la cantidad esperada de clientes en el sistema y la cola por un lado y, por el otro, el tiempo esperado de permanencia en el sistema y en la cola.

$L = \lambda W$ y

$L_q = \lambda W_q$.

Entonces el tiempo esperado de espera en el sistema se calcula por

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\mu-\lambda}\right) = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

A su vez, el tiempo esperado de permanencia en la cola es

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

Si μ es la cantidad esperada de clientes atendidos en la unidad de tiempo entonces $\frac{1}{\mu}$ es el tiempo esperado de servicio. Al sumar el tiempo esperado de permanencia en cola y el tiempo esperado de servicio, la suma debiera dar el tiempo esperado de estancia en el sistema. Esto efectivamente puede comprobarse según:

$$W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} + \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda + (\mu-\lambda)}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\mu}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{1}{\mu-\lambda} = W$$

Finalmente hemos obtenido las fórmulas esenciales del modelo que corresponden a la probabilidad de la variable de estado y a las esperanzas matemáticas de cantidad de clientes en sistema y cola, y a los tiempos esperados de permanencia en el sistema y la cola. Una aplicación de todas estas cantidades puede verse en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 1: Un lavadero de automóviles lava a razón de 15 autos/hora los coches que llegan a razón media de uno cada 6 minutos. Asumiendo las hipótesis adecuadas, se desea calcular:

a) La cantidad esperada de autos en la cola.
b) El tiempo esperado de permanencia de cada auto en el lavadero
c) La probabilidad de que un auto al llegar tenga que esperar para ser lavado

Cuando se habla de hipótesis adecuadas en realidad se está pidiendo que se piense si la forma de trabajo en el lavadero se ajusta a los supuestos de un determinado modelo de colas. Es decir, comprobar que, en este caso, se cumplen las hipótesis del modelo M/M/1 en cuanto a la fuente de entrada, la cola y el mecanismo de atención. En particular, deberán encontrarse los parámetros λ y μ de los patrones Poisson-exponencial de llegadas y servicios.

Asumiendo entonces el comportamiento de Poisson para la cantidad de automóviles lavados en una hora, establecemos $\mu = 15\ automóviles/hora$ como su media. Para las llegadas observamos que lo que en realidad tenemos es el tiempo medio entre llegadas. Como sabemos que este valor es el recíproco del parámetro λ de la distribución de Poisson que las modela hacemos $6\frac{minutos}{automóvil} = \frac{1}{\lambda}$ de donde obtenemos $\lambda = \frac{1}{6}\ automóvil\ /minuto = \frac{60}{6} automóvil/hora$

Es decir; finalmente $\lambda = 10\ automóviles/hora$. Podemos ahora calcular:

a) $L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{10^2}{15(15-10)} = 1{,}33\ automóviles$ Hay que ver que esta es una cantidad teórica, que permitirá calcular costos, por ejemplo, pero que no tendrá realización práctica pues difícilmente puedan hallarse un auto y la tercera parte de otro realizando una cola.

b) $W = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{15-10} = 0{,}2\ horas = 0{,}2 \times 60\ minutos = 12\ minutos$

c) Si un auto tiene que esperar al llegar es porque en el sistema ya hay al menos uno. En el caso de haber exactamente uno estará en el servicio y el nuevo auto que llega será el primero de la cola. Si ya hubiera más de un auto, la cola ya estará formada y el nuevo automóvil se incorporará a ella. En cualquier caso, la probabilidad de tener que esperar se podrá calcular como:

   a. $P(esperar) = P(n \geq 1) = 1 - p_0 = 1 - (1 - \rho) = \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{15} = 0{,}33$

Ejercicios resueltos

Ejercicio N° 1- En un lugar de atención con un único lugar de despacho y cola simple se conoce el arribo de clientes que asciende a 15 unidades por hora, siendo la velocidad media de servicio de 25 unidades por hora. Calcular todos los elementos característicos de la cola y del sistema, suponiendo que la ley de arribos y servicios es Poisson. Calcular los mismos parámetros suponiendo λ constante y valores de μ menor y mayor al dato original. Resumir en un cuadro los resultados obtenidos y enunciar las conclusiones referentes a la variación obtenida en los parámetros.

λ = (velocidad de arribos)
μ= (velocidad de servicio)

	λ= 15u/h μ= 25u/h	λ= 15u/h μ=20u/h	λ= 15u/h μ=30u/h	λ= 20u/h μ=25u/h	λ=10u/h μ=25u/h
L	1,5	3	1	4	0,67
L_q	0,9	2,25	0,5	3,2	0,267
W_s	0,1	0,2	0,067	0,2	0,067
W_q	0,06	0,15	0,033	0,16	0,0267
ρ	0,6	0,75	0,5	0,8	0,4
p_0	0,4	0,25	0,5	0,2	0,6

Los cálculos revelan como el modelo acierta a describir las variaciones del sistema. En la medida en que el factor de tráfico ρ se acrecienta la cantidad esperada de clientes en el sistema y en la cola. Se acrecientan también en ese caso los tiempos esperados de permanencia de un cliente en el sistema y en la cola. Finalmente, la probabilidad p_0 de que el sistema este ocioso se hace cada vez menor cuando crece el factor de tráfico.

Ejercicio N° 2- Las llegadas de personas a una cabina telefónica so del tipo Poisson con un promedio de 6 minutos entre dos consecutivas. La duración de una llamada telefónica tiene una distribución exponencial con una media de 4 minutos. Calcular:

a) La probabilidad de que una persona que llegue a la cabina tenga que esperar.
b) La probabilidad de que halle más de 4 personas en la cola
c) La longitud promedio de la cola y del sistema

d) La compañía está dispuesta a instalar otra cabina si se comprueba que el tiempo medio de espera asciende a 10 minutos. Determinar cuál debe ser el flujo de arribos para justificar esa instalación.

λ=1/6 cliente/min μ=1/4 cliente/ min
λ=10 clientes/ hora μ= 15clientes/ hora

a) Una persona que llegue a la cabina tendrá que esperar siempre que haya al menos un cliente en el sistema. Es decir, la probabilidad de esperar será el complemento de la probabilidad de que el sistema esté vacío

$$p_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{10}{15} = 0.33$$

$$P(esperar) = 1 - p_0 = 1 - 0.33 = 0{,}667$$

b) Si hay más de 4 personas en la cola es porque hay más de 5 en el sistema ya que si hay cola es porque hay una persona hablando en la cabina. Luego la probabilidad de que haya más de 4 personas en la cola es la probabilidad de que haya más de 5 en el sistema.

$$P(n > 5) = P(n \geq 6) = 1 - [\,P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5] = \rho^6 = (2/3)^6$$

$$P(n \leq 6) = 0{,}0878$$

La probabilidad de hallar más de 4 personas en la cola es del 0.0878

c) $L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{(10^2}{15(15-10)} = \frac{4}{3}$

$$L = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{10clientes/h}{(\frac{15clientes}{h} - \frac{10clientes}{h})} = 2$$

d) $W_q = \frac{1}{6}$

$$\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\lambda}{15(15-\lambda)} = \frac{1}{6}$$

$$21\lambda = 225$$

$$\lambda = 10{,}71\ \frac{\mathrm{cl}}{\mathrm{h}}$$

Ejercicio N° 3- En una fábrica un mecánico destinado al mantenimiento de las maquinas atiende todos los desperfectos que en ellas se presentan. Se ha observado que la demanda de servicios sigue la ley de Poisson con un parámetro λ=2.5 y que el mecánico atiende los pedidos con una velocidad promedio μ= 4.6, según una rigurosa disciplina F I FO.
Determinar:

a) Número promedio de máquinas en espera de ser atendidas.
b) Tiempo promedio de atención.
c) Tiempo promedio entre desperfectos.
d) Tiempo promedio de espera de la maquina hasta comenzar su atención y hasta que se reintegre a la producción.
e) Determinar hasta que suma podría pagarse un incentivo para que el mecánico eleve su rendimiento de 90% (rendimiento actual) al 120% si la hora-hombre cuesta $200 y la hora-máquina cuesta $500.

λ=2.5 media de desperfectos en máquinas/hora con patrón Poisson exponencial.
μ=4.6 media de atención en máquinas/hora suponiendo patrón Poisson exponencial.

a) Número promedio de máquinas en espera de ser atendidas.

$$L_q = \frac{2.5^2}{4.6(4.6-2.5)} = 0.647$$

b) Tiempo promedio de atención

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{4.6} = 0.22\frac{horas}{máquina} = 0.22\frac{60\ minutos}{máquina} \approx 13 minutos/máquina$$

En promedio se atiende una máquina en 13 minutos

c) Tiempo promedio entre desperfectos.

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2.5} = 0.4\frac{horas}{máquina} = 0.4\frac{60\ minutos}{máquina} = 24 minutos/máquina$$

En promedio se descompone una máquina cada 24 minutos.

d) Tiempo promedio de espera de la maquina hasta comenzar su atención y hasta que se reintegre a la producción.

$$W_q = \frac{2.5}{4.6(4.6-2.5)} = 0.259\frac{horas}{máquina} \approx 16 minutos/máquina$$

El tiempo promedio de espera de una máquina en ser atendida es de 16 minutos aproximadamente.

Teniendo en cuenta este resultado y el del punto b) hacemos:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 16 + 13 = 29\ minutos/máquina$$

El tiempo promedio que permanece una máquina fuera de servicio es de 29 minutos

e) Determinar hasta que suma podría pagarse un incentivo para que el mecánico eleve su rendimiento de 90% (rendimiento actual) al 120% si la hora-hombre cuesta $200 y la hora-máquina cuesta $500.

$\acute{\mu} = \frac{120}{90}4.6 = 6.13$ es la velocidad de atención a la que el mecánico trabajaría si eleva su rendimiento al 120%.

El costo de mantenimiento comprende el costo de la espera de la máquina hasta ser atendida y el costo mientras se la atiende y sigue detenida más el trabajo del mecánico. Es decir:

$$Costo(\mu) = 500W_q + (500 + 200)\frac{1}{\mu}$$

Actualmente ese costo es:

$$Costo(4.6) = 500\frac{2.5}{4.6(4.6-2.5)} + (500 + 200)\frac{1}{4.6} = 281.75\$$$

Si el mecánico trabaja a velocidad $\acute{\mu} = 6.13$ máquinas/hora y se le paga un incentivo Δ el costo de esa operatoria será:

$$Costo(6.13) = 500\frac{2.5}{6.13(6.13-2.5)} + (500 + 200 + \Delta)\frac{1}{6.13} = 56.17 + 114.19 + \frac{\Delta}{6.13}$$

O sea $Costo(6.13) = 170.36 + \frac{\Delta}{6.13}$ de donde para que toda la operatoria a la nueva velocidad sea más barata debe ocurrir que:

$281.75 \geq 170.36 + \frac{\Delta}{6.13}$ De aquí $\Delta \leq 682.82\$$. Entonces el incentivo podría ser de hasta 682.82 $ sin que pagarlo incremente los costos actuales.

Ejercicios propuestos

Ejercicio N° 4- Frente a la ventanilla de franqueo de una oficina de correos se presentan 70 personas por día (jornada de 10 hs.). Se atiende en promedio a 10 personas por hora. Asumiendo las hipótesis convenientes, determinar:

a) Longitud media de la cola frente a la ventanilla.
b) Probabilidad de que exista una fila de más de 2 personas.
c) Tiempo promedio de espera en el sistema y en la fila.
d) Probabilidad de tener que esperar.

Ejercicio N° 5- En una estación de abastecimiento de oxigeno liquido de una planta química en la que se utiliza transporte por tanques semiremolque, se sabe que el costo del tiempo de espera de cada tanque para ser abastecido es de 40.000 $/hora, mientras que el costo horario de llenado de cada tanque es de $10.000. Si los tanques arriban a razón de 2 por hora, ¿cuál es la velocidad de despacho que hace mínimo el costo operativo total? (suponemos arribos Poisson y tiempos de servicio exponenciales)

Ejercicio N° 6- Una planta textil posee 30 telares, se requiere la presencia de un operario para la atención permanente de las maquinas (arreglo de desperfectos). Se supone que las roturas verifican las hipótesis de Poisson con una media de 3 roturas por día. La empresa debe elegir entre contratar al operario A o al operario B. A cobra $400 por día y arregla un promedio de 5 máquinas / día (servicio exponencial), mientras que B cobra $900 por 7 máquinas / día.

Una máquina detenida (tiempo no productivo) origina a la empresa un costo de $700 diarios. ¿Cuál será el operario elegido?
Hipótesis simplificadora: $N > 20$ población infinita.

Ejercicio N°7- En una gran empresa se examina el departamento de despacho ya que muchas veces se producen retrasos en las entregas. Los datos evidencian que el tiempo empleado en despachar los envíos constituye el 51% del tiempo. Se supone que las órdenes de envío llegan a la sección a razón de 5,75 por hora (y satisface Poisson).

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la sección esté inactiva?
b) ¿Cuál es la longitud media de la cola?
c) ¿Cuál debería ser aproximadamente la tasa de servicio para que la longitud media de la cola fuera $\approx 0{,}12$ (punto doce)?

Si se sustituyeran las mecanógrafas actuales que escriben 75 palabras por minuto, por otras que escribieran 100 palabras. ¿Cuál sería el número medio de mensajes esperando a ser mecanografiados?

Ejercicio N° 8- Sea un modelo de colas (Poisson- exponencial) con λ=3 cl/m y μ=5 cl/m. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya ningún cliente en la cola?

Ejercicio N° 9- Suponga una máquina automática expendedora de bebidas gaseosas. El tiempo que tarda en satisfacer el pedido de los clientes es de 68 segundos (determinístico). Si la llegada de los clientes puede considerarse Poisson con λ=0,3 cl/minuto. ¿Cuál será el tiempo medio de permanencia del cliente en el sistema?

Ejercicio N° 10- Un cerrajero hace llaves “en el acto”. Los clientes llegan con una tasa media de arribos igual a 0,08 clientes por minuto, siguiendo aproximadamente una ley de Poisson. Como en el vecindario hay otras cerrajerías, el cerrajero desea que por lo menos la mitad de sus clientes no tengan que esperar. En tal caso, ¿qué velocidad debe imprimir a su trabajo, o sea como debe ser, en promedio, el tiempo de servicio? (Asumimos distribución exponencial).

Ejercicio N° 11- Modelo de una sola cola (Poisson-exponencial). Si λ clientes / minuto mide la tasa media de arribos. ¿Cómo debe ser el tiempo medio de servicio para que por lo menos la mitad de los clientes no tenga que esperar?

Ejercicio N° 12- Se sabe que $P(n \leq 1) = 0{,}36$ ¿Cuál es la probabilidad de canal ocioso?

Ejercicio N°13- En un servicio de mecánica ligera al paso los automóviles llegan, en promedio, para un cambio de aceite cada 15 minutos. El servicio trabaja con una atención media de 48 automóviles en la jornada de 8 hs.

a) asuma las hipótesis convenientes para modelar este servicio y explicítelas.
b) Halle la cantidad esperada de automóviles en el sistema suponiendo que hay un solo servidor y halle el tiempo esperado de espera para ser atendido.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que haya cola frente al servidor?

d) Si los automóviles llegaran en promedio cada 10 minutos en que porcentaje tendría que aumentar la velocidad de servicio para mantener igual el tiempo medio de la espera para ser atendido.

Ejercicio N° 14- En un sistema de atención de una sucursal bancaria, los clientes llegan a razón media de 10 por hora. Los tiempos de atención son, en promedio, de 2 minutos por cliente. Asumiendo las hipótesis convenientes se desea establecer:

a) Probabilidad de que un cliente no tenga que esperar al llegar al banco.
b) Probabilidad de que haya cola frente a la caja.
c) Si se calcula que la hora promedio del cliente vale 50$ y que cada hora de atención del cajero vale 10$ ¿cuál es el costo económico promedio de la transacción por cliente?
d) ¿En que porcentaje debería aumentar la velocidad de atención del cajero para que dicho costo disminuyera un 10%?

Ejercicio N° 15- El 40% del tiempo que un automóvil taxímetro permanece en un servicio de lavado corresponde a la espera en ser atendido. Si los automóviles se atienden a razón media de 3 por hora se desea establecer el costo promedio que representa para cada taxi su paso por el servicio. El lavado de cada vehículo cuesta 30 pesos y el costo de no estar trabajando se estima en 50$ por hora.

Ejercicio N° 16- Un operario repara equipos electrógenos a razón media de 4 por día en su jornada laboral de 8 hs . En el mismo lapso horario se descomponen 2 equipos en promedio cuyo costo por hora de inactividad es 500 $. La hora del operario tiene un valor de 50 $. Asumiendo las hipótesis necesarias calcular el costo promedio de tener un equipo fuera de servicio.

Ejercicio N° 17- A una cabina de peaje llegan vehículos según un proceso de Poisson, con una media de 90 vehículos por hora. El tiempo en pasar por la cabina se distribuye exponencialmente con un promedio de 38 segundos. . El concesionario se plantea reducir este promedio a 30 segundos instalando dispositivos de cobro automático siempre que se satisfagan dos condiciones: que la cantidad promedio actual de vehículos en el sistema sea mayor que 5 y que el porcentaje de tiempo ocioso de la cabina con el nuevo dispositivo sea menor que el 10%. Con estas condiciones; ¿se puede justificar la instalación del dispositivo automático?

Ejercicio N° 18- Un cajero automático ubicado en un aeropuerto recibe clientes a razón media de 10 por hora durante todo el día. Con el software actual el cajero atiende a cada cliente en un promedio de 3 minutos a un costo estimado de 10 pesos por minuto. Un nuevo software podría atender a cada cliente en un promedio de dos minutos, pero su costo estimado sería de 12 pesos por minuto de atención. Por otra parte, el banco ha evaluado que el tiempo que emplea el cliente para toda la operación, en relación con la imagen de eficiencia del banco, en 1 peso por cada minuto. Se desea entonces saber si en términos de costos para el banco es conveniente renovar el software.

IV- Teoría de Inventarios

IV.1 Introducción

La acumulación de distinto tipo de mercadería a efecto de satisfacer una ulterior demanda es una práctica habitual en la industria y el comercio. En el caso de la fabricación de un bien, por ejemplo, un automóvil, es posible establecer políticas de abastecimiento de sus elementos constituyentes que aseguren la disponibilidad en el tiempo y la forma en que el proceso lo requiera. Similar cosa ocurre en el comercio cuando, por ejemplo, un supermercado, desea ofrecer a sus clientes un determinado artículo garantizando su existencia en la cantidad y el momento en que lo demanden. En ambos casos el objetivo de cubrir la demanda de manera adecuada genera la necesidad de tener un stock.

Toda política de stock o inventario requiere como paso inicial un análisis de la demanda del artículo que ha de acumularse. En oportunidades, la cantidad de artículos que van a ser demandados en un período de tiempo se conoce de antemano con cierta certeza. Por ejemplo, si van a fabricarse 500 automóviles en el mes, se harán necesarias 500 palancas de cambio en ese período. Otras veces ocurre que solo puede establecerse una distribución de probabilidades para el número de artículos que serán requeridos en un lapso de tiempo. Aquí puede pensarse, por ejemplo, en un kiosco de revistas que estima que, durante el mes, con distinta probabilidad, puede vender 10, 12 o 18 ejemplares de una publicación. Desde el punto de vista de la representación matemática del sistema de inventario se emplean dos tipos de modelos; determinísticos, cuando hay una demanda conocida fija, o estocásticos, si solo se tiene una idea probabilística de la demanda o directamente no se la conoce. En cualquier caso, el modelo que se utilice debe ayudar a tomar una decisión sobre con que cantidad de artículos formar el stock y cada cuanto renovarlo. Tal decisión suele basarse en el criterio de minimizar el total de los costos que están implicados en la formación, mantenimiento y disponibilidad del inventario necesario para satisfacer la demanda. Para ello hace falta entonces, además del análisis de la demanda, un estudio sobre los costos de toda la operatoria.

Los costos a considerar se detallan en forma sucinta a continuación:

a) *Costo de pedido y organización*

Puede involucrar los costos de preparación de máquinas, las tareas administrativas y de facturación necesarias para integrar la partida de artículos que se pida para formar el stock. Este costo no depende de la cantidad de artículos que integren el lote a pedir.

b) *Costo de compra unitario*

Incluye el costo de la mano de obra, los costos fijos, el costo de la materia prima y el de envío, todos prorrateados por cada unidad o artículo.

c) *Costo de retención o posesión*

A veces denominado *costo de mantenimiento* en stock comprende, por cada unidad en un período de tiempo, los costos de almacenamiento, seguros, impuestos, descomposición y obsolescencia. Además, incluye el costo de oportunidad calculado sobre el capital invertido en la mercadería que se obtiene de acuerdo al interés financiero que se sumaría a ese capital si no estuviera retenido en cada artículo.

d) *Costo de escasez o agotamiento*

También llamado *costo del déficit*, aparece cuando se pospone la satisfacción inmediata de pedidos sobre el stock. En un extremo podría ocurrir que cada pedido de un artículo que quedara pendiente no involucrara pérdida alguna; en el otro podría darse que cada demanda de un artículo que no fuese satisfecha conllevara una pérdida. Esto se trata de resolver estimando un costo por artículo para una situación intermedia. Por ejemplo; por la mañana 5 personas solicitan una caja de un remedio en la farmacia cuyo stock se ha agotado. El vendedor promete tener cada caja esa tarde. Pero a la tarde sólo regresan 3 clientes para comprar efectivamente el medicamento, por lo que se han perdido dos ventas. Estas pérdidas se pueden prorratear por artículo en la unidad de tiempo para establecer el costo del déficit surgido al agotarse el medicamento si bien no es siempre sencillo calcular tal cantidad.

Un análisis más pormenorizado de los costos cae fuera del contenido y objetivos de esta exposición que, a efecto del modelado, partirá de la base de considerar ya adecuadamente calculados los costos de *pedido*, *unitario*, *mantenimiento* y *déficit*.

La idea general es construir una función que relacione adecuadamente el costo total con el lote que forma el stock, para hallar entonces el tamaño del lote que garantice el costo mínimo y el tiempo óptimo que debe transcurrir hasta el próximo pedido. Tal función habrá de establecerse con arreglo a ciertos supuestos iniciales sobre la demanda, y algunos otros aspectos, que variarán según el modelo considerado. En suma, se trata de contestar dos preguntas ¿Cuánta mercadería incorporar al inventario? y ¿cada cuánto hacerlo? para que el costo total sea mínimo.

IV.2 Modelos con demanda conocida

Supongamos que se conoce la cantidad de artículos que habrá de solicitarse al stock en una cierta unidad de tiempo. Por ejemplo; la fábrica de automóviles requerirá 500 palancas de cambio en el mes. Más allá de que esta demanda mensual se mantenga constante a través del año, se puede suponer que la extracción diaria de palancas de cambio es proporcional a la demanda del mes. Así, si el stock de palancas de cambio tiene un determinado tamaño inicial, habrá de disminuir siguiendo una pendiente lineal en forma diaria. En tal caso se dirá que la demanda es *uniforme*.

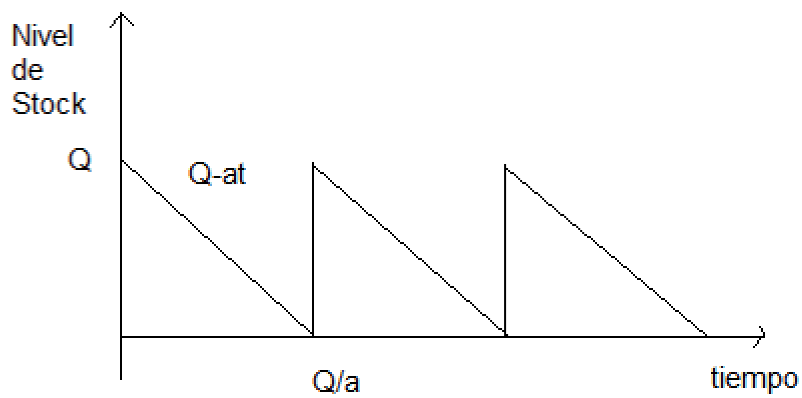
Otro aspecto a tener en cuenta es la forma en que se revisa el stock a fin de actualizarlo. Existen dos posibilidades: la cantidad de artículos existentes se actualiza cada vez que se extrae un artículo del stock o la actualización se produce a intervalos fijos de tiempo, en el caso de la fábrica de automóviles, por ejemplo, semanalmente. Si la actualización se realiza según la primera alternativa, se dice que el inventario es *revisado* en forma *continua*.

Los modelos que presentaremos en forma general dentro de este apartado responden a los supuestos de *demanda uniforme* y *revisión continua*.

IV.2.1 Modelo de Stock Simple sin Déficit

La *demanda uniforme* puede expresarse por una tasa de extracción que informa cuantas unidades se retiran del stock en cada unidad de tiempo. Llamaremos a a dicha tasa que está expresada en $\frac{unidades}{unidad\ de\ tiempo}$. La caída lineal del stock y la *revisión continua*, se acompañan aquí con la suposición de que no puede existir agotamiento o déficit sobre el stock. Es decir; no puede haber pedidos pendientes y por ende cuando el stock se agota debe contarse inmediatamente con una nueva partida para satisfacer la demanda. La Gráfico 1 ilustra tal operatoria del inventario a través del tiempo.

Gráfica 1



Al comenzar la actividad del sistema se tienen en stock Q unidades que conforman el lote de inicio. Este nivel baja a razón de a unidades por cada unidad de tiempo transcurrida. Los distintos niveles del stock quedan entonces graficados por el segmento de recta que representa la ecuación:

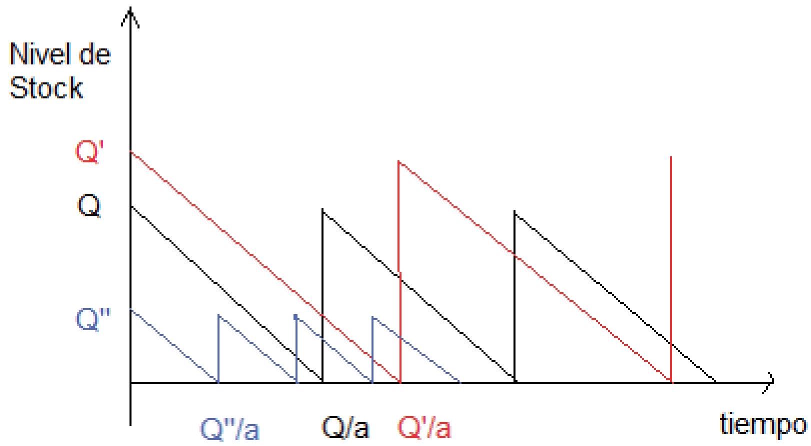
$Nivel\ de\ Stock = Q - a \times t$

La variable t indica el tiempo transcurrido desde el inicio de la operatoria. Es decir; en el instante inicial $t = 0$ se tiene, como se ve en la Gráfica 1,

$Nivel\ de\ Stock = Q - a \times t = Q$. Al continuar la operatoria cuándo el nivel de stock llega a 0, se tiene $Nivel\ de\ Stock = Q - a \times t = 0$ y al despejar resulta $t = \frac{Q}{a}$. Llegado este momento se debe pedir un nuevo lote de tamaño Q que disminuirá de la misma forma hasta 0 y así. Hay que advertir que la magnitud $\frac{Q}{a}$ queda efectivamente expresada en tiempo lo que resulta del cociente $\dfrac{\frac{unidades}{1}}{\frac{unidades}{unidades\ de\ tiempo}} = unidades\ de\ tiempo$. Por otra parte el tiempo transcurrido desde el instante inicial $t = 0$ hasta $t = \frac{Q}{a}$ es el llamado ciclo del stock.

Todo el análisis anterior ha comenzado al suponer que el tamaño inicial del lote es Q. ¿Es éste un valor fijo?, y si no lo es ¿de que depende su elección? Distintos valores iniciales de Q conducirían a distintas gráficas para la operatoria del inventario con diferentes longitudes para los ciclos aunque con la misma pendiente de los segmentos proporcionada por la tasa de extracción a. La Gráfica 2 muestra esta situación.

Gráfica 2



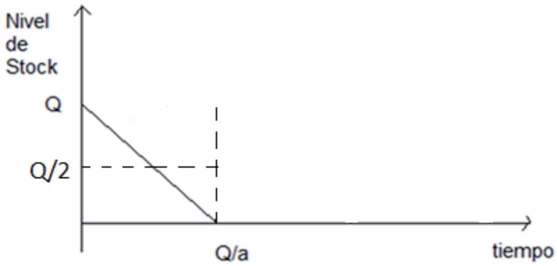
Como apuntamos en la introducción, se busca llevar el stock con el mínimo costo de manera que podemos preguntarnos acerca del tamaño de lote nos conducirá a él. En otras palabras, cada uno de los "serruchos" dibujados superpuestamente en la Gráfica 2 está asociado a un costo de la operatoria y estamos interesados en hallar al menos un valor de Q que haga ese costo mínimo. Tal valor permitirá también calcular la duración $\frac{Q}{a}$ del ciclo correspondiente. Si así hacemos habremos contestado las preguntas sobre que tamaño debe tener el lote y cada cuanto debe renovarse el stock para que el costo de la operatoria sea mínimo.

Un enfoque en general nos llevaría a considerar primero el costo que asumimos en un ciclo. Así resulta:

$$C(Q) = k + cQ + h\frac{Q}{a}\frac{Q}{2} = k + cQ + h\frac{Q^2}{2a}$$

Este costo por ciclo considera que para integrar la cantidad Q en el stock al principio se ha tenido que pagar, por una única vez en el ciclo, el costo *k de pedido o preparación* que fue detallado más arriba. A este se suma el costo de adquirir Q artículos cada uno de los cuales tiene un costo *unitario c* estableciéndose entonces la cantidad cQ por los Q artículos a precio individual c. Finalmente se adiciona también el costo de *mantenimiento*. Para calcularlo se observa que, al principio del ciclo, digamos en el instante 0, el nivel del stock es Q mientras que al final del ciclo el nivel de stock es 0. La disminución de este nivel de stock desde Q hasta 0 se ha producido en forma directamente proporcional al tiempo transcurrido de modo que para simplificar la cuenta podríamos considerar que el stock se mantiene en forma constante durante todo el lapso de tiempo $\frac{Q}{a}$ en una cantidad promedio $(Q+0)/2 = Q/2$ como se muestra en la Gráfica 3 .

Gráfica 3



Con esto tendríamos que considerar en cada unidad de tiempo el costo $h\,Q/2$ y como la cantidad de unidades de tiempo del ciclo es $\frac{Q}{a}$ resulta que el costo de mantenimiento en el ciclo es $h\frac{Q}{2}\frac{Q}{a} = h\frac{Q^2}{2a}$ Así el costo total del ciclo queda $C(Q) = k + cQ + h\frac{Q^2}{2a}$

Sin embargo, esta fórmula hallada para el costo por ciclo no revela aún como decrece el stock en la unidad de tiempo que se considere, ya sean días, semanas o años. Para considerar el costo en la unidad de tiempo hace falta dividirla por la duración en unidades de tiempo del ciclo. Así obtendremos la expresión del costo por unidad de tiempo en función del nivel que en cada momento tenga el stock.

$$T(Q) = \frac{C(Q)}{\frac{Q}{a}} = \frac{k + cQ + h\frac{Q^2}{2a}}{\frac{Q}{a}} = \frac{ka}{Q} + ca + h\frac{Q}{2}$$

Es decir $T(Q) = \frac{ka}{Q} + ca + h\frac{Q}{2}$ resulta la fórmula del costo por unidad de tiempo.
Este costo resultará mínimo para un cierto valor de Q que denotaremos como Q^*.
Utilizamos el cálculo diferencial de una variable haciendo 0 la derivada de la función de costo por unidad:

$$\frac{dT}{dQ} = -\frac{ka}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0$$

Obtenemos $-\frac{ka}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0$ y despejando $Q^2 = \frac{2ak}{h}$. Para hallar Q^* debemos considerar solo la raíz cuadrada positiva de Q pues una cantidad negativa no tendría sentido como respuesta. Al ser positivas todas las cantidades involucradas en el cálculo, la derivada segunda resulta

$$\frac{d^2T}{dQ^2}\Big|_{Q=\sqrt{\frac{2ak}{h}}} = 2\frac{ka}{(\sqrt{\frac{2ak}{h}})^3} > 0$$

Se tiene entonces que $Q^* = +\sqrt{\frac{2ak}{h}}$ realiza el mínimo costo $T(Q^*)$. El ciclo que produce el costo mínimo dura entonces un tiempo $t^* = \frac{Q^*}{a}$ Obsérvese que hemos contestado las dos preguntas que propusimos: Q^* es el tamaño óptimo del lote a pedir y t^* la duración óptima del ciclo pues ambas aseguran el costo mínimo.

Ejemplo 1: La Librería Universitaria tiene una demanda constante de 18000 ejemplares de un manual de economía por año. Esta demanda se satisface sin acumulación de atrasos. Cada pedido a la editorial proveedora cuesta 30 pesos y el mantenimiento en existencia de cada ejemplar es de 50 centavos mensuales. Suponiendo un año de 300 días laborables:

a- ¿Cuál es el nivel de inventario y el tiempo óptimo entre pedidos?
b- ¿Cuántos pedidos anuales deben hacerse?
c- Si el costo de cada libro es de 5 pesos ¿Cuál es el costo total anual?

a- El primer asunto con el que nos topamos es la necesidad de trabajar todas las cantidades en un mismo sistema de unidades. No es posible considerar algunas variables en pesos y otras en centavos o algunas en años y otras en meses, por ejemplo, así que debemos unificar nuestras medidas. La elección de las unidades debe entonces hacerse con el arte necesario para simplificar todas las cuentas en lo más que se pueda y no para complicarlas de modo que, en este problema en concreto, ese arte, que se aprende con la práctica solamente, nos indica que debemos trabajar en pesos y años. Interpretando las cantidades del enunciado quedan entonces:

k=30$
c=5$/libro
h=(0,5$/libroxmes)x12 meses=6$/libroxaño

Es importante entender que en la práctica comercial la notación $/libro expresa una división, aunque se "lea" como "pesos **por** libro" induciendo al error de considerarla una multiplicación.

Para calcular el nivel de inventario óptimo al comienzo del ciclo hacemos:

$$Q^* = +\sqrt{\frac{2ak}{h}} = \sqrt{\frac{2x18000\frac{libros}{año}x30\$}{6\frac{\$}{libroxaño}}} = \sqrt{\frac{180000\ librosxlibrosx\cancel{añox\$}}{\cancel{añox\$}}}$$

$$Q^* = \sqrt{180000\ libros^2} = 424{,}26\ libros$$

Esta claramente es una respuesta teórica pues en la práctica la cantidad deberá redondearse correctamente por exceso o defecto al valor entero más próximo. En este caso $Q^* \approx 424\ libros$. Hay que aclarar que el redondeo debe hacerse con buen criterio observando en cada caso las unidades. Si por ejemplo se tratara de pesos quizás pudiera convenir observar hasta el centavo, sobre todo si el costo o beneficio que represente la cantidad en cuestión fuera a darse repetidas veces.

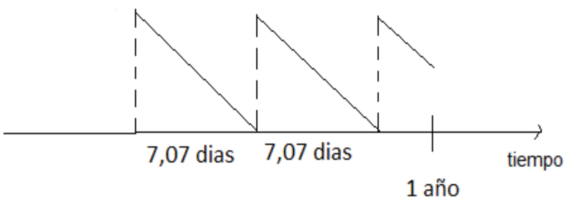
El tiempo óptimo entre pedidos no es otra cosa que la duración del ciclo de modo que calculamos $t^* = \frac{Q^*}{a} = \frac{424{,}26 libros}{18000\frac{libros}{año}} = 0.02357\ \frac{\cancel{libros}xaño}{\cancel{libros}} = 0{,}02357 años$

Se ha indicado que el año laboral es de 300 días lo que se corresponde con meses de 25 días ($\frac{300}{12} = 25$). Entonces: $t^* = 0{,}02357 años = 0.02357x12\ meses = 0.28284\ x25\ dias = 7{,}07\ días$ y redondeando $t^* \approx 7\ dias$

Este último cambio de unidades permite interpretar mejor la duración del ciclo y por eso se lo ha realizado, aunque en términos de cálculo no fuese necesario.

b- Si deben pedirse a la editorial 424,26 libros cada 7,07 días (aquí se toman las cantidades sin redondear para que al final resulten más exactos los cálculos) la cantidad de pedidos anuales se puede calcular por medio del cociente $\frac{300}{7,07} = 42,43\, pedidos$. Esta cifra requiere también una interpretación como se ve en la Gráfica 4

Gráfica 4



En un año exacto se consumen 18000 libros. En efecto si hacemos el producto $424,26\, libros\; x\; 42,43 = 18001.35 \approx 18000$ atribuyendo la imprecisión a las aproximaciones por redondeo realizadas. Ahora bien; si se hicieran 42 pedidos no se cubriría la demanda del año pues se llegaría hasta el día 297 con stock solamente. Pero ese día se realiza el pedido 43 que por la revisión continua supuesta llega en el acto. De este pedido se consume solo una parte hasta completar los 300 días del año. De modo que aquí el redondeo correcto sobre el número de pedidos es 43.

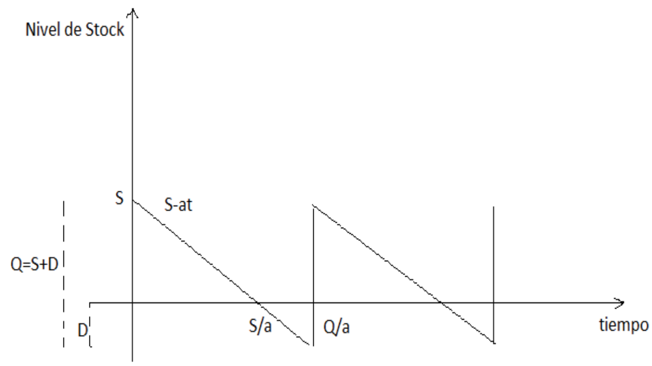
c- La unidad de tiempo que utilizamos inicialmente fue el año. De tal modo si empleamos ahora la fórmula para el costo por unidad de tiempo podremos conocer el costo total anual.

$$T(Q) = \frac{ka}{Q} + ca + h\frac{Q}{2} = \frac{30\$x18000\,\frac{libros}{año}}{424,26\, libros} + 5\frac{\$}{libro}x18000\frac{libros}{año} + 6\frac{\$}{libroxaño}x\frac{424,26\, libros}{2}$$
$$= 92545,58\frac{\$}{año}$$

IV.2.2 Modelo de Stock Simple con Déficit

Aún bajo los supuestos de demanda uniforme y revisión continua una situación que puede presentarse es que se admita déficit al llevar el inventario. Esto quiere decir que se reciba demanda sobre el stock y que ésta no sea satisfecha en forma inmediata, sino que se deje incrementar el faltante hasta que un nuevo lote cubra el mismo y lleve el nivel de stock otra vez al valor óptimo. Es decir; el tamaño Q del lote a pedir deberá llevar el stock a un nivel óptimo S cubriendo primero un déficit D que se ha permitido. La Gráfica 5 esquematiza la cuestión.

Gráfica 5



La tasa de extracción del stock es a y por lo tanto al ser la demanda uniforme el inventario cae con esa pendiente desde un nivel original S. El déficit resulta la diferencia entre el tamaño Q del lote pedido y el nivel de stock S, D=Q-S. Si el nivel de stock esta en 0 resulta:

$S - at = 0$ lo que ocurre a un tiempo $t = \frac{S}{a}$ que surge directamente al despejar. Por otra parte, si se ha alcanzado el total del déficit D, la ecuación de la recta revela que

$S - at = -D$ es decir;

$S - at = -(Q - S) = S - Q$ y entonces: $-at = -Q$.

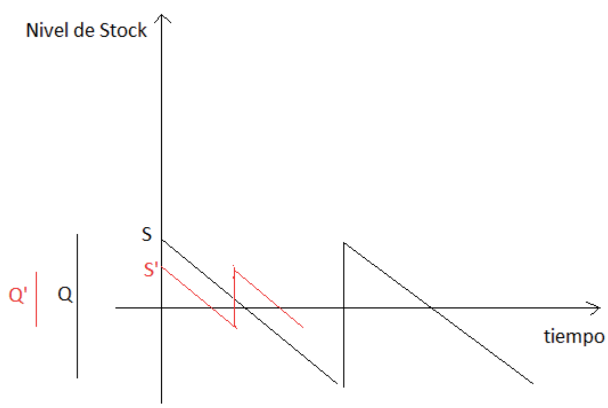
Por lo tanto $t = \frac{Q}{a}$ resulta la duración del total del ciclo desde que el inventario estaba en nivel S hasta que alcanzó el déficit D.

Por supuesto permitir un déficit tendrá un costo. En el presente modelo ese costo se estipula según cada unidad faltante en cada unidad de tiempo. Se considera entonces una cantidad p, costo del déficit, de tal forma que sus unidades son

$/unidad x unidad de tiempo

Obsérvese ahora que D=Q-S puede variar según los valores que adopten las variables Q y S, por lo tanto, el costo total al llevar el stock dependerá de ambas. La Gráfica 6 muestra alternativas distintas para valores de Q y S para una misma tasa de extracción a.

Gráfica 6



Al adicionar a las cantidades ya incorporadas en el modelo anterior los valores de S, nivel de stock, y p, costo del déficit, surge el costo por ciclo que depende ahora de las dos variables Q y S:

$C(S,Q) = k + cQ + h\frac{S^2}{2a} + p\frac{(Q-S)^2}{2a}$

Hay que observar que para llegar al nivel de stock S deben adquirirse Q artículos, cada uno a precio c, por lo que cQ es el costo asociado con esto, al que debe sumarse el costo de preparación k. Además hay que considerar que desde el inicio del ciclo hasta que transcurre el tiempo S/a hay mantenimiento del stock que se calcula en promedio S/2 por lo tanto el costo de mantenimiento en el ciclo es $h\frac{S}{2}\frac{S}{a} = h\frac{S^2}{2a}$. A su vez el déficit que comienza en 0 a tiempo S/a alcanza el valor D al llegar al instante Q/a siendo en promedio $\frac{0+D}{2} = \frac{D}{2} = \frac{(Q-S)}{2}$ por lo que el costo del déficit en el ciclo es $p\frac{(Q-S)}{2}\left(\frac{Q}{a} - \frac{S}{a}\right) = p\frac{(Q-S)^2}{2a}$. Así al sumar todos los costos considerados resulta C(S,Q) el costo por ciclo.

Para hallar la fórmula del costo por unidad de tiempo hay que tener en cuenta que el ciclo dura en total Q/a unidades de tiempo. Por lo tanto, se obtiene:

$$T(S,Q) = \frac{C(S,Q)}{\frac{Q}{a}} = \frac{ka}{Q} + ca + h\frac{S^2}{2Q} + p\frac{(Q-S)^2}{2Q}$$

La expresión resultante es función del tamaño del lote a pedir Q y del nivel óptimo de stock inicial S. Se trata entonces de encontrar valores Q^* y S^*que realicen su mínimo. Para ello se plantea el par de ecuaciones en derivada parciales $\frac{\partial T}{\partial Q} = 0$ y $\frac{\partial T}{\partial S} = 0$ de donde se obtiene el punto crítico ($Q^* = \sqrt{\frac{2ak}{h}}\sqrt{\frac{h+p}{p}}$, $S^* = \sqrt{\frac{2ak}{h}}\sqrt{\frac{p}{p+h}}$) . Al reemplazar ambos valores en la expresión del determinante Hessiano, resulta $H(Q^*, S^*) > 0$ lo que indica la existencia de un extremo que se comprueba mínimo de la función al notar que $\frac{\partial^2 T}{\partial Q^2}|_{Q,S=Q^*,S^*} > 0$. Hemos obviado aquí el detalle de los cálculos para hacer más ágil la exposición. En suma, hemos obtenido fórmulas para el tamaño del lote Q^* y el nivel de stock inicial S^* que hacen de $T(Q^*, S^*)$ el mínimo de la función de costo por unidad de tiempo del stock.

Ejemplo 2: Una farmacia tiene una demanda de 100 cajas semanales de un analgésico cuyo mantenimiento insume 10 centavos diarios por caja. El costo de la orden de pedido al proveedor es de 50$, el de cada caja de 10 $ y la empresa prefiere admitir déficit en su stock con un costo calculado de 1$ por caja y por día. La farmacia atiende al público de Lunes a Domingo inclusive y se desea estimar:

a- La política óptima para llevar el inventario bajo estas premisas.
b- Costo mensual de la misma.
c- ¿Le convendría más a la farmacia operar sin permitir déficit?

a- Una vez que se pasan los costos de mantenimiento y déficit a semana haciendo $h = 0.10\frac{\$}{caja \times dia} \times 7días = 0.70\frac{\$}{caja \times semana}$ y $p = 1\frac{\$}{caja \times dia} \times 7días = 7\frac{\$}{caja \times semana}$, se puede calcular $Q^* = \sqrt{\frac{2\times100\times50}{0.7}}\sqrt{\frac{0.7+7}{7}} = 119.52 \times 1.05 = 125.49 \approx 125\ cajas$ que es el tamaño óptimo del lote a pedir. Obsérvese que el factor 119.52 representaría el tamaño óptimo del lote si no se admitiera déficit. Por otra parte el ciclo de repedido estaría en $\frac{Q^*}{a} = \frac{125.49}{100} = 1.25\ semanas$.

b- Para calcular el costo mensual conviene suponer que la operatoria de la farmacia se realiza en un año comercial de 360 días y que por lo tanto consideraremos un mes de 30 días. Así un ciclo de 1.25 semanas de duración equivale a uno de $1.25 \times 7\ días = 8.75\ días$. De tal forma en el mes de 30 días entrarían $\frac{30\ dias}{8.75 dias} = 3.43\ ciclos$.

Al tener en cuenta que el nivel óptimo de stock es $S^* = 119.52 \times \sqrt{\frac{7}{0.7+7}} = 119.52 \times 0.95 = 113.54 \approx 114\ cajas$ se calcula el costo por ciclo como:

$$C(114{,}125) = 50 + 10 \times 125 + \frac{0.7 \times 114^2}{2 \times 100} + \frac{7 \times (125 - 114)^2}{2 \times 100} = 1348.32\$$$

Finalmente, el costo mensual resultará de multiplicar el costo del ciclo por la cantidad de ciclos que caben en un mes. $Costo\ Mensual = 1348.32 \times 3.43 ciclos = 4624.74\$$

c- Si no se admitiera déficit el lote óptimo sería, como se apuntó en a-, $Q^* = 119.52$. Por lo tanto, el ciclo de repedido sería de $\frac{Q^*}{a} = \frac{119.52}{100} = 1.20\ semanas$, lo cual es equivalente a $1.20 \times 7 = 8.40\ días$. De esto se desprende que la cantidad de ciclos en el mes sería $\frac{30}{8.40} = 3.57\ ciclos$

Calculando ahora el costo por ciclo sin déficit se tiene $C(119.52) = 50 + 10 \times 119.52 + \frac{0.7 \times 119.52^2}{2 \times 100} = 1295.2\$$. El costo mensual sin que se permita déficit es entonces: $1295.2 \times 3.57 = 4623.86$.

Resulta entonces que el costo mensual de la operatoria con déficit, calculado en b-, de 4624.74 $ es muy parecido al de la modalidad de no admitir déficit alguno, 4623.86. Por lo tanto, a la farmacia no le convendría modificar su forma de venta si ello implicara algún costo adicional en la adaptación al nuevo sistema.

IV.3 Un modelo con restricciones de almacenamiento

Vamos a analizar ahora un interesante caso. Se trata de la situación en la que se acumulan varios tipos de artículos para satisfacer, sin permitir déficit, la distinta demanda que cada uno pueda tener a la vez que se cuenta con una cantidad limitada de espacio total para almacenarlos.

Para ilustrar el razonamiento comenzamos suponiendo que deseamos acumular un solo tipo de artículo. En tal caso, a las cantidades involucradas en el modelo de stock simple desarrollado en IV.2 1- habrá que agregar que el espacio total disponible, medido en unidades de volumen o de superficie, es l y que l es la cantidad de espacio ocupada por cada artículo en cuestión. Resulta entonces que la restricción de lugar físico quedará expresada por la desigualdad $lQ \leq L$ donde Q es la cantidad óptima a pedir y también, en este caso, el nivel máximo que alcanzará el stock.

Ahora bien; Q se calcula minimizando el costo por unidad de tiempo $T(Q)$. Por lo tanto, la restricción adicional incorporada fuerza a la construcción de una función que la tenga en cuenta, según el método del multiplicador de Lagrange. Así resulta:

$$MT(Q,\lambda) = T(Q) - \lambda(lQ - L) = \frac{ka}{Q} + ca + \frac{hQ}{2} - \lambda(lQ - L)$$

Basta ahora con derivar respecto de las respectivas variables e igualar a 0 para encontrar los puntos críticos de esta función bivariada:

$$\frac{\partial MT}{\partial Q} = \frac{-ka}{Q^2} + \frac{h}{2} - \lambda l = 0$$

$$\frac{\partial MT}{\partial \lambda} = -lQ + L = 0$$

Entonces despejando de la primera ecuación obtenemos: $Q^* = \sqrt{\frac{2ak}{h-2\lambda l}}$

Haciendo las cuentas se comprueba que el determinante Hessiano es constantemente negativo, pues *l* es una constante, y por lo tanto no hay un extremo (máximo o mínimo) que quede definido claramente para tal punto. En efecto, no se cumple la condición de suficiencia para la existencia de extremo en ese punto pues:

$$\begin{vmatrix} \frac{2ak}{Q^3} & -l \\ -l & 0 \end{vmatrix} = -l^2 < 0$$

Sin embargo, como la condición del determinante Hessiano positivo no es necesaria, basta determinar un valor del multiplicador que, junto con la cantidad Q^* realice un mínimo de la función $MT(Q,\lambda)$ para resolver el problema. Hay que observar que con $\lambda < 0$, cuanto más grande sea su valor absoluto más chico se hará Q, aunque siempre positivo. Resulta entonces que el valor de Q^* podrá calcularse variando heurísticamente λ hasta que se cumpla con la restricción de lugar $lQ^* \leq L$

En el caso expuesto hasta aquí Q^* pudo determinarse directamente utilizando la fórmula de la restricción. Sin embargo, esto no sería tan sencillo si hubiese que pedir cantidades diferentes de distintos tipos de artículo y el lugar para almacenarlos siguiera estando restringido a L. Suponiendo que l_i es el espacio que ocupa cada artículo de tipo i, y que Q_i es el tamaño óptimo del stock para ese tipo de artículo, siendo n el número de tipos de artículos a inventariar, la restricción de espacio queda: $\sum_{i=1}^{n} l_i Q_i \leq L$

Para cada tipo de artículo i podría hacerse una deducción similar a la anterior y llegar a que: $Q_i = \sqrt{\frac{2k_i a_i}{h_i - 2\lambda l_i}}$ dónde k_i, a_i, h_i y l_i son, respectivamente, el costo de la orden de pedido, la tasa de extracción, el costo de mantenimiento y el lugar que ocupa cada artículo, para el tipo i.

En este caso se busca heurísticamente el valor de λ para determinar una combinación adecuada de artículos de cada tipo $(Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n)$ que satisfaga la restricción $\sum_{i=1}^{n} l_i Q_i \leq L$

Ejemplo 3: En una industria se fabrican dos productos a los que corresponden los siguientes datos:

		P1	P2
Costo de fabricación	\$/unidad	5	8
Costo de emisión del lote:	\$	6000	8000
Demanda mensual constante:	unidades/mes	12000	18000
Espacio ocupado por unidad:	m3/unidad	0,05	0,06
Costo de almacenamiento:	\$/unidad mes	0,04	0,08

Determinar los lotes óptimos:
-a Si no hay restricción de espacio
-b Si el espacio disponible es igual al 70% del volumen total medio ocupado en el caso –a

a- Para cada producto puede calcularse el lote óptimo mediante la fórmula $Q_i = \sqrt{\frac{2k_i a_i}{h_i - 2\lambda l_i}}$. De tal forma, teniendo en cuenta que en este caso no hay restricciones de espacio para el Producto 1, el lote óptimo es $Q_1 = \sqrt{\frac{2\times6000\times12000}{0.04}} = 60000$

Similarmente para el Producto 2

$$Q_2 = \sqrt{\frac{2 \times 8000 \times 18000}{0.08}} = 60000$$

b- El volumen ocupado por las $Q_1 = 60000$ unidades del Producto 1 es $v_{Q1} = 60000 \times 0.05 = 3000$ m^3

El volumen ocupado por las $Q_2 = 60000$ unidades de Producto 2 es $v_{Q2} = 60000 \times 0.06 = 3600$ m^3

Resulta entonces que el 70% del volumen promedio es $L = 0.7 \times \frac{3000+3600}{2} = 2310$ m^3 Por lo tanto hay que encontrar las cantidades Q_1 y Q_2 que a la vez que satisfacen $(0.05 \times Q_1 + 0.06 \times Q_2)/2 \leq 2310$ realicen el mínimo del costo por unidad de tiempo.

Para empezar, observemos que ese costo resultará de:

$MT(Q_1, Q_2, \lambda) = \frac{6000\times12000}{Q_1} + 5 \times 12000 + \frac{0.04}{2} Q_1 + \frac{8000\times18000}{Q_2} + 8 \times 18000 + \frac{0.08}{2} Q_2 - \lambda((0.05Q_1 + 0.06Q_2)/2 - 2310)$

Si λ va disminuyendo, es decir creciendo en valor absoluto, las cantidades $Q_1 = \sqrt{\frac{2\times6000\times12000}{0.04-2\times\lambda\times0.05}}$ y $Q_2 = \sqrt{\frac{2\times8000\times18000}{0.08-2\times\lambda\times0.06}}$ irán disminuyendo hasta que en algún momento se cumpla que:

$(0.05 \times Q_1 + 0.06 \times Q_2)/2 \leq 2310$

La búsqueda de estas cantidades se denomina heurística pues se va acercando por aproximación a los valores adecuados.

λ	Q_1	Q_2	$(0.05 \times Q_1 + 0.06 \times Q_2)/2$
0	60000	60000	3300
-0.2	48990	52623	2803
-0.3	45356	49827	2629
-0.4	42426	47434	2484
-0.5	40000	45356	2361
-0.52	39563	44972	2338
-0.53	39350	44784	2327
-0.55	38933	44414	2306
-0.547	38995	44469	2309

Así adoptamos como respuesta aproximada $Q_1 = \sqrt{\frac{2\times6000\times12000}{0.04-2\times(-0.547)\times0.05}} = 38995$ y $Q_2 = \sqrt{\frac{2\times8000\times18000}{0.08-2\times(-0.547)\times0.06}} = 44469$

Ejercicios resueltos

Ejercicio N° 1- La demanda de cajas (estuches) de una casa de regalos es de 8000 por año. El costo de almacenamiento por unidad y por año es de $1,20 y el costo de ordenar una compra es de$400. No se permite déficit; el reemplazo es instantáneo. Determinar:

a) Lote óptimo
b) Número de pedidos por año
c) Tiempo óptimo entre pedidos
d) Si el costo de cada estuche es $5. ¿cuál es el costo total anual de los estuches?
e) Si todos los demás valores permanecen constantes y varía el costo de almacenamiento, calcular este último sabiendo que Q^* resulta ser igual a 3000 unidades.

Datos:
Demanda a = 8000 unidades/ año
Costo de almacenamiento h= $1,20/unidad x año
Costo de orden de compra k= $400

a) $Q^* = \sqrt{\frac{2ak}{h}} = \sqrt{\frac{2\times8000u/año\times\$400}{1,20año}} = 2309\ unidades$

b) $t^* = \frac{Q}{a} = \frac{2309u}{8000u/anuales} = 0{,}2886\ años \approx 86{,}59\ días \ \approx 3,46\ meses$

c) Pedidos anuales: $\frac{300\ dias}{86{,}59\ días} = 3{,}46 \ \approx 4\ pedidos$

d) $T(Q) = \frac{ka}{Q} + \ ca + h\frac{Q}{2}$

$$T(Q) = \frac{\$400 \times 8000u}{2309u} + \$5 \times 8000u + \frac{1{,}20\$}{u} \times \frac{2309u}{2} = \$42771{,}28\ anual$$

e) $Q^* = \sqrt{\frac{2ak}{h}} \rightarrow \ (3000\ unidades)^2 \ = \ \frac{2ak}{h}$

$$h = \frac{2 \times 8000\ unidades\ \times \$400}{(3000 unidades)^2}$$
$$h = \ 0{,}71\$/unidades \times año$$

Ejercicio N° 2- La sección de compras de una empresa industrial de válvulas de bronce de ½ pulgada ha determinado que el consumo mensual es de 40 unidades. Su precio unitario es de $500. Si se establece que el ciclo del stock debe durar 60 $días$ y que se paga $5 por válvula por día de almacenamiento y $50 por válvula por día de atraso en las entregas se pide calcular:

a) El tamaño del lote

b) Cuantas válvulas se venden sin entrega inmediata
c) Costo en un ciclo

Datos:
Tasa de extracción: a=40unidades/mes
Costo unitario: c= \$500/u
Longitud del ciclo: $t^* = 60\ días$
Costo de mantenimiento: h= \$5/unidadxdía
Costo del déficit: p= \$50/unidadxdía

a) $t^* = 60\ días = \frac{Q^*}{a} \quad t^* \times a = Q^*$

$$Q^* = 2\ meses \times 40 \frac{u}{mes}$$

$$Q^* = 80\ unidades$$

b) D= $Q^* - S^*\ a = \frac{40 unidades}{mes} = \frac{\frac{40}{30} unidades}{dia} = 1.33\ unidades/dia$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2ak}{h}} \times \sqrt{\frac{P+h}{P}}$$

$$(80)^2 = \frac{2ak}{h} \times \frac{P+h}{P}$$

$$(80)^2 = 2 \times \frac{1.33k}{5} \times \frac{50+5}{50}$$

$$(80)^2 = \frac{2.66}{5} k \times \frac{55}{50}$$

$$k = \$10936.46$$

$$S^* = \sqrt{\frac{2ak}{h}} \times \sqrt{\frac{P}{P+h}}$$

$$S^* = \sqrt{\frac{2 \times 4/3 \times 10936.46}{5}} \times \sqrt{\frac{50}{55}}$$

$$S^* = 72{,}73 \approx 73\ unidades$$

D= $Q^* - S^*$= 80-73= 7 unidades

c) $C(S,Q) = k + cQ + h\frac{S^2}{2a} + p\frac{(Q-S)^2}{2a}$

$$C(73{,}80) = 10936.46 + 500 \times 80 + 5 \times \frac{73^2}{2 \times 1.33} + 50 \times \frac{(80-73)^2}{2 \times 1.33} = 61874.43$$

Ejercicios propuestos

Ejercicio N° 3- Un fabricante de accesorios para automóviles recibe un pedido de 20.000 paragolpes que tienen que entregar uniformemente en el curso del año (300 días hábiles). Mantener una unidad almacenada le cuesta \$500/año y el costo de puesta en marcha para producir cada lote de paragolpes es de \$60.000.

a) ¿Cuál es el lote óptimo que debe producirse?

b) ¿Cuál es el lapso en días entre tandas de producción?

c) Si por razones técnicas el fabricante debiera fabricar el 20% mas por lote (20% menos) ¿sería significativa la variación del costo total?

Ejercicio N° 4- Un comerciante debe atender la demanda de un artículo de gran consumo (200.000 unidades por año) cuyo costo unitario es de \$ 50 y desea determinar la política de reposición de stocks que le asegure el mínimo costo, sabiendo que el costo administrativo de cada pedido de compra que emita es de \$ 15.000 y que el costo de mantenimiento en stock es del orden del 30% anual. Calcular Q^*, t^*, número de pedidos por año (300 días hábiles) y costo total anual.

Ejercicio N° 5- Un comerciante compra un producto a \$ 100 por unidad, debiendo pagar por almacenamiento \$ 5. Por unidad por día. La orden de compra del producto insume un costo de \$ 3.000 y la demanda del mismo es de 50 unidades diarias durante los 20 primeros días del mes y de 20 unidades diarias durante los últimos 10 días del mes. Sabiendo que no hay retraso en las entregas calcular:

a) Nivel de stock transcurridos los 20 primeros días del mes.

b) Nivel de stock para cubrir la demanda de un mes.

c) Costo mensual de almacenamiento.

d) Costo mensual del modelo.

Ejercicio N° 6- Una empresa adquiere un producto cuya demanda se considera constante en lotes óptimos de 5000 unidades. Si el costo de la orden aumenta al doble ¿Cuál será el lote óptimo de reposición? Si el costo de la orden y el costo de almacenamiento por unidad de producto y por unidad de tiempo aumenta en la misma proporción. ¿Qué puede decirse de Q^*?

Ejercicio N° 7- Retomar el ejercicio 3, ahora sabiendo que ese comerciante estima un costo mensual de \$ 45 por cada unidad que no se disponga en stock. Calcular lote óptimo, stock óptimo y período de reorden óptimo. Computar costos máximos totales.

Ejercicio N° 8- Un fabricante de camisas tiene un pedido de 135.000 camisas anuales. El costo inicial de producción es de \$ 4.000. Cada camisa tiene un costo de \$ 2.300. El costo de

almacenamiento de cada camisa es e $3 por día. Si hay retraso en la entrega deberá pagar una multa de $1 por camisa por día de atraso.
a) Calcular el lote óptimo.

b) Cuantas camisas se venden con retraso en las entregas.

c) Tiempo y costo de un período.

Ejercicio N° 9- Un concesionario de automóviles tiene una venta diaria de 4 unidades, y sus costos son: $25.000.000 por unidad adquirida a la fábrica, $20.000 diarios por cada unidad que estaciona en un garaje que alquila, $100.000 por cada unidad que le solicitan y no entrega y $300.000 por cada pedido de entrega de unidades que le solicita a la fábrica. Calcular:

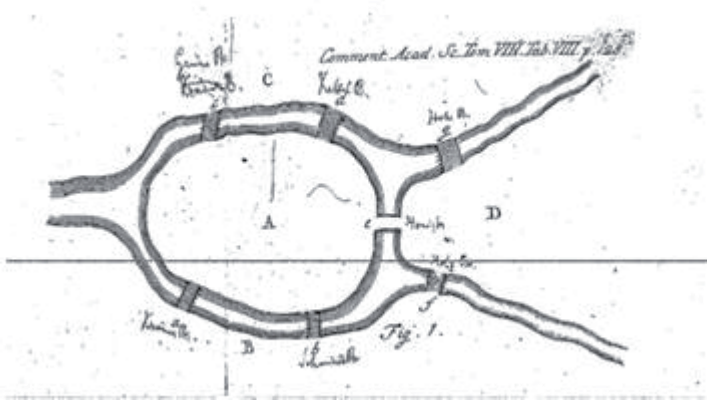
a) Cantidad máxima de autos a tener en el garaje que alquila.
b) Porcentaje pedidos no entregados
c) Cantidad de autos a solicitarle a la fábrica en cada pedido.
d) Costo de penalización mensual por autos no entregados.
e) Costo de alquiler mensual del garaje.
f) Costo mensual del modelo de stock.

V- Algoritmos en Redes

V.1 Grafos

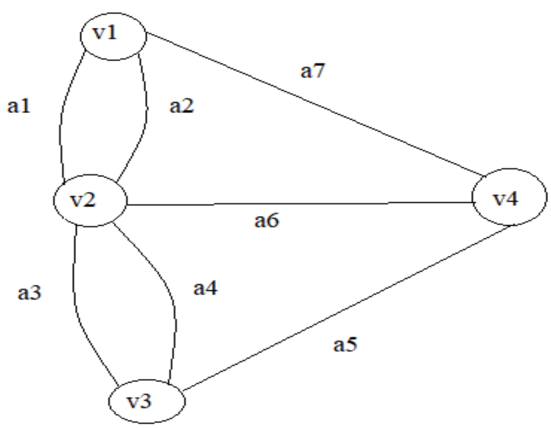
En 1735 el célebre matemático suizo Leonhard Euler planteó y resolvió el llamado problema de los siete puentes. Partiendo de una cualquiera de las cuatro regiones en que quedaba dividida la ciudad Könisberg, ¿podía establecerse un camino que atravesara todas las regiones y volviese al punto de origen pasando solo una vez por cada uno de los siete puentes? La Gráfica 1 es un esquema del problema que intentaba resolver.

Gráfica 1



Si bien Euler demostró que no era posible realizar el recorrido sin pasar al menos dos veces por alguno de los puentes, hizo en realidad mucho más: determinó las condiciones en las que cualquier problema similar puede resolverse afirmativamente. De tal forma dio comienzo a la llamada teoría de grafos que tantas aplicaciones hallara en la ingeniería, entre otros dominios. En términos modernos el problema de Euler puede expresarse por la Gráfica 2.

Gráfica 2.

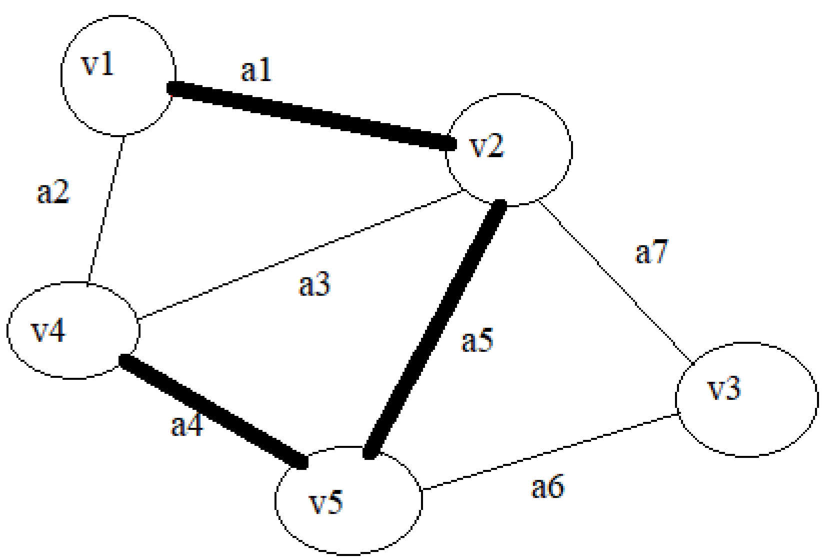


Aquí se muestra un grafo que modela el problema. Cada punto v_1, v_2, v_3 o v_4 representa un sector de la ciudad y cada uno de las líneas *a*, de 1 hasta 7, los diferentes puentes existentes.

En lenguaje matemático, un grafo es una terna (V, A, φ) en la cual V es un conjunto de vértices , A un conjunto de aristas y φ una relación de incidencia que vincula un vértice v_i con otro v_j a través de la arista a. En símbolos $\varphi(a) = (v_i, v_j)$. En el problema original de Euler ocurriría por ejemplo que $\varphi(a_3) = (v_2, v_3)$ Es decir; a_3 sería un puente entre las regiones $v_2\ y\ v_3$. Está claro que, en este caso, la relación de incidencia podría haberse escrito también $\varphi(a_3) = (v_3, v_2)$ pues el puente sirve para vincular las zonas en ambos sentidos. Además ese puente no es el único que vincula las dos zonas pues también vale que $\varphi(a_4) = (v_2, v_3)$. Es decir, por un lado, dos aristas distintas pueden incidir sobre los mismos puntos y además el orden en que estos puntos se citen carece de importancia. Pero si esto no ocurriera, si un puente pudiera ser atravesado en un solo sentido, el orden del par de vértices cobraría significado. No daría lo mismo citar los vértices en cualquier orden y entonces la relación de incidencia de denominaría dirigida. Así un grafo con aplicación de incidencia dirigida es un grafo dirigido o un digrafo.

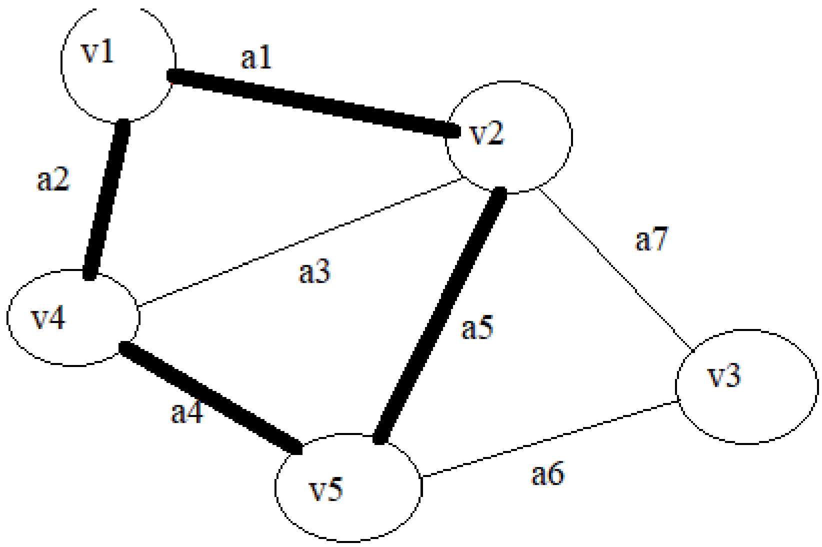
Algunos conceptos adicionales pueden sernos necesarios. Una cadena es una sucesión de vértices y aristas $(v_1, a_1, v_{2,} \dots a_{n-1}, v_n)$ tal que las aristas son todas distintas y cada una incide sobre el vértice precedente y sobre el siguiente. La Gráfica 3 proporciona el ejemplo de cadena $(v_1, a_1, v_2, a_5, v_5, a_4, v_4)$. Se dice que el vértice v_i es alcanzable desde el vértice v_k si hay una cadena que los une. El grafo de la Gráfica 3 es conexo pues cualquiera de sus vértices es alcanzable desde cualquier otro.

Gráfica 3



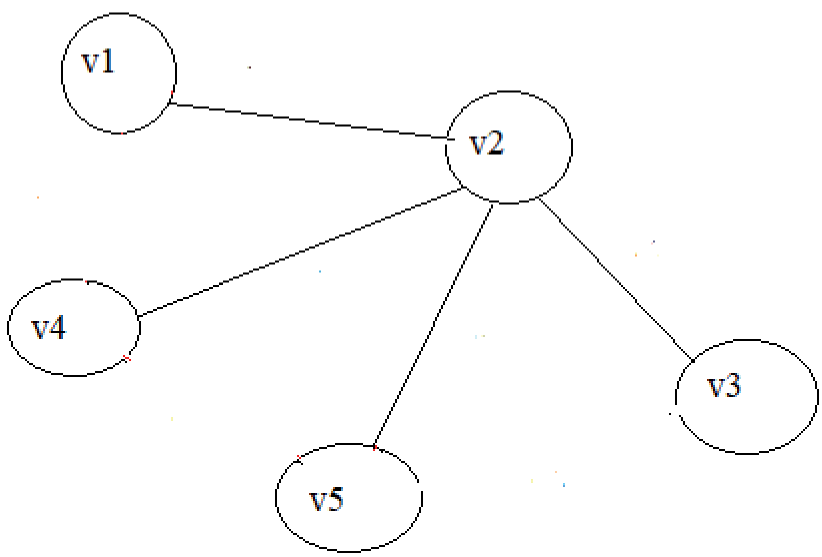
Una cadena cuyo vértice inicial coincide con su vértice final se denomina ciclo. El ciclo $(v_1, a_1, v_2, a_5, v_5, a_4, v_4, a_2, v_1)$ se ve en la Gráfica 4.

Gráfica 4



Finalmente, un árbol es un grafo conexo, es decir que todos sus vértices están conectados, en el cual no existen ciclos. La Gráfica 5 muestra un ejemplo.

Gráfica 5



Cuando cada arco incide sobre un par distinto de vértices, el grafo puede representarse también por su matriz de incidencia. Esta consiste en un arreglo donde cada fila representa un vértice y cada columna también. Las celdas de la matriz se llenan con 1 si hay un arco que incide en el vértice de fila y en el de columna respectivos, y con 0 si no. Así por ejemplo el grafo de la Gráfica 5 es representado por la matriz de incidencia:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

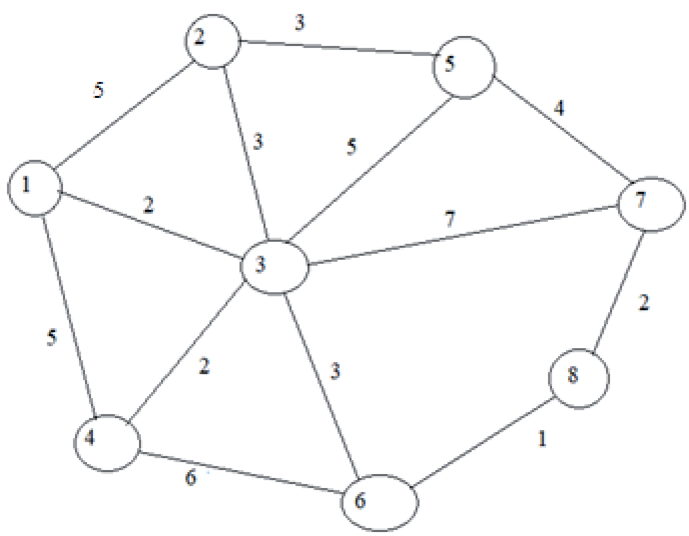
La teoría de grafos, vasta e interesante, ha cobrado relevancia pues es aplicable en muy variados dominios de la ingeniería y las ciencias. En ese contexto modela los sistemas que tienen estructura de red. De tal modo es común denominar red a un grafo, nodo a un vértice y arco a una arista. Además, los arcos suelen tener una carga que puede representar una medida como distancia, peso, flujo etc. También es común que los nodos sean nombrados por números, los arcos por letras mayúsculas, o incluso invertir esta forma de denominación. La carga de los arcos puede anotarse por cantidades sobre los mismos y cuando un arco es dirigido se representa esta situación con una flecha cuyo origen es el nodo inicial y su final el nodo terminal.

V.2 La ruta más corta

Comencemos con un problema.

En la localidad de Los Antiguos, provincia de Santa Cruz, se proyecta construir, junto al lago Buenos Aires, un complejo de 8 viviendas turísticas situadas, de acuerdo a las características del terreno, a las distancias que en cientos de metros están dadas por la siguiente Gráfica 6.

Gráfica 6



Las casas estarán interconectadas por caminos de tierra que también seguirán la forma del diagrama. Sin embargo, como la casa 1 se encuentra en una de las salidas a la ruta desde el predio y la casa 8 en la otra, se desea asfaltar los tramos de camino necesarios para que ambas salidas queden vinculadas por una vía de circulación rápida y segura en caso de nevadas o emergencias. Por tal razón y, también para minimizar costos, es necesario hallar la ruta más corta entre ambas casas a efecto de construir el camino.

Está claro que la red de casas se modela por un grafo donde cada casa es un nodo y el camino que une cada casa con otra, un arco que puede ser recorrido en ambos sentidos. Los números dispuestos sobre cada arco en el grafo representan en este caso distancias.

Este tipo de problema puede resolverse utilizando un algoritmo desarrollado en 1959 por el informático neerlandes Edsger Dijkstra. La idea consiste en hallar el camino mínimo entre dos nodos de un grafo, lo que en este caso aplica para calcular la ruta más corta entre la casa 1 y la 8. Obsérvese que la red del problema es conexa, todos los nodos están conectados, y también es no dirigida, lo que supone que no hay ningún arco con incidencia dirigida solamente en un sentido.

El algoritmo trabaja evaluando rutas más cortas incorporando nuevos nodos en cada iteración. Los nodos que se incorporan se denominan resueltos. Cada nodo resuelto puede estar conectado a uno o varios aún no resueltos. Pero de estos sólo se considerarán, como candidatos a resolver, aquellos cuya ruta desde el origen, que pasa por el nodo resuelto vinculante, es mínima. Así en cada iteración se elige entre todas las rutas analizadas la más corta. En cada iteración se realizan los siguientes pasos:

- i) Se consideran los nodos resueltos conectados a nodos aún no resueltos
- ii) Para cada nodo resuelto se elige el nodo no resuelto más cercano
- iii) Para cada uno de estos nodos aún no resueltos se calculan sus distancias desde el origen a través del camino que pasa por el nodo ya resuelto que los vincula.
- iv) De esas distancias calculadas se elige la mínima y el nodo correspondiente es un nuevo nodo resuelto.
- v) Se anota la conexión que resulta de la iteración.

El procedimiento finaliza cuando el camino óptimo llega al nodo final. En todas las operaciones pueden presentarse empates entre múltiples casos.

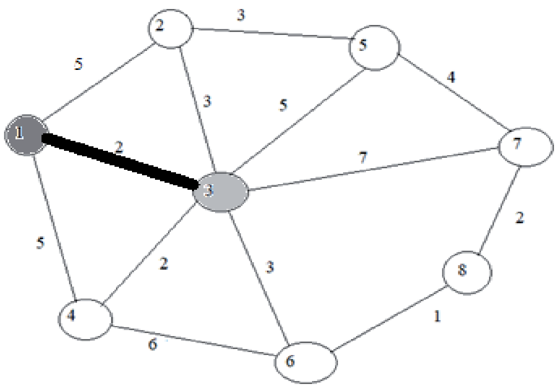
En nuestro problema, para comenzar, se considera el nodo 1 resuelto. El candidato a conectar es el nodo 3 pues es en este caso el de distancia menor al 1 que es el origen. La distancia es 2 y el nodo conectado en esta iteración es el 3. Tenemos entonces el arco 1-3 como última conexión. Esta información puede escribirse algorítmicamente en la siguiente Tabla 1. Sobre ella continúa como se estableció en los puntos i) a v)

Tabla 1

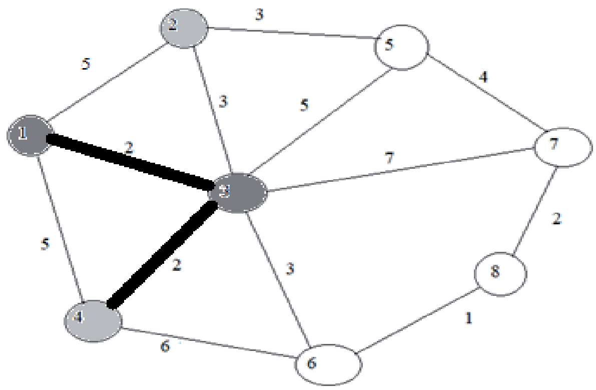
Iteración	Nodos Resueltos Conectados a No Resueltos	Nodos no Resueltos más Cercanos	Distancias	Nuevo Nodo Resuelto	Distancia Mínima	Última Conexión
1	1	3	0+2=2	3	2	1-3
2	1	2	0+5=5			
		4	0+5=5			
	3	4	2+2=4	4	4	3-4
3	1	2	0+5=5	2	5	1-2
	3	2	2+3=5	2	5	3-2
		6	2+3=5	6	5	3-6
	4	6	4+6=10			
4	2	5	5+3=8			
	3	5	2+5=7			
	6	8	5+1=6	8	6	6-8

Es decir; yendo hacia atrás el nodo 8 se conectó con el nodo 6, el 6 con el 3 y este con el 1. La ruta más corta es 1-3-6-8 y la distancia es 6 cientos de metros. El procedimiento realizado se muestra para cada iteración en las gráficas siguientes.

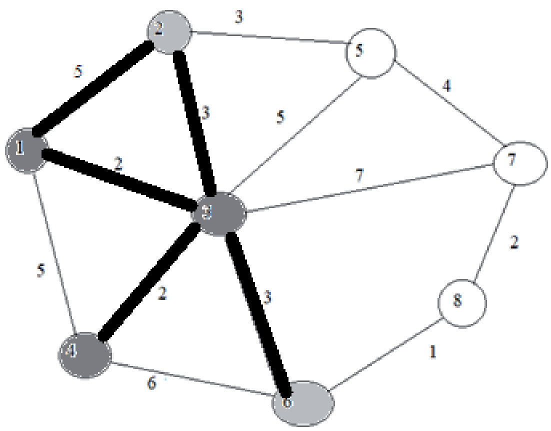
Iteración 1



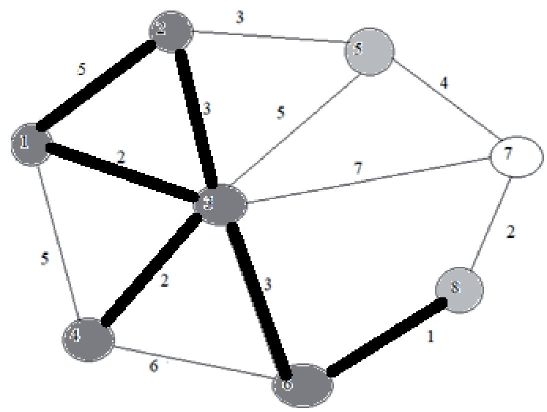
Iteración 2



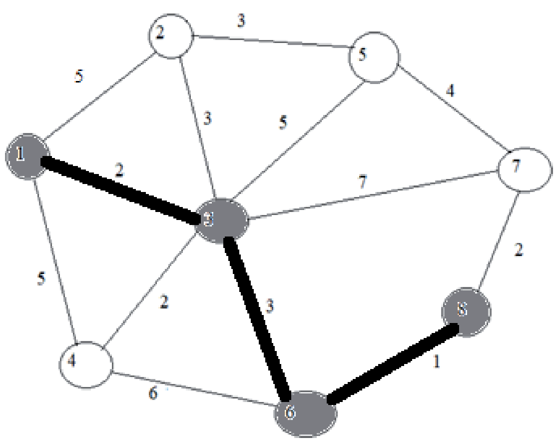
Iteración 3

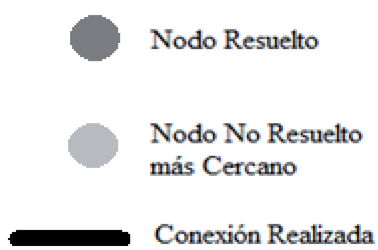


Iteración 4



Ruta más corta





V.3 El árbol de expansión minimal

Supongamos ahora que, en el complejo de casas con el cual estamos ejemplificando, hay que tender el cableado de la luz. Es claro que todas las casas deben ser alcanzadas por la red de luz y que resulta óptimo garantizar el mínimo costo de instalación utilizando la menor cantidad de cable y postes. Para ello se puede diseñar una estructura en árbol que tenga mínima expansión. Es decir que alcance a todas las casas con el tendido mínimo de cable.

El algoritmo para resolver este problema fue desarrollado por el matemático norteamericano Joseph Kruskal en 1956. Sus pasos se detallan a continuación.

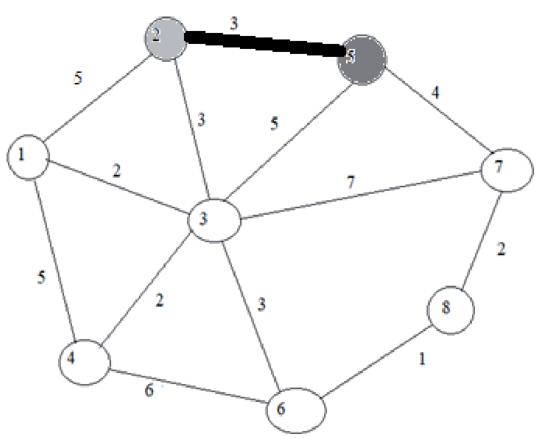
i) Sobre el grafo se elige un nodo cualquiera y se lo considera conectado, es decir resuelto.
ii) De todos los nodos no resueltos se elige los que sean más próximos a uno de los resueltos. Se los conecta y se los considera resueltos.
iii) El procedimiento finaliza cuando todos los nodos están resueltos y el árbol de expansión minimal queda formado.

Para nuestro ejemplo procedemos entonces según indica la tabla.

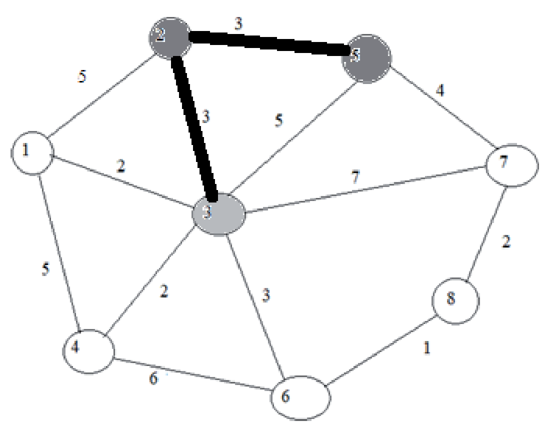
Iteración	Nodos resueltos	Nodo no resuelto más próximo	Nueva conexión
1	5	2	5-2
2	5 y 2	3	2-3
3	5, 2 y 3	1 y 4	3-1 y 3-4
4	5, 2, 3, 1 y 4	6	3-6
5	5,2,3,1,4 y 6	8	6-8
6	5,2, 3, 1, 4, 6 y 8	7	8-7

Las conexiones resultantes constituyen el árbol mínimo buscado. Se muestran ahora en forma gráfica los distintos pasos iterativos realizados.

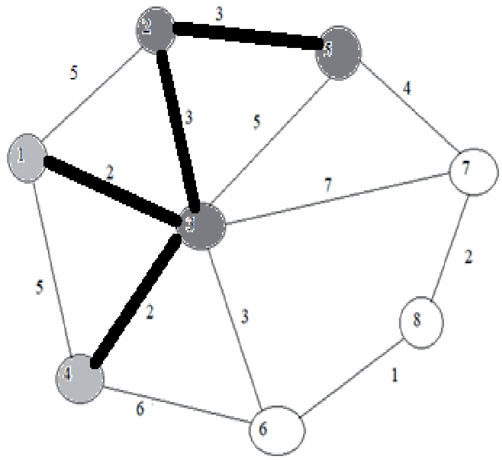
Iteración 1



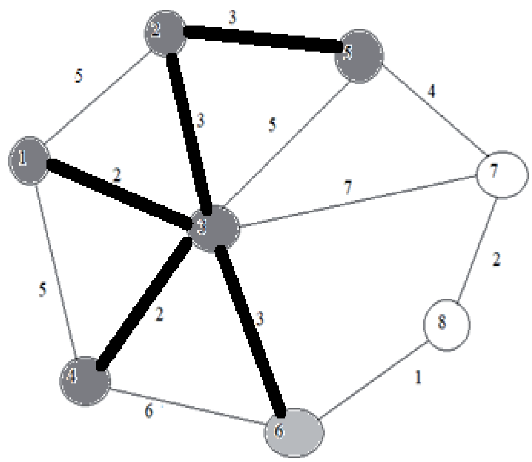
Iteración 2



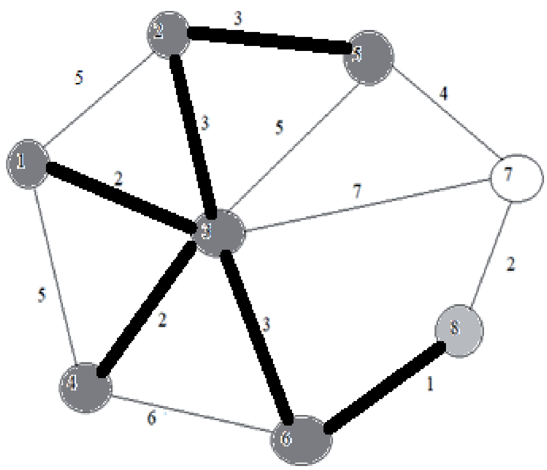
Iteración 3



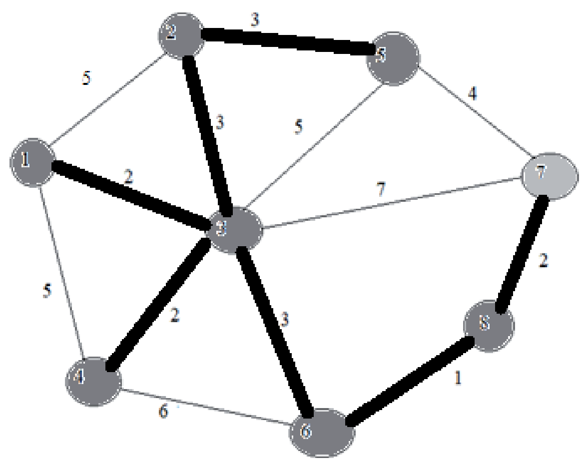
Iteración 4



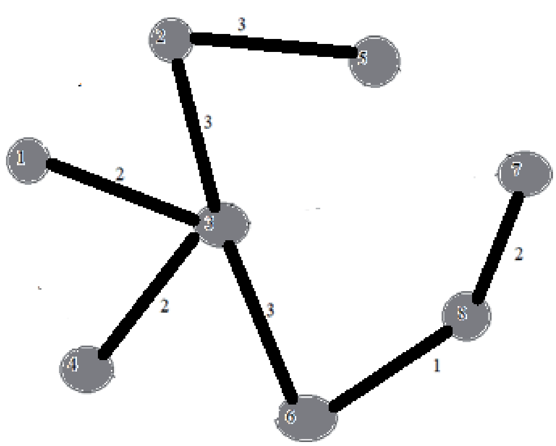
Iteración 5

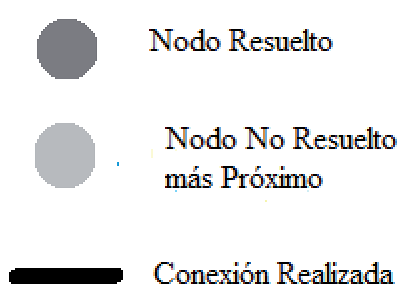


Iteración 6



El árbol de expansión minimal queda:



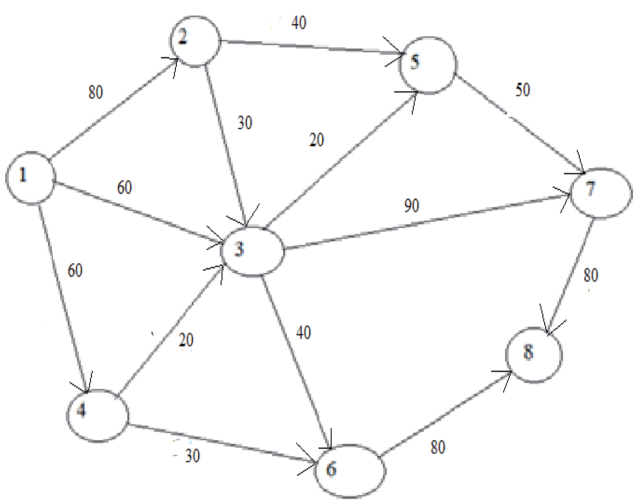


Cualquiera sea la elección del nodo inicial el árbol de expansión minimal será el mismo.

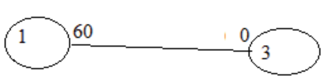
V.4 El flujo máximo

El ya mencionado complejo habitacional de Los Antiguos se construirá sobre un antiguo barrio antes existente y se han aprovechado las cañerías viejas de agua potable pues estaban bien conservadas. Esas cañerías admiten distinto flujo de agua, medido en metros cúbicos de agua por mes, entre casa y casa. Los valores respectivos se han señalado sobre cada arco de la red. El barrio se encuentra en una pendiente que cae desde la casa representada por el nodo 1 hacia la casa que corresponde al nodo 8. Esto quiere decir que cada arco tendrá una dirección de flujo pues, sin contar con una bomba, el agua fluirá en el sentido de la pendiente. La cuestión es que, para conocer el volumen óptimo del tanque, que se ubicará cerca del nodo 1 con el fin de abastecer el consumo mensual del complejo, hay que calcular el flujo máximo de agua que podría correr por la red desde el nodo 1 al nodo 8. La red queda esquematizada, con los flujos y la pendiente de caída respectivos en la Gráfica 7.

Gráfica 7

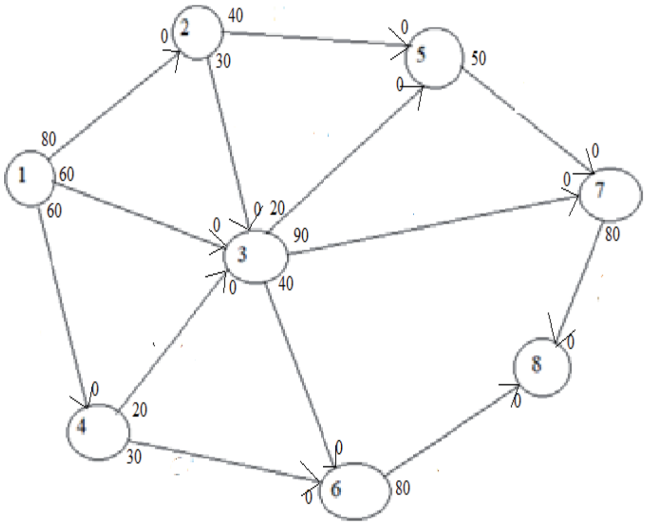


Para calcular el flujo máximo de agua que puede llevarse desde el nodo 1, fuente, hasta el nodo 8, sumidero, hay que considerar que cada arco es dirigido y que inicialmente todo el flujo se encuentra en el nodo origen y nada en el otro nodo extremo. Por ejemplo, en el arco que incide desde el nodo 1 sobre el nodo 3 tal situación puede representarse por:



Extendiendo esta idea, toda la red queda como se ve en la Gráfica 8

Gráfica 8



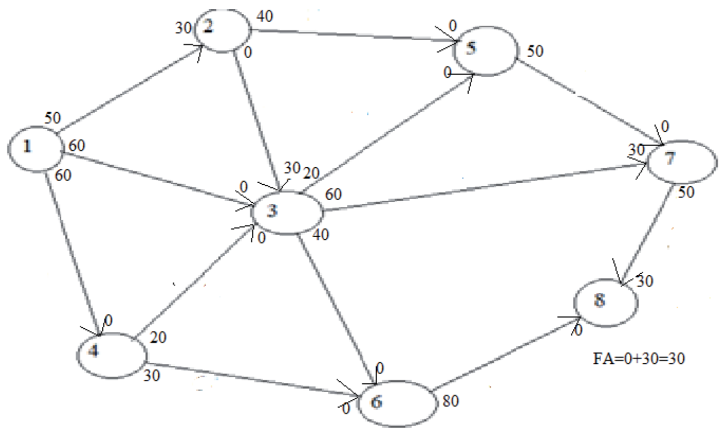
En 1956 los matemáticos norteamericanos Lester Ford y Delbert Fulkerson publicaron un algoritmo que permite resolver el problema del flujo máximo en una red conexa y dirigida. Considerando un nodo inicial fuente, que llamaremos O, y un nodo final sumidero, que llamaremos T, los pasos del método resultan los siguientes.

- i) Identificar una cadena (trayectoria) factible desde O hasta T. Si no se puede hallar ninguna trayectoria que permita pasar flujo desde O hasta T el procedimiento finaliza
- ii) Determinar su capacidad calculando el mínimo de capacidades de sus arcos
- iii) El flujo que llega a T a través de esa trayectoria se acumula sumado en T.
- iv) Recalcular los flujos sobrantes para cada arco y la red resultante. Volver a i)

Veamos ahora nuestro ejemplo:

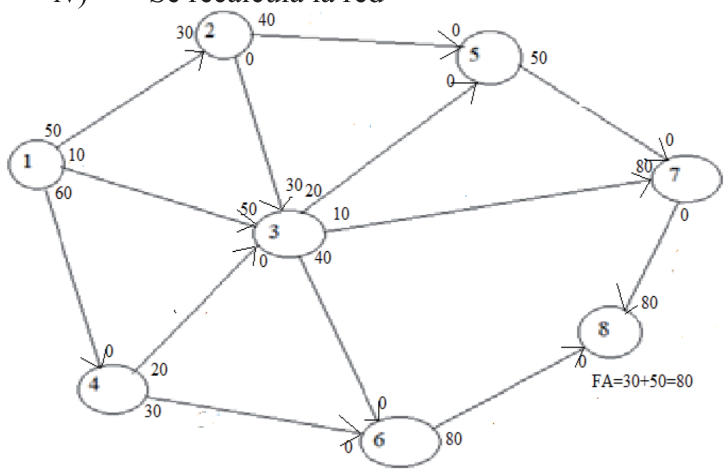
Iteración 1:

- i) Se elige arbitrariamente la trayectoria 1->2->3->7->8 y se observa que puede pasar flujo de O a T.
- ii) Se calcula el mínimo flujo que puede llegar desde 1 hasta 8 atento a lo que desde cada nodo inicial de un arco de la trayectoria puede fluir hasta el nodo final del mismo. Es decir; $min\{80, 30, 90,80\} = 30$.
- iii) Se suma acumulado en T el flujo aportado por la trayectoria: FA=0+30=30.
- iv) A continuación, se recalcula la red.



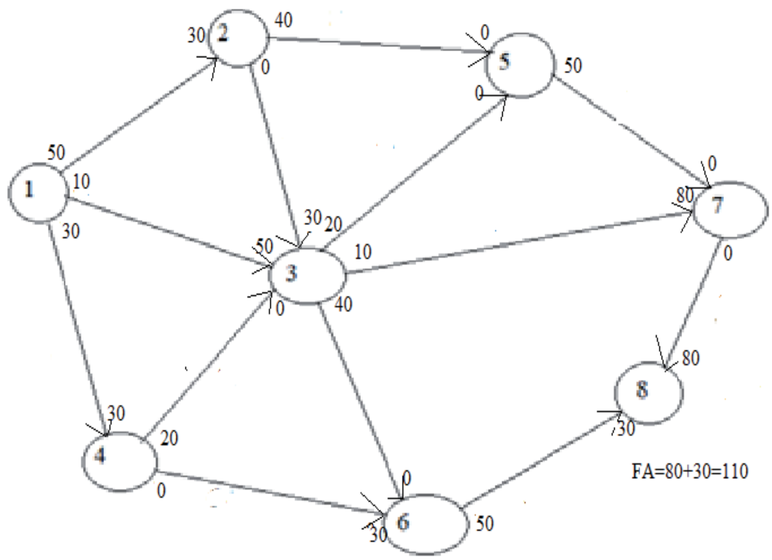
Iteración 2:

i) Se elige la trayectoria 1->3->7->8 y se observa que puede pasar flujo de O a T.
ii) $min\{60,60,50\} = 50$
iii) FA=30+50=80
iv) Se recalcula la red



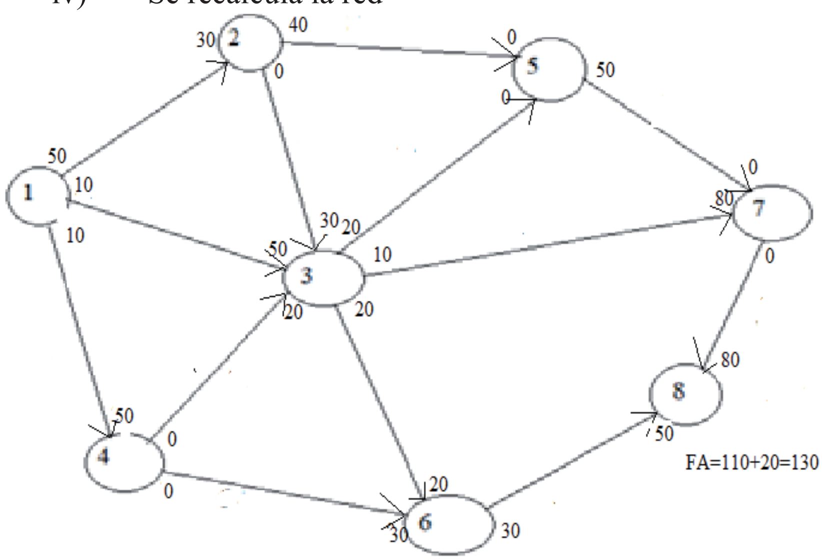
Iteración 3:

i) Se elige la trayectoria 1->4->6->8 y se observa que puede pasar flujo de O a T.
ii) $min\{60,30,80\} = 30$
iii) FA=80+30=110
iv) Se recalcula la red



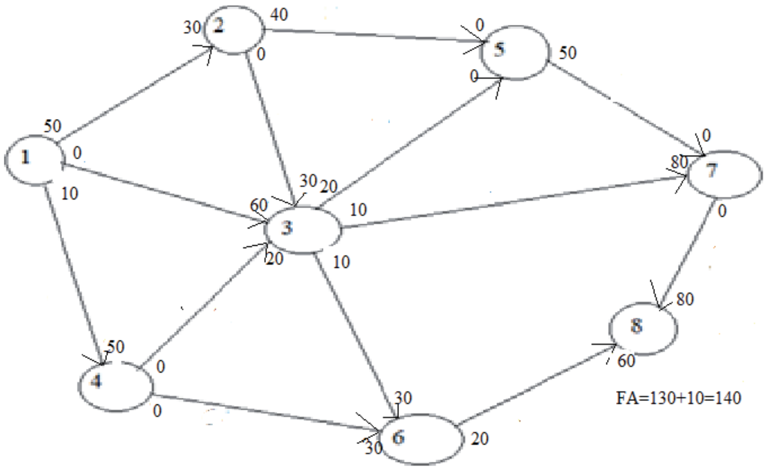
Iteración 4:

i) Se elige la trayectoria 1->4->3->6->8 y se observa que puede pasar flujo de O a T.
ii) $min\{30,20,40,50\} = 20$
iii) FA=110+20=130
iv) Se recalcula la red



Iteración 5:

i) Se elige la trayectoria 1->3->6->8 y se observa que puede pasar flujo de O a T.
ii) $min\{10,20,30\} = 10$
iii) FA=130+10=140
iv) Se recalcula la red



Ya no es posible encontrar una trayectoria que llegue con flujo mayor que 0 desde O hasta T. Por tal motivo y a pesar de que todavía hay capacidad de emisión de flujo desde el nodo 1 el procedimiento no puede continuar y el flujo máximo para esta red es 140 m^3 por mes.

Hallar trayectorias admisibles es algo complicado de hacer en forma visual si aumenta considerablemente el número de nodos y arcos. Por supuesto es posible establecer computacionalmente las reglas del algoritmo de modo de hallarlas, calcular los mínimos, el flujo acumulado y la red resultante.

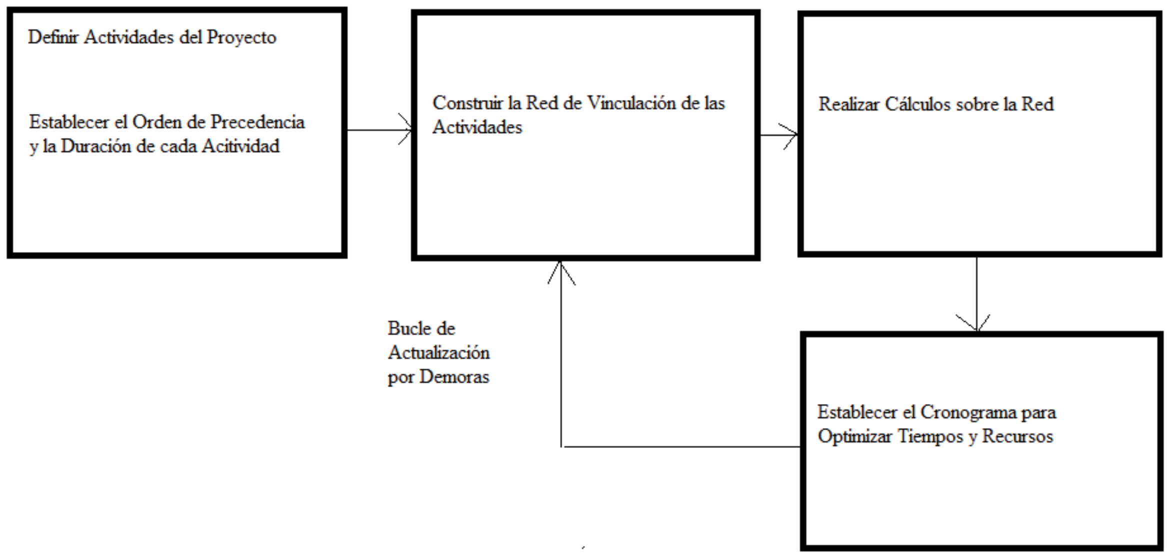
V.5 El camino critico

V.5.1-Introducción

Cuando en ingeniería se realiza un proyecto se evalúan distintos aspectos. Así, se analizan sus distintas etapas, el tiempo necesario para llevarlas a cabo, los costos de mano de obra e insumos, y toda otra situación de relevancia para la tarea a emprender. De tal modo, se identifican las actividades que es necesario realizar y su concatenación desde que comienza la ejecución del proyecto hasta que termina el mismo. Estas actividades muy comúnmente no pueden realizarse sin tener en cuenta un orden de precedencia. Es decir; algunas de ellas requerirán, para ser ejecutadas, que otras ya lo hayan sido o al menos estén en ejecución. Algunas otras quizás puedan llevarse a cabo en cualquier momento antes de la finalización, y se disponga por ende de cierta holgura temporal para realizarlas. En cualquier caso, siempre hay un hilo conductor que establece el tiempo mínimo en el que puede desarrollarse todo el proyecto, y también los puntos temporales donde harán falta las distintas inversiones parciales de dinero. Esa línea temporal de actividades desde el principio hasta el final es lo que se denomina camino crítico. En él se armonizan las precedencias estrictas entre distintas actividades que llamamos críticas y su análisis nos revela también la holgura con la que pueden ejecutarse, dentro del proyecto, aquellas actividades que sean no críticas sin modificar el tiempo de finalización.

El procedimiento para hallar el camino crítico se denomina CPM, acrónimo del inglés Critical Path Method. Fue desarrollado conjuntamente en los sectores de investigación de operaciones de las empresas norteamericanas Dupont y Remington Rand en 1957 con la idea de establecer una forma estandarizada de planear, programar y controlar un proyecto. En general el método involucra 4 partes de acuerdo al diagrama de la Gráfica 10

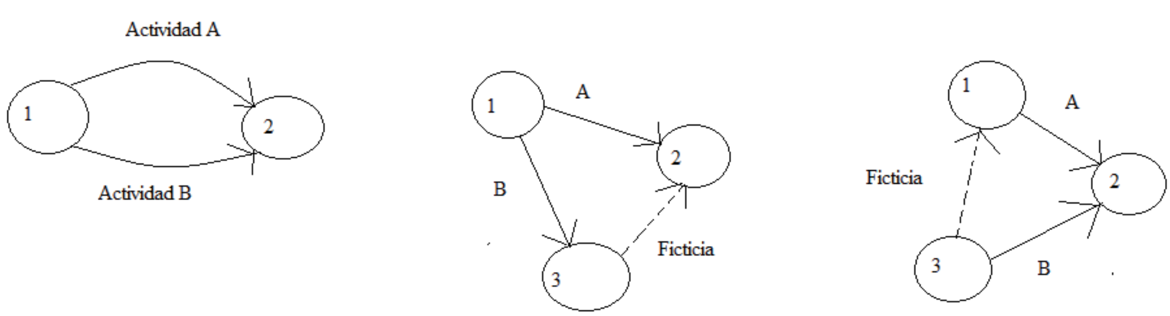
Gráfica 10



V.5.2- Construcción de la red

Cada actividad se representará por un solo arco dirigido y cada arco por un par distinto de vértices. El orden de las actividades en la red deberá guardar las precedencias establecidas al definirlas, por lo cual al analizar la ubicación del arco correspondiente habrá que tomar en cuenta que actividades preceden a la actual, cuales la siguen inmediatamente y si hay actividades concurrentes o simultáneas. En este caso y con el fin de representar cada arco con un par distinto de vértices se puede agregar una actividad ficticia. La Gráfica 11 muestra dos actividades concurrentes y distintas soluciones que incorporando una actividad ficticia logran la representación en la forma buscada.

Gráfica 11

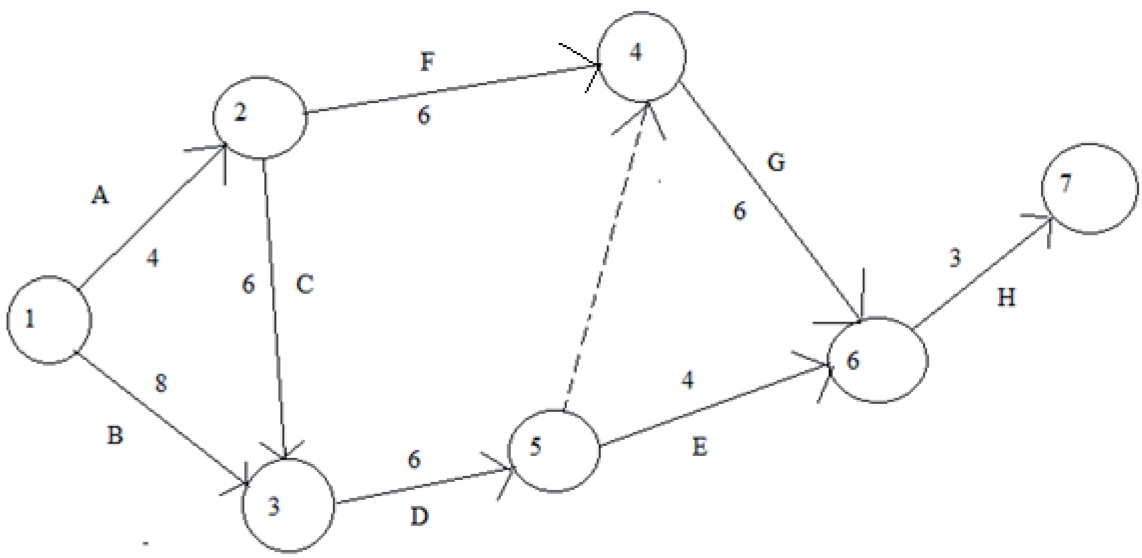


Con estas ideas analicemos ahora el proyecto de construcción del complejo de viviendas en Los Antiguos que ya veníamos considerando. La definición de las actividades necesarias para construirlo, el orden de precedencia establecido por razones de técnica ingenieril y los tiempos necesarios para la ejecución ajustados según el flujo de inversiones posible, condujeron a la siguiente tabla.

Actividad	Denominación	Duración (semanas)	Precedencias
Excavación y construcción de caminos internos	A	4	---
Cimientos y estructuras	B	8	
Techos	C	6	A
Paredes	D	6	B y C
Instalación de Cerramientos	E	4	D
Redes de luz, agua, gas y cloacas	F	6	A
Consolidaciones y asfaltos	G	3	F y D
Parques y jardines	H	3	G y E

De acuerdo a esta información se construye la red del proyecto que se ve en la Gráfica 12

Gráfica 12



Para cumplir con las precedencias y respetar la regla de representar cada actividad con un par diferente de nodos se optó por incorporar una actividad ficticia, de flujo 0, iniciada en el nodo 5 y terminada en el nodo 4 desde el cual comienza la actividad G precedida entonces por F y D.

V.5.3- Los cálculos sobre la red

Estos cálculos se realizan para cumplir con dos objetivos: establecer la duración del proyecto y clasificar las actividades en críticas y no críticas. Una actividad se considera crítica cuando no hay margen de holgura para determinar sus tiempos de inicio y finalización. En cambio, si ese margen existe, la actividad se evaluará como no crítica.

La idea del algoritmo CPM es trabajar con eventos. Un evento es conceptualmente el momento en que termina una actividad y/o se inicia otra. Es decir, un evnto está representado por un nodo de la red construida. Podemos definir entonces:

- Tiempo más temprano de ocurrencia del evento j. $\boxed{}_j$
- Tiempo más tardío de ocurrencia del evento j. $\triangle_j$
- Duración de la actividad representada por el arco entre nodos *i* y *j*. D_{ij}

Realizaremos un cálculo en dos pasos:

i. Paso hacia adelante. Determinar los tiempos más tempranos de ocurrencia de los eventos
ii. Paso hacia atrás. Determinar los tiempos más tardíos de ocurrencia de los eventos

i. Paso hacia adelante.

Comienza en el nodo inicial y continua hacia adelante hasta el último.

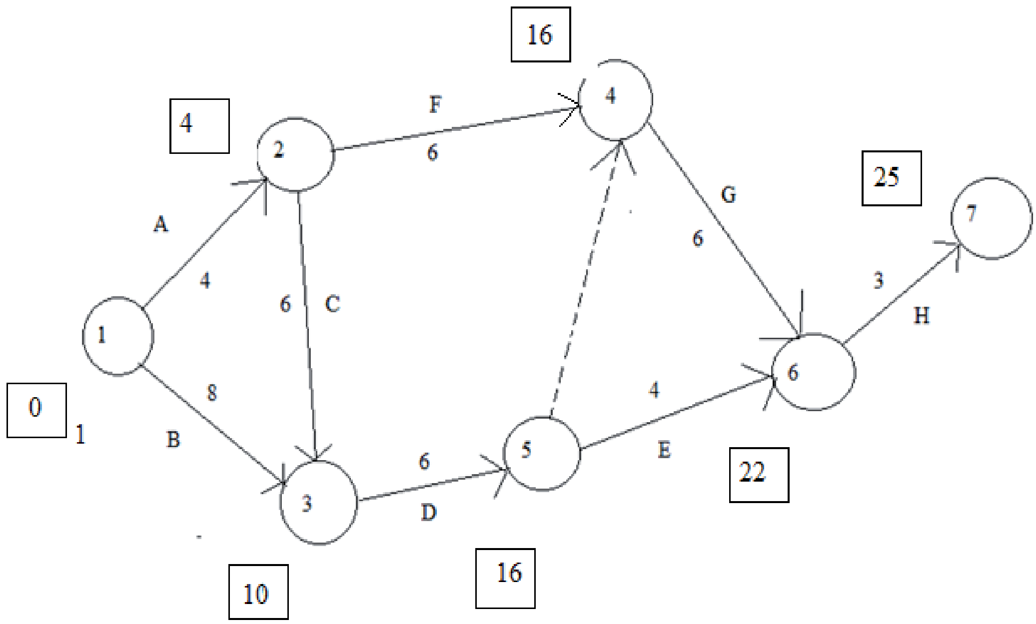
Se $\boxed{0}_1$ coloca en 0 el tiempo de ocurrencia del evento 1 que es el comienzo del proyecto.

La $\boxed{\text{tem}}_j$ cantidad tem representa el tiempo más temprano en el que todas las actividades concurrentes al nodo j estarán realizadas y por lo tanto se considerará completamente cumplido el evento. Se calcula

$$\text{tem}= \quad \text{Max}\{\boxed{}_p + D_{pj},\ \boxed{}_q + D_{qj}, \ldots,\ \boxed{}_r + D_{rj}\}$$

los nodos subindicados con p, q, …, r marcan el evento inicial de cada una de las actividades que concurren al j. D_{pj}, D_{qj}, …, D_{rj} son las respectivas duraciones de esas actividades.

En nuestra red ejemplo este cálculo sería el siguiente



Por ejemplo, en el nodo 3 el tiempo de terminación de la actividad B, cimientos y estructuras, indicaría que desde el nodo 1 habría que sumar las 8 semanas correspondientes. Sin embargo, la terminación de la actividad C, techos, que también concurre al nodo 3 requiere sumar al propio tiempo el que dura la actividad A, excavación y construcción de caminos internos, que le precede. Por lo tanto, el tiempo más temprano en que finaliza toda actividad concurrente al nodo 3 y pueden empezarse las paredes, actividad D, es 10 semanas. El mismo criterio, ya señalado en la fórmula de cálculo de tem arriba, se aplica en los demás nodos.

ii. Paso hacia atrás

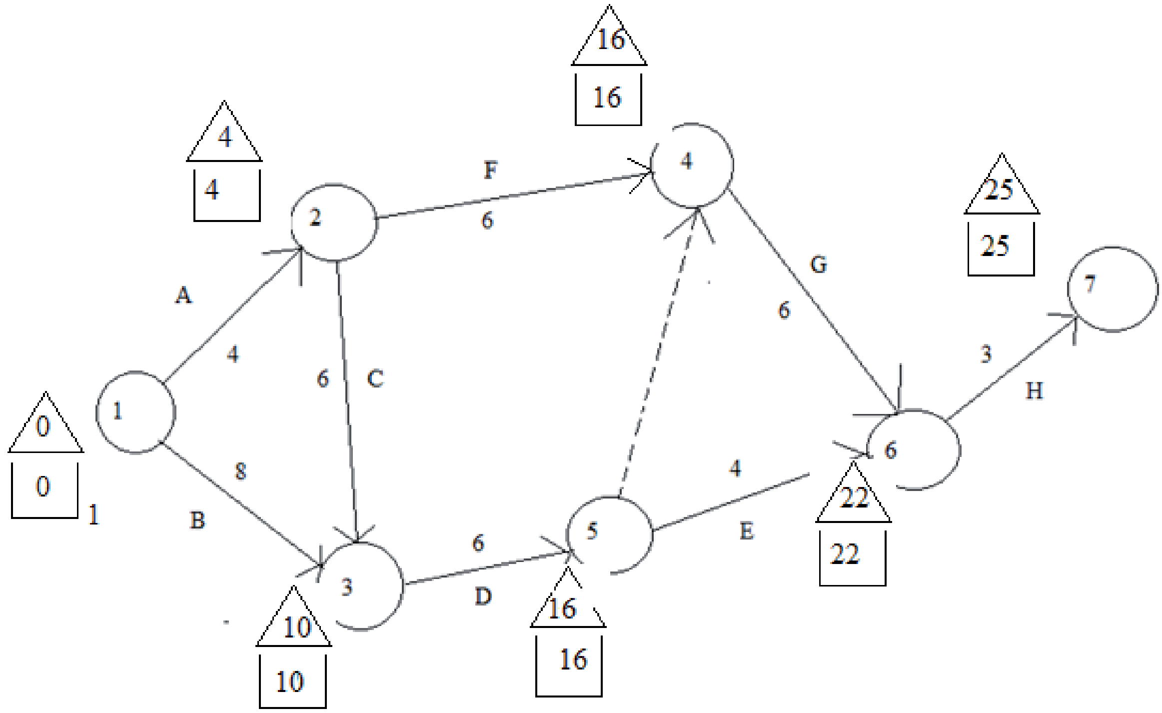
Ahora sabemos que la construcción del barrio deberá demorar 25 semanas, pero aún no hemos establecido que actividades resultan criticas concatenándose de modo de terminar la obra en ese tiempo y cuales son aquellas que tienen una holgura temporal, dentro del lapso establecido, y en qué medida la poseen. El paso hacia atrás permite entonces resolver la cuestión. Comienza en el nodo final y retrocede desde él hasta el inicio.

$\triangle_{25}{}_n = \boxed{25}_n$ Se toma el tiempo obtenido en el paso hacia adelante para comenzar el retroceso. En el caso del ejemplo las 25 semanas tar es el tiempo

$\triangle_{tar}{}_j$ más tardío al que podría empezar la actividad que comienza en el nodo j de forma que, de acuerdo a la precedencia de actividades establecida, se complete el proyecto en el tiempo calculado. Resulta:

$$\triangle_{tar}{}_j = \min \{ \triangle_p \; -Djp, \triangle_q \; -Djq, \ldots, \triangle_r \; -Djr\}$$

El cálculo hacia atrás sobre la red da:

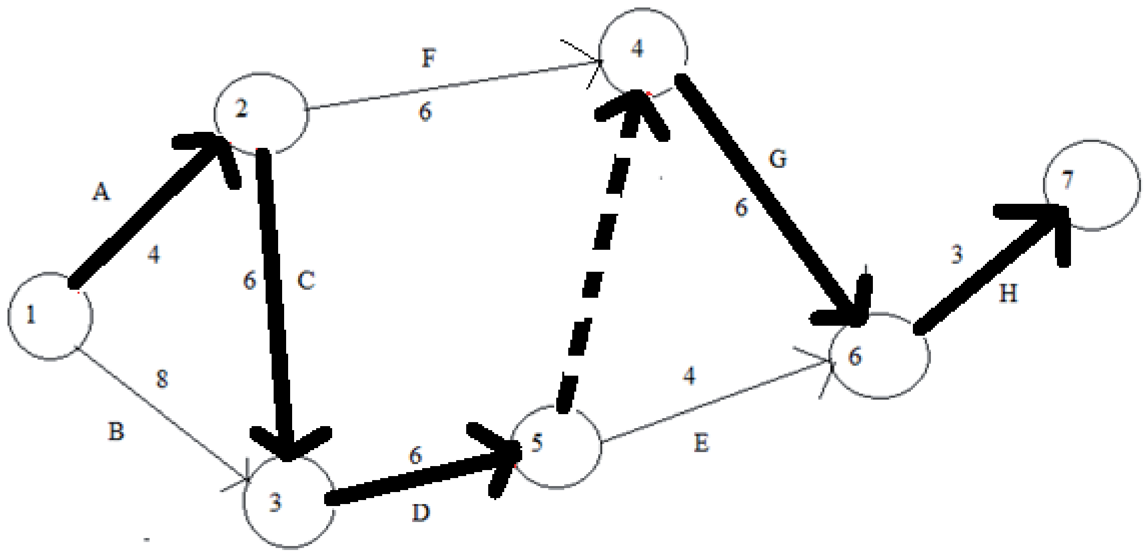


Los respectivos valores de tar fueron calculados por la fórmula escrita más arriba. Ahora debemos analizar cuál es el camino crítico. Para ello establezcamos que una actividad crítica, definida por el par de nodos i y j, debe ser tal que, en esos nodos, los tiempos más tempranos y los más tardíos deben ser iguales, pero, además las diferencias de tiempos tardíos entre nodos y de tiempos tempranos entre nodos deben ser iguales a la duración de la actividad que el arco entre ambos representa. En símbolos:

- $\triangle_i = \square_i$
- $\triangle_j = \square_j$
- $\triangle_j - \triangle_i = \square_j - \square_i = D_{ij}$

Aunque pudiera no haber ocurrido, en nuestro cálculo todas las actividades satisfacen las primeras dos igualdades, mientras que la tercera no se cumple para la actividad B y tampoco para las actividades E y F. De tal forma el camino crítico que resulta el hilo conductor del proyecto en el tiempo, concatena una a continuación de la otra a las actividades A->C->D->G->H. La duración establecida para la ejecución del proyecto es de 25 semanas y las actividades no críticas B, E y F podrán ejecutarse, respetando las precedencias establecidas, con cierta holgura a fijar. La Gráfica 13 muestra la ruta crítica.

Gráfica 13



Como era de esperar la actividad ficticia no figura pues ha jugado solo el papel de vincular nodos para respetar las precedencias.

V.5.4- Construcción del cronograma

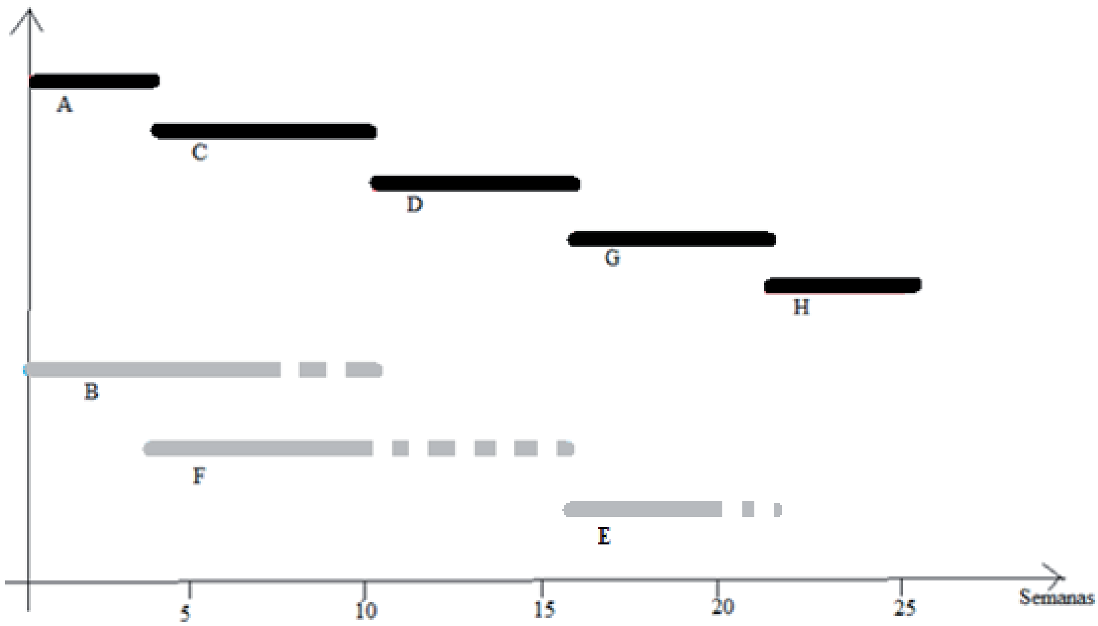
El cronograma nos permitirá controlar el conjunto de las tareas en su evolución y determinar claramente la holgura con la que se cuenta para desarrollar cada actividad no crítica. Si se busca mantener el tiempo de ejecución calculado para el proyecto, una actividad representada por el arco que va desde el nodo i al nodo j, tendrá como holgura la diferencia establecida entre el tiempo más tardío de ocurrencia del evento j y la suma del tiempo más temprano del evento i más su duración. Es decir, la holgura disponible es:

$\triangle_j - (\square_i + Dij)$ Todas las actividades que tengan holgura igual a 0 estarán sobre el camino crítico.

No solo las actividades tienen holgura. Los eventos también pueden poseerla cuando su tiempo más tardío de ocurrencia sea mayor que el más temprano. En ese caso, la holgura del evento estará indicando lo que puede demorarse el cumplimiento de la actividad que en él finaliza, sin que se atrase la realización de todo el proyecto.

Veamos ahora en la Gráfica 14, el cronograma correspondiente a nuestro ejemplo, que no posee holgura para ningún evento, pero sí incluye actividades holgadas.

Gráfica 14



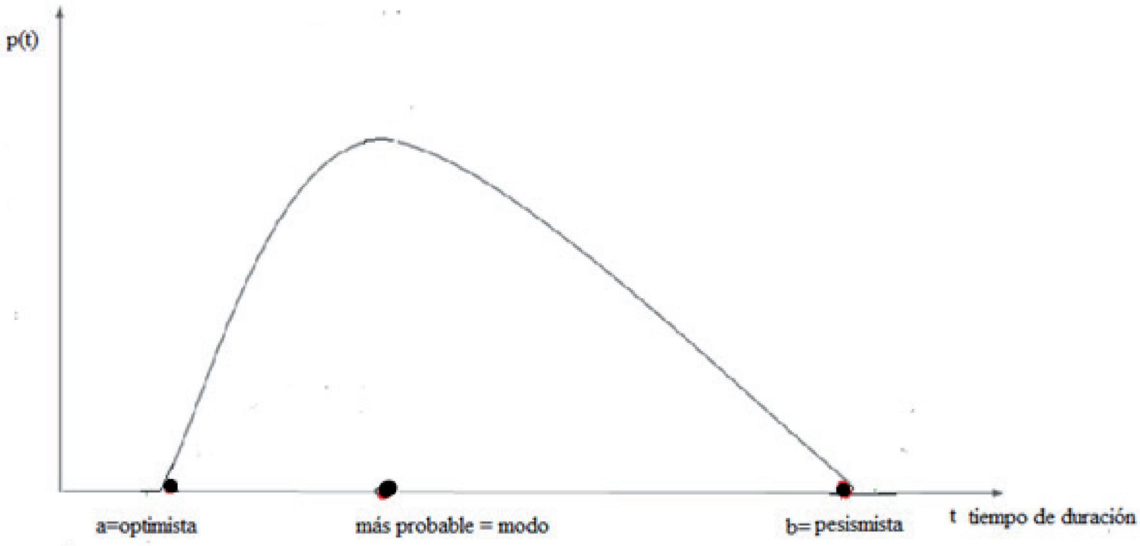
Las actividades señaladas en negro en la Gráfica 14 se concatenan una después de la otra hasta completar el camino crítico a lo largo de las 25 semanas. Las señaladas en gris son las actividades no críticas cuya holgura se marca con la línea punteada. En el caso de la actividad B el tramo va desde el comienzo 0 semanas de las actividades hasta la conclusión de la 10ma semana. Como la actividad se desarrollará en 8 semanas, hay dos que fueron marcadas con línea punteada en forma arbitraria para evidenciar la holgura. Precisamente es esa holgura la que permitiría comenzar la actividad B terminada la 2da semana, ya que todavía deberán transcurrir 8 semanas hasta comenzar con la actividad D que la requiere terminada. Por similares razones la holgura correspondiente a la actividad F, que puede iniciarse concluida la actividad A, es de 6 semanas.

V.6 PERT

Program Evaluation and Review Techniques es el método cuyo acrónimo, en inglés, es precisamente PERT. Esta técnica de revisión y evaluación de programas de producción se diferencia del camino crítico en el hecho esencial que la duración de cada una de las actividades que conforman el proyecto es una variable aleatoria. Es decir, ya no tenemos una certeza sobre el tiempo de duración de cada actividad sino una incertidumbre acerca de él, que medimos a través de una distribución de probabilidad. Habrán de considerarse entonces tiempos optimistas, pesimistas y más probables de ejecución, que caracterizarán el rango de esa variable aleatoria. Por su naturaleza, el PERT resulta muy adecuado para evaluar y controlar proyectos de investigación y desarrollo tecnológicos, en los cuales comúnmente no es posible fijar con precisión el tiempo que durará la realización de cada una de las actividades. El método y sus suposiciones fueron planteados en EEUU hacia 1956, para aplicaciones de tipo militar, casi en simultáneo con el CPM.

Se comienza por suponer que el tiempo que tarda en desarrollarse una actividad es una variable aleatoria que se distribuye β. Según sus parámetros la función de densidad de tal variable tiene muy distintas formas. Los parámetros elegidos para el caso conducen a la forma aproximada que se muestra en la Gráfica 15.

Gráfica 15



Hay un tiempo optimista, un tiempo pesimista y uno más probable *m* que se corresponde con el modo de la variable aleatoria. Se ve claramente que la distribución no es simétrica y que por lo tanto el valor del modo habrá de ser en este caso menor que el de la media o tiempo esperado, que es precisamente la esperanza matemática de la distribución que responde a la fórmula $t_e = \int_{-\infty}^{\infty} tp(t)dt$

A continuación, se asume un segundo supuesto. Como la función es medianamente simétrica y acampanada, en el intervalo $[optimista, pesimista]$ caben 6 desvíos estándar a semejanza de lo que ocurriría en una distribución normal aproximante. Por lo tanto, $\sigma^2 = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$ resultará una buena aproximación de la varianza de la distribución β que modela el tiempo de desarrollo de la actividad. A su vez, se aproxima el valor esperado de la variable *t* por medio de la fórmula $t_e = \frac{1}{3}(2m + \frac{1}{2}(a+b))$ o lo que resulta lo mismo $t_e = \frac{2}{3}m + \frac{1}{6}(a+b)$.

Una tercera e importante suposición a realizar es que los tiempos de duración de las distintas actividades son independientes entre sí. Esto quiere decir que, si bien hay precedencias establecidas, el lapso de tiempo que insuma una actividad no está condicionado por el que requiera cualquier otra posterior o anterior. Una vez iniciada una actividad su tiempo de ejecución depende solo de ella y no está relacionado con lo que demore cualquier otra. En términos probabilísticos los tiempos de las actividades son entonces variables aleatorias independientes.

El procedimiento requiere entonces calcular para cada actividad A_i, los tiempos esperados de ejecución t_{e_i} y las respectivas varianzas $\sigma_i{}^2$. En la red del proyecto cada actividad tiene una duración promedio t_{e_i} que se utiliza para efectuar los pasos hacia adelante y hacia atrás ya vistos en IX.5. En base a estos cálculos se determina la ruta crítica y las actividades no críticas. La duración estimada para la ruta crítica resulta aquí la suma de las estimaciones promedios de cada una de las actividades que la integran. En realidad, esta suma es la esperanza matemática de la suma de las variables aleatorias que modelan el tiempo de ejecución de las *r* actividades que forman el camino crítico. En virtud del teorema del límite central, la variable aleatoria suma tiene entonces una distribución normal cuya media es $\mu = \sum_{i=1}^{r} t_{e_i}$. Como tales variables aleatorias se supusieron independientes la varianza de su suma resulta $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i{}^2$.

Lo apuntado hasta aquí permite evidenciar una de las interesantes acciones que permite el PERT. En efecto, una vez efectuados los cálculos y establecida la media y el desvío estándar de la distribución normal que modela la duración de todo el camino crítico, resulta posible calcular la probabilidad de que el proyecto se finalice a un cierto tiempo *T*. Utilizando la normal estandarizada se puede obtener: $P\left(\frac{t-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \leq \frac{T-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right)$. Como es evidente, puede también realizarse el cálculo inverso para evaluar, dada un determinado grado de certeza o probabilidad, cuál sería la cantidad de tiempo *T* en que se la alcanzaría.

Ejemplo 1:

En la cátedra de Investigación Operativa se ha decidido programar, en código abierto, un paquete informático con los algoritmos que se exponen durante el dictado de la materia, incluidas también las facilidades gráficas utilizadas para visualizar los problemas y sus soluciones. Cada tema que forma parte del programa define una actividad de programación cuyas precedencias son establecidas en función de tener resueltos ciertos algoritmos para poder desarrollar la programación de los otros. Como en todo proyecto de desarrollo de software, hay aquí ciertas incertezas en cuanto al grado de dificultad que deba superarse en cada caso, por lo que ha parecido prudente establecer tiempos optimistas, pesimistas y más probables de cada actividad. Como tarea inicial se han establecido las precedencias que debieran tener las actividades y los tres tiempos apuntados. Esto se volcó en la tabla siguiente:

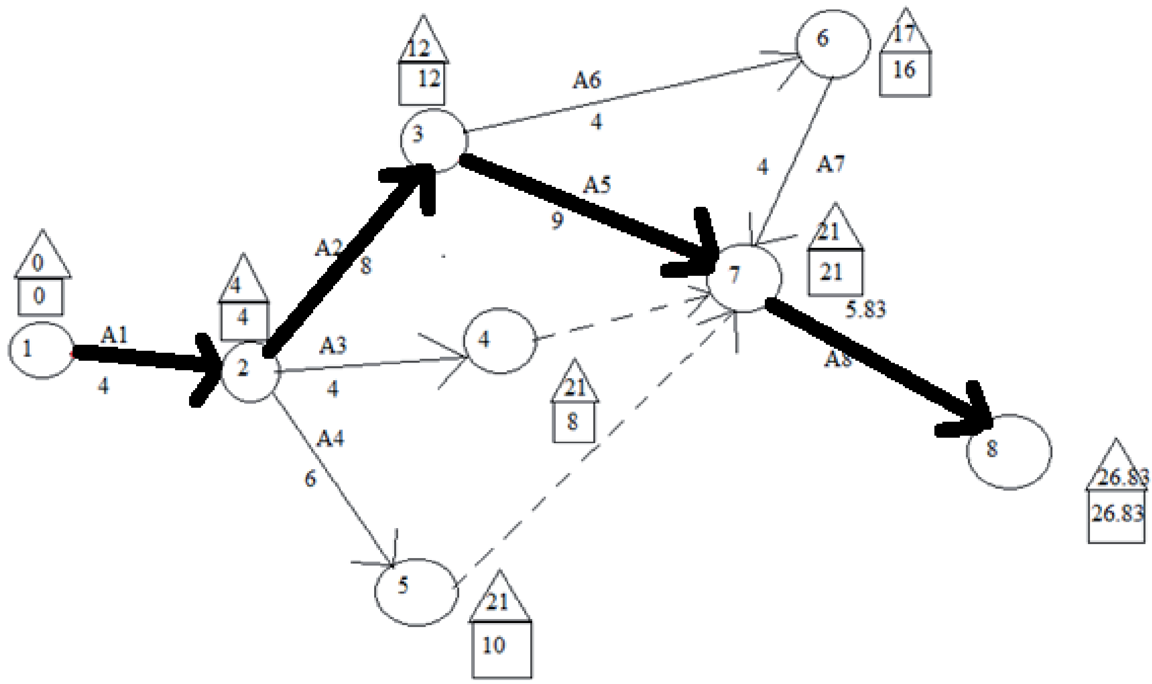
Actividad	Denominación	Tiempo optimista (en semanas)	Tiempo más probable (en semanas)	Tiempo pesimista (en semanas)	Precedencias
Modelado de Sistemas	A_1	2	4	6	---
Programación Lineal	A_2	4	8	12	A_1
Teoría de Colas	A_3	3	4	5	A_1
Teoría de Inventarios	A_4	5	6	7	A_1
Redes	A_5	5	9	13	A_2
Teoría de Juegos	A_6	3	4	5	A_2
Teoría de la Decisión	A_7	3	4	5	A_6
Simulación	A_8	4	6	7	A_3, A_4, A_5 y A_7

Se calculan entonces las medias, o valores esperados, para cada actividad junto con sus respectivas variancias.

Actividad A_i	Tiempo esperado t_{e_i}	Variancia $\sigma_i{}^2$
A_1	4	0.44
A_2	8	1.78
A_3	4	0.11
A_4	6	0.11
A_5	9	1.78
A_6	4	0.11
A_7	4	0.11
A_8	5.83	0.25

La red con los cálculos correspondientes a los pasos hacia adelante y hacia atrás resulta la de la Gráfica 16

Gráfica 16

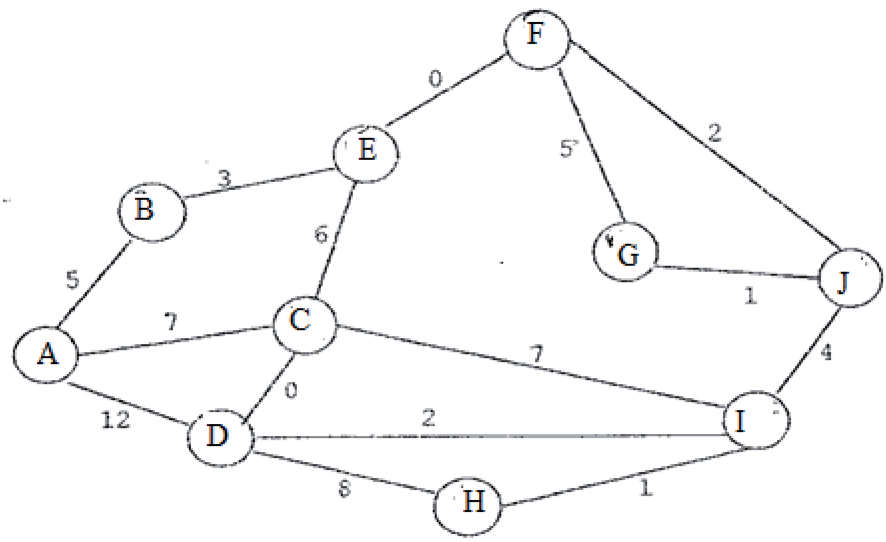


La ruta crítica es aquí A_1 -> A_2 -> A_5 -> A_8 Su tiempo promedio de ejecución será de $\mu = 26.83$ semanas con un desvío estándar de $\sigma = \sqrt{0.44 + 1.78 + 1.78 + 0.25} = 2.06$ semanas. Esta información nos sirve para evaluar cuál es la probabilidad de terminar el proyecto en un determinado tiempo. Por ejemplo: ¿con que probabilidad el proyecto estará terminado en 30 semanas? Entendiendo que el tiempo total de ejecución es una variable aleatoria normal de media $\mu = 26.83$ y desvío estándar $\sigma = 2.06$ calculamos:

$$P\left(z \leq \frac{30 - 26.33}{2.06}\right) = P(z \leq 1.78) = 0.9625$$

Ejercicios propuestos

Ejercicio N° 1- Un camión debe transportar cierta mercadería de la ciudad A hasta la ciudad J. En el siguiente mapa se describen las posibles rutas de A a J indicándose, para cada tramo, la cantidad de kilómetros en mal estado que contiene. Se decide tomar la ruta que tenga menor cantidad de kilómetros en mal estado, aún si resultara más larga. Determinar esta ruta.



Ejercicio N° 2- Una empresa de taxis ha identificado 10 paradas principales para pasajeros que abordan y descienden de los taxis. Para minimizar el tiempo de viaje y mejorar así el servicio y la utilización de la flota la administración ha decidido instruir a los choferes para que siempre tomen la ruta mas corta entre dos de estas paradas. En la tabla se dan los tiempos de viaje en minutos entre cada una de estas paradas. Determinar:

a) el diagrama de la red de paradas.
b) La ruta que debiera tomar un taxi para ir desde la parada 1 a la 10 y cuánto dura el viaje.
c) La ruta que debería tomar un taxi para ir desde la parada 5 a la 2 y cuanto duraría ese viaje.

Parada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-	8	13	15	10	-	-	-	-	-
2	8	-	5	-	-	-	15	-	-	-
3	13	5	-	6	-	5	-	-	-	-
4	15	-	6	-	4	3	-	-	-	-
5	10	-	-	4	-	9	-	-	12	-
6	-	-	5	3	9	-	4	2	5	-
7	-	15	-	-	-	4	-	4	-	4
8	-	-	-	-	-	2	4	-	5	7
9	-	-	-	-	12	5	-	5	-	5
10	-	-	-	-	-	-	4	7	5	-

Ejercicio N° 3- Una compañía sabe que un competidor está a punto de ofrecer un producto con ventas potenciales muy grandes y similar a uno en el que ella misma se encuentra trabajando con la investigación casi terminada. Ahora entonces la idea es sacar el producto más rápidamente para alcanzar a la competencia. Se tienen que lograr cuatro etapas independientes incluyendo lo que resta de la investigación que por el momento se lleva a paso normal. Sin embargo, cada etapa se puede realizar en un nivel de prioridad o de quiebre para acelerar la terminación. Los tiempos requeridos en meses para los distintos niveles son:

Nivel	Investigación restante	Desarrollo	Diseño del sistema de manufactura	Inicio de producción y distribución
Normal	5			
Prioridad	4	3	5	2
Quiebre	2	2	3	1

Se dispone de $ 30000000 para estas etapas. El costo en millones de pesos para los diferentes niveles es:

Nivel	Investigación restante	Desarrollo	Diseño del sistema de manufactura	Inicio de producción y distribución
Normal	3			
Prioridad	6	6	9	3
Quiebre	9	9	12	6

La administración desea determinar el nivel a que debe conducirse cada etapa para minimizar el tiempo total hasta la comercialización del producto sujeto a las restricciones de presupuesto. Formular y resolver como un problema de la ruta más corta.

Ejercicio N° 4- Un banco ha decidido conectar terminales de computadora en cada una dee sus sucursales a la computadora central de su casa matriz mediante líneas telefónicas especiales. No es necesario que la línea esté conectada directamente a la casa matriz sino que la conexión puede hacerse a través de otra sucursal conectada pero toda sucursal debe poder conectarse directa o indirectamente con la casa matriz. El cargo por las líneas telefónicas es directamente proporcional a la distancia cableada que en kilómetros y entre sucursales son las siguientes:

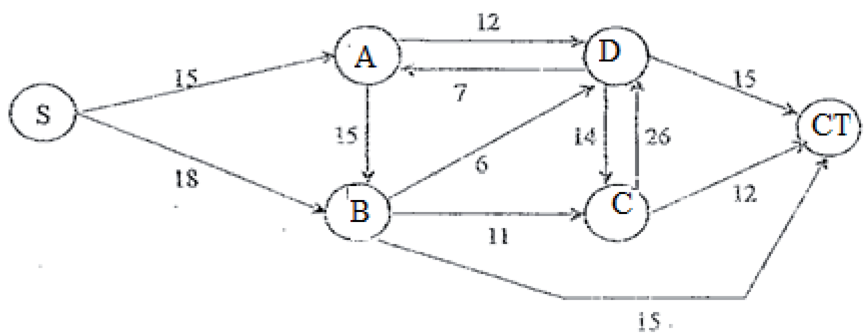
	Casa Matriz	Suc. 1	Suc. 2	Suc. 3	Suc. 4	Suc. 5
Casa Matriz	-	190	70	115	270	160
Suc. 1	190	-	100	110	215	50
Suc. 2	70	100	-	140	120	220
Suc. 3	115	110	140	-	175	80
Suc. 4	270	215	120	175	-	310
Suc. 5	160	50	220	80	310	-

La administración desea determinar cuales son los pares de sucursales que deben conectarse directamente con las líneas telefónicas especiales de manera que cada sucursal quede conectada directa o indirectamente a la casa matriz a un costo mínimo.

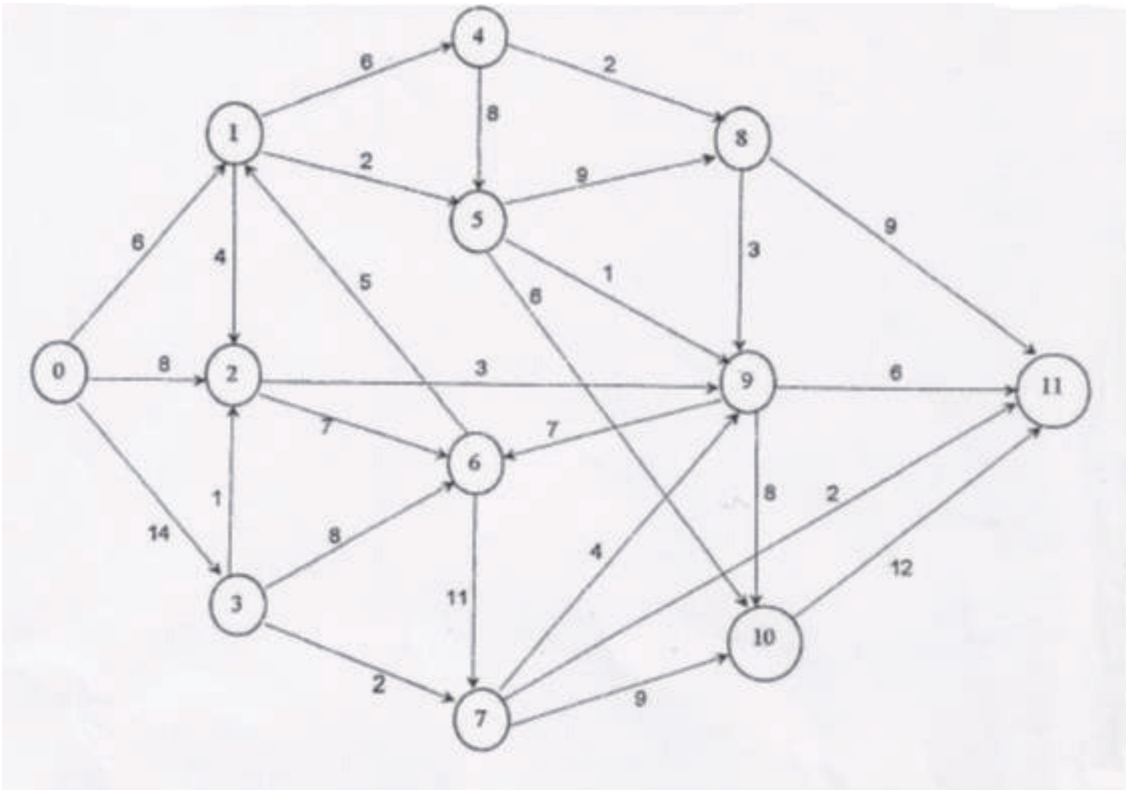
Ejercicio N° 5- En una fábrica de productos de limpieza los inspectores de control de calidad obtienen muestras de diversos productos en varias áreas de producción y entregan las muestras para su análisis en laboratorio. El proceso de inspección es lento y se invierte mucho tiempo en el transporte de las muestras desde las áreas de producción hasta el laboratorio por lo que se está evaluando la instalación de un sistema conductor que utiliza tubos neumáticos para hacer más rápido ese transporte. En la tabla se muestran las distancias en metros entre los distintos sectores incluido el laboratorio. ¿Cuál es la longitud mínima para diseñar el sistema para permitir que todas las áreas envíen sus muestras al laboratorio sabiendo que si una muestra pasa de un área a otra esta última también puede girar la muestra al laboratorio?

	Lab.	2	3	4	5	6	7	8
Lab	–	600	700	800	x	x	x	x
2	600	–	800	x	500	600	x	x
3	700	800	–	500	x	400	600	x
4	800	x	500	–	x	x	600	x
5	x	500	x	x	–	300	x	400
6	x	600	400	x	300	–	500	200
7	x	x	600	600	x	500	–	400
8	x	x	x	x	400	200	400	–

Ejercicio N° 6- En la restauración de un antiguo complejo hotelero ubicado en Mendoza se plantea la necesidad de traer agua termal desde la surgente S a una cisterna CT ubicada a 10 km de distancia. Se puede aprovechar la red de cañerías existentes de la surgente al lugar de emplazamiento de la cisterna. En el gráfico se indica la red junto con las capacidades de cada caño medida en miles de litros por hora. Determinar cuántos litros /hora como máximo se pueden suministrar a la cisterna del complejo.



Ejercicio N° 7- La siguiente red de comunicaciones transfiere información entre distintos nodos. Los números sobre los arcos de la red indican las capacidades máximas de transferencia de cada línea. Determinar le flujo máximo de información del nodo 0 al 11.



Ejercicio N° 8- Una empresa a recibido el encargo de desarrollar un nuevo sistema de automatización par líneas de producción de automóviles. Luego de las consultas a los jefes de departamento se establecieron las tareas a desarrollar, se estimaron los tiempos de duración y sus interrelaciones. Las que se resumen en la siguiente tabla.

Descripción	Actividad	Duración (semanas)	Precedentes
Fase de diseño	A	10	-
Desarrollo del Software operativo	B	18	A
Desarrollo del Soft. de diagnóstico.	C	24	B
Desarrollo del Hardware	D	20	A
Desarrollo del 1er prototipo	E	4	B,D
Prueba y modificación del prototipo	F	8	E
Inserción del Sofá. de diagnóstico. Prueba y modificación de prototipo	G	8	C,F

Desarrollo de materiales de comercialización	H	16	E
Reunión de entrenamiento para la presentación del producto	I	2	G,H

a) Trazar la red del Proyecto.
b) ¿Cuál es el tiempo de duración del proyecto?
c) ¿En cuantas semanas se debería acortar el proyecto si se desea concluir el desarrollo en 1 año?
d) ¿Qué actividades se deberán reducir en duración si sabemos que tanto la A como la I son inelásticas?

Ejercicio N° 9- Se considera el siguiente proyecto de desarrollo de un transistor alimentado con energía solar. Contiene nueve actividades siendo las prelaciones y las estimaciones de tiempo en semanas las siguientes:

Actividad	Predecesor	TO	TN	TP
a	-	3	6	9
b	-	1	3	5
c	a	5	5	5
d	a	4	6	7
e	b	8	10	12
f	b	4	9	15
g	c	5	5	5
h	d,e,g	2	3	6
i	f	2	8	16

a) dibujar la red del proyecto.
b) Determinar el camino crítico y el tiempo esperado de finalización
c) ¿Cuál es la probabilidad que el proyecto se termine en menos de 18 semanas? ¿Y en 22 o más semanas?
d) Se desea firmar un contrato que especifique el tiempo de finalización del proyecto de modo que haya una probabilidad del 95 % de cumplir la fecha deseada. ¿Qué duración deberá especificarse en el contrato?

Ejercicio N° 10- En el siguiente proyecto la empresa encargada de la ejecución cuenta con un plantel de 80 hs/ hombre por día y desea pagar al contado contra la terminación de cada tarea. (los tiempos se dan en días).

Actividad	TO	TN	TP	Hs/hombre x día*	Costo (miles de $)
1-2	0.5	1	1.5	10	60
1-3	1	1.5	5	40	100
2-4	1	2.5	7	60	130
3-4	1	3	5	20	100
3-5	2	2	2	20	120
4-6	3	4.5	9	10	120
4-7	2	3	10	30	80
5-7	1	1	1	20	110
5-8	1	3	5	20	80
6-8	4	5	6	50	110
7-8	2.5	3	3.5	10	190

a) dibujar la red del proyecto
b) determinar el camino crítico y el tiempo esperado de finalización
c) ¿es posible realizar el proyecto con el plantel que se cuenta manteniendo el tiempo total de ejecución?
d) Determinar si es posible establecer el sistema de pagos indicado sabiendo que la empresa dispone de un ingreso diario de $80000.
e) ¿cuál es la probabilidad que el proyecto termine en 11 días o menos?

VI- Teoría de Juegos

VI.1 Introducción

La teoría de juegos estudia las situaciones de competencia, y ocasionalmente de colaboración, entre distintos jugadores. Por jugador debe entenderse aquella entidad que con el objetivo de obtener su mejor beneficio selecciona y lleva a cabo estrategias de acción dentro de un sistema. Así, un jugador podría ser una especie que compite por un hábitat, una empresa que intenta vender un producto en un mercado, un político que lucha por obtener una banca o un jugador de cartas que busca ganar un juego. En cualquiera de estos casos, la aplicación de la teoría se realiza para seleccionar la estrategia que conduce al óptimo resultado. Un ejemplo típico de formulación de un juego es el que se plantea a partir del llamado *Dilema del Prisionero*: dos sospechosos son detenidos y acusados de cometer un delito en conjunto; como no existe evidencia suficiente para condenarlos hay que obtener una confesión; separados sin poder tener comunicación entre sí, se les informa que si ninguno confiesa serán condenados ambos con una pena de un mes de cárcel; si ambos confiesan le corresponderán seis meses de cárcel a cada uno; y finalmente si uno confiesa y el otro no, el que lo haga saldrá en libertad y el que no será condenado a nueve meses, seis por el delito en sí y tres más por obstrucción de la justicia. ¿Qué le conviene hacer a cada prisionero?

La representación de este dilema como un juego puede lograrse mediante una matriz binaria, de dos cantidades por celda, en la cual se registran los resultados de cada cruce de estrategias. Cada preso es un jugador y como tal tiene dos estrategias posibles callarse o confesar. La matriz de pagos del juego resulta entonces:

Jugador 1 / Jugador 2	Estrategia 1 Callarse	Estrategia 2 Confesar
Estrategia 1 Callarse	-1, -1	-9, 0
Estrategia 2 Confesar	0, -9	-6,-6

En cada celda, la primera cantidad es el pago correspondiente al Jugador 1 cuyas estrategias posibles se ordenan por fila. La segunda cifra corresponde al pago al jugador 2, con las estrategias dispuestas en las columnas. Las cantidades distintas de 0 están precedidas por un signo menos pues representan una pérdida, en este caso de la libertad.

La forma normal de representación de un juego establece los jugadores que participan en él, las estrategias de que dispone cada jugador y la ganancia que le corresponde de acuerdo a la combinación de las estrategias que los jugadores utilicen. Claro que la expresión matricial del pago es posible cuando participan en el juego solo dos jugadores. Un juego de 3 jugadores tendría que dar lugar a un arreglo de tres dimensiones y, en general, uno de n jugadores debería representarse con un arreglo de pagos de dimensión n.

En el ejemplo del dilema del prisionero se ve una característica importante que se verifica en muchos juegos: los jugadores deben tomar sus decisiones sin conocer cuáles serán las decisiones de los demás. Otra condición importante es que poseen la información sobre el pago que cada cruce de estrategias le corresponderá a cada uno. Es decir; los jugadores tienen información completa. Por supuesto ambas situaciones no necesariamente se verifican en un juego; a veces un jugador conoce las estrategias que elegirán los demás jugadores y a veces, también pude ocurrir, que no sepa el resultado que obtendrá el o cualquier otro jugador al desarrollarlas. En cualquier caso, asumiremos una hipótesis muy necesaria: los jugadores juegan racionalmente. Esto quiere decir que emplean todos los conocimientos y razonamientos posibles con el objetivo de obtener el resultado óptimo. En otras palabras, la teoría se edifica descartando por el momento el pálpito a la hora de la decisión.

Hasta aquí el juego se caracteriza por la elección simultánea de estrategias por parte de los jugadores. Esto resulta en una formulación estática a través de la representación normal que se ajusta mejor a la situación. Podría utilizarse también la forma normal si existiera una dinámica de tomas de decisiones sucesivas por parte de los jugadores, por ejemplo, en un juego de ajedrez. En tales casos es más conveniente utilizar la forma extensiva que se despliega como un árbol, aunque esto no será parte del contenido de este capítulo.

VI.2 Suma cero

Vamos a comenzar a restringir el tipo de sistema que modelaremos. Será uno en que participen compitiendo entre sí solo dos jugadores, que lo harán en forma racional y con información completa, aunque sin conocer, antes de su decisión, lo que decidirá su rival.

Pero además tendremos en cuenta una situación particular muy común que consiste en que, dado un cruce de estrategias, la ganancia de un jugador será la pérdida del otro. Por ejemplo, supongamos que dos personas, en forma simultánea, exhiben uno o dos dedos de la mano. El que llamaremos jugador I ganará un peso toda vez que la cantidad de dedos exhibida por ambos sea la misma y en caso contrario perderá un peso a manos del jugador II. Es claro aquí que cuánto gana uno de los jugadores, el otro lo pierde en igual cantidad. Pérdidas de uno más ganancias del otro, se compensan siendo la suma de ambas 0. La representación normal por medio de una matriz, que por convención será la del jugador I, contiene ahora una sola cifra en cada celda pues la otra, que representaría el pago a obtener por el jugador 2, sería simplemente igual, pero de signo opuesto. Para nuestro ejemplo la matriz de pagos del jugador I resulta:

Jugador I/Jugador II	Exhibir un dedo	Exhibir dos dedos
Exhibir un dedo	1	-1
Exhibir dos dedos	-1	1

En el supuesto que quisiera construirse la matriz de pagos para el jugador II bastaría con transponer la matriz y cambiar el signo en cada una de las celdas. En lo que sigue solo consideraremos juegos de suma cero.

VI.3 Dominancia de estrategias

Hasta aquí nos hemos limitado a expresar el juego en la forma normal a partir del enunciado de un problema, pero nada hemos hecho aún para resolverlo. Resolverlo es precisamente encontrar las estrategias óptimas para cada jugador y el pago óptimo. Esto último no significa otra cosa que la mejor ganancia o pérdida que cada jugador pueda obtener. Como el juego es de suma cero el pago para ambos jugadores será el mismo salvo por un signo opuesto.

El camino para resolver un juego así planteado comienza descartando las estrategias dominadas. Consideremos un juego cuya matriz de pagos es la siguiente:

Jugador I/Jugador II	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3
Estrategia 1	2	3	2
Estrategia 2	-1	2	1
Estrategia 3	4	2	1
Estrategia 4	2	3	1

Como ya aclaramos, esta es por convención, la matriz de pagos del Jugador 1, pero al tener información completa, ambos jugadores disponen de ella para calcular y pueden, porque son racionales, establecer cuáles serán las estrategias elegidas y las descartadas por su oponente.

Una estrategia de un jugador está dominada por otra siempre que, cualquiera sea la opción elegida por su rival, el pago a obtener con la dominada sea inferior o a lo sumo igual que el que conseguiría con la dominante. Por ejemplo, en la matriz de pagos del juego planteado, la estrategia 1 del Jugador I domina a su estrategia 2 pues comparando las filas en cada columna la entrada de la fila 1 es mayor o igual que la de la fila 2. Así las cosas, el Jugador I procederá a descartar la elección de la estrategia 2 tachándola. Está claro que con el mismo razonamiento el Jugador II sabrá que el I así procederá. Además, la estrategia 1 también domina a la estrategia 4 razón por la cual esta última también será tachada. En este caso particular hay que señalar que, aun cuando el Jugador II se decidiera por su estrategia 1 y el resultado de elegir la estrategia 1 o la 4 para el jugador I fuera el mismo, eso no ocurriría en caso de que el jugador II eligiera su estrategia 3 donde el pago de la estrategia 1 del Jugador 1 sería mayor. Tenemos entonces:

Jugador I/Jugador II	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3
Estrategia 1	2	3	2
Estrategia 2	~~-1~~	~~2~~	~~1~~
Estrategia 3	4	2	1
~~Estrategia 4~~	~~2~~	~~3~~	~~1~~

Pero si el Jugador I, actuando en forma racional descarta sus Estrategias 2 y 4, el Jugador II una vez comprendido esto, descartará sus estrategias 1 y 2. Si bien optando por la estrategia 3 pierde, cualquiera sea la estrategia elegida por el I, lo hace en menor cantidad. Por lo tanto, sus estrategias 1 y 2 están dominadas por la 3 y esta será la elegida. Así las cosas, hasta ahora las eliminaciones han dejado sobre la matriz de pagos lo siguiente:

Jugador I/Jugador II	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3
Estrategia 1	~~2 xxxxxxx~~	~~3 xxxxxx~~	2
Estrategia 2	~~1~~	~~2~~	~~1~~
Estrategia 3	~~4 xxxxxxx~~	~~2 xxxxxx~~	1
~~Estrategia 4~~	~~2~~	~~3~~	~~1~~

Finalmente, puede verse que, si bien el Jugador II no tiene otra opción que su estrategia 3 luego de las sucesivas tachaduras, la estrategia 1 del Jugador I domina a su estrategia 3 de forma que procederá a descartarla. Por lo tanto, quedan todas las entradas de la matriz tachadas, salvo la correspondiente al cruce de la estrategia 1 del Jugador 1 con la estrategia 3 del Jugador II. La cifra correspondiente es el llamado valor del juego v=2, ganancia óptima para el Jugador 1, pérdida óptima para el Jugador II. Se ha alcanzado el llamado equilibrio de Nash del juego. Es decir, el punto de cruce de estrategias óptimo para ambos jugadores.

Jugador I/Jugador II	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3
Estrategia 1	~~2 xxxxxxx~~	~~3 xxxxxx~~	2
Estrategia 2	~~1~~	~~2~~	~~1~~
Estrategia 3	~~4 xxxxxxx~~	~~2 xxxxxx~~	~~1~~
~~Estrategia 4~~	~~2~~	~~3~~	~~1~~

VI.4 Criterio minimax

John Von Newman, matemático húngaro-norteamericano, demostró en 1928 que en un juego de dos competidores con información completa y suma cero, hay una única solución óptima. Para hallarla proporcionó un criterio algorítmico conocido como minimax. Este principio consiste en que cada jugador busque minimizar su pérdida posible máxima

Supongamos que un juego con las características apuntadas se expresa por la matriz de pagos del Jugador I siguiente:

Jugador I/Jugador II	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3
Estrategia 1	-4	-1	0
Estrategia 2	1	0	4
Estrategia 3	5	-1	-3

El Jugador I, al elegir la estrategia 1, se encontraría con que la situación más desfavorable que pudiera presentársele si el Jugador II seleccionase su estrategia 1. De igual forma si su elegida fuera la estrategia 2 el peor resultado que obtendría ocurriría cuando el Jugador II optara por la estrategia 2. Finalmente, al decidirse por la estrategia 3 su peor pago resultaría de la elección de la estrategia 3 por parte del Jugador II. Se observa entonces que esa situación más desfavorable en cada caso estaría dada por el pago mínimo de la fila que señala la estrategia del Jugador I. Similarmente el Jugador I puede calcular la situación más desfavorable del Jugador II al evaluar cada una de las estrategias para él disponibles. Le basta para esto tomar el máximo de los pagos que le corresponderían en cada columna, pues representarían la mayor pérdida para el Jugador II en cada caso. Entonces minimizar la mayor pérdida posible querría decir, para el jugador I, maximizar los mínimos obtenidos por fila. En el mismo sentido, minimizar la mayor pérdida para el Jugador II consistiría en minimizar los máximos calculados por columna. Así resulta:

Jugador I/Jugador II	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3	**min**
Estrategia 1	-4	-1	0	-4
Estrategia 2	1	**0**	4	**0=Maxmin**
Estrategia 3	5	-1	-3	-3
Max	5	**0=minMax**	4	

Se llega entonces al llamado punto de ensilladura. El pago correspondiente al cruce de las estrategias 2 de ambos jugadores, resulta aquí el valor del juego v=0. Para él, coinciden el llamado valor inferior $\underline{v} = Maxmin$ con el valor superior $\overline{v} = minMax$. Es decir $v = \underline{v} = \overline{v}$. En esta situación se da el equilibrio de Nash del juego. Como además en este caso el pago óptimo es 0, se dice que el juego es justo pues nadie gana ni pierde.

En el apartado anterior se proporcionó un ejemplo en el cual por simple aplicación reiterada del criterio de estrategia dominada se llegó al punto de equilibrio del juego. ¿Será esto posible en el ejemplo que acabamos de resolver? Veamos.

Jugador I/Jugador II	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3
Estrategia 1	~~-4----------~~	~~-1----------~~	~~0-----------~~
Estrategia 2	~~1xxxxxxxxx~~	0	4
Estrategia 3	~~5xxxxxxxxx~~	-1	-3

Una vez tachadas la estrategia 1 del Jugador I por ser dominada por la 2, y tachada la estrategia 1 del Jugador II por ser dominada por la 2, no puede continuarse aplicando el enfoque de dominancia para llegar a la solución del juego. Por ahora entonces, vemos que el criterio minimax permite resolver una clase más amplia de problemas.

VI.5 Estrategias mixtas

Volvamos ahora al problema de la sección VI.2 y tratemos de aplicar el criterio minimax para resolverlo. Calculamos máximos y mínimos para obtener:

Jugador I/Jugador II	Exhibir un dedo	Exhibir dos dedos	min
Exhibir un dedo	1	-1	-1
Exhibir dos dedos	-1	1	-1
Max	1	1	

Como se ve, aquí resulta que el máximo de los mínimos es $Maxmin = -1$ mientras que el mínimo de los máximos es $minMax = 1$. Como no coinciden, no hay punto de ensilladura y tal cual lo estamos planteando el juego no tendría equilibrio. Sin embargo, el equilibrio puede establecerse hallando el valor del juego cuando se consideran estrategias mixtas.

Una estrategia mixta es una combinación de probabilidades, cada una de las cuales es precisamente la probabilidad de elegir cada estrategia disponible. Con las estrategias mixtas de ambos jugadores puede calcularse un pago esperado. Es decir, para obtener el pago esperado habrá que considerar los pagos expresados en cada cruce de estrategias, pesados con la probabilidad de que tal cruce ocurra. Expliquemos esto. Por ejemplo, un jugador puede participar en el juego de los dedos 3000 veces, de forma tal que en 2000 ocasiones elige una de las estrategias y en las 1000 veces restantes, la otra. El número 3000, suficientemente grande, asegura la regularidad estadística para estimar sus probabilidades de jugar cada estrategia. Es decir, estaría eligiendo con probabilidad cercana a 2/3 una de las estrategias y con probabilidad aproximada 1/3 la otra. La estrategia mixta sería la constituida por el par (2/3, 1/3). ¿Será óptima? Es decir, ¿podrá esperar al jugarla el mejor pago posible? No hay que olvidar que el pago que reciba el jugador, no solo dependerá de lo que él haga, sino también de lo que juegue su rival. Esto significa que el pago esperado $PE = y_1x_1(1) + y_1x_2(-1) + y_2x_1(-1) + y_2x_2(1)$ resulta una función de las cuatro probabilidades. Según la estrategia mixta que lleve adelante el otro jugador, la estrategia del que juega con probabilidades (2/3, 1/3) pudiera no conducir a un pago esperado óptimo. Entonces si el juego no se va a jugar 3000 veces, sino una sola, será bueno contar "a priori" con las probabilidades que optimicen el pago esperado. Con ellas se podría efectuar un sorteo para elegir la estrategia que finalmente se elija jugar. Esto implica que, tanto para el Jugador I como para el II, hay que calcular racionalmente esas probabilidades antes de jugar. Es decir, hay que hallar el par de probabilidades (x_1, x_2) que conforman la estrategia mixta del Jugador I y el respectivo par (y_1, y_2) correspondiente a la estrategia mixta del jugador 2, de forma tal que produzcan el mejor pago esperado para ambos jugadores. Ese pago esperado corresponderá al equilibrio de Nash en presencia de estrategias mixtas. Ahora necesitamos encontrar la forma de calcular las estrategias mixtas y el pago esperado.

Preguntémonos ¿cuál sería el pago esperado óptimo? La respuesta está en el criterio minimax. Recordemos que el mínimo de cada fila representa la situación más desfavorable para el Jugador I al jugar cada una de sus estrategias y que, por ende, al elegir el máximo de estos mínimos se está buscando la peor situación en la que el Jugador I podría encontrase procediendo racionalmente. Es decir el valor inferior del juego, que para que la solución exista debe cumplir $v = \overline{v} = \underline{v}$, debe maximizar estos mínimos.

El problema de los dedos, puede resultar bastante sencillo de resolver con ayuda gráfica. Para clarificar ampliamos la tabla con filas y columnas que van a contener las probabilidades halladas para cada estrategia.

Jugador I/Jugador II		Exhibir un dedo	Exhibir dos dedos
	Probabilidades	Y_1	Y_2
Exhibir un dedo	X_1	1	-1
Exhibir dos dedos	X_2	-1	1

Cuando el Jugador II juega la estrategia 1, es decir opta por su estrategia mixta (1,0), el pago esperado es $PE = x_1 1 + x_2(-1)$ De la misma forma cuando el Jugador II juega su estrategia 2, aplicando la estrategia mixta (0,1), se puede esperar un pago $PE = x_1(-1) + x_2 1$. Cómo, por tratarse de probabilidades, $x_1 + x_2 = 1$ resulta que el pago esperado puede ponerse en función de x_1 haciendo:

$PE = x_1 - (1 - x_1) = 2x_1 - 1$ recta 1

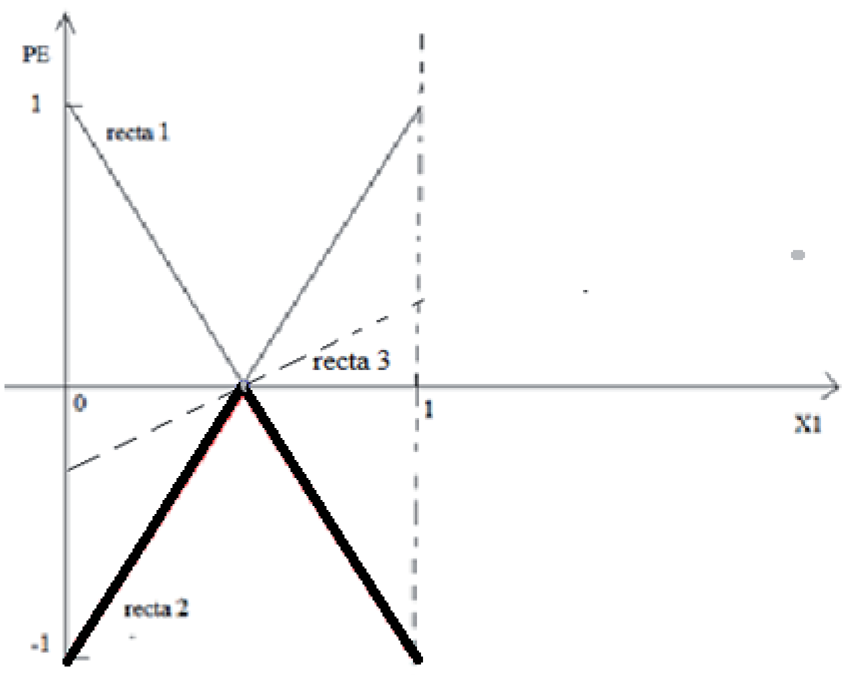
$PE = -x_1 + (1 - x_1) = -2x_1 + 1$ recta 2

La matriz de pagos para el Jugador I puede ahora verse:

Jugador I/Jugador II	Exhibir un dedo	Exhibir dos dedos
Estrategia mixta	$2x_1 - 1$	$-2x_1 + 1$

Según el criterio minimax el Jugador I debe hallar el máximo de sus mínimos pagos. En la Gráfica 1 se muestran en negro los mínimos pagos esperados correspondientes y con un punto gris se señala su máximo.

Gráfica 1



Cada valor de probabilidad x_1 se corresponde con posibles pagos esperados surgidos de estrategias distintas aplicadas por el jugador II. Nótese que cualquier otra estrategia que eligiera el Jugador II se asociaría con una recta que pasaría por el punto señalado y cuya ordenada al origen estaría en el intervalo [-1, 1]. Por ejemplo la recta 3 señalada con trazo cortado corresponde al pago esperado cuando el Jugador II elige la estrategia mixta (2/3, 1/3) Entonces la traza negra es la formada cuando para cada $x_1$se toma el mínimo de todos los pagos. Las coordenadas del punto señalado son el valor de probabilidad x_1 que realiza el PE máximo entre los mínimos sombreados en negro y ese propio PE que es el Maxmin.

Ahora calculamos, teniendo en cuenta que el óptimo se produce en la intersección de las rectas 1 y 2. Se tiene:

$2x_1 - 1 = -2x_1 + 1$ luego

$4x_1 = 2$ y entonces

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

Con este valor de probabilidad hallamos también $x_2 = 1 - x_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ y además con cualquiera de las rectas podemos calcular el valor óptimo de PE haciendo por ejemplo:

$$PE = 2x_1 - 1 = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 0$$

Éste será entonces el valor v del juego. Para establecer el equilibrio el pago óptimo para el Jugador 2, surgido al calcular el mínimo de sus máximas pagos al Jugador I, también tendrá que ser igual al valor de PE. En fórmulas:

$$\overline{v} = minMax = Maxmin = \underline{v} = v = PE = 0$$

Ahora resulta sencillo calcular la estrategia mixta para el Jugador II. En efecto, suponiendo que el Jugador I elige sus estrategias mixtas (1,0) y (0,1) se obtienen las ecuaciones:

$$0 = PE = y_1 1 + y_2(-1)$$

$$0 = PE = y_1(-1) + y_2 1$$

Como $y_1 + y_2 = 1$ queda $0 = y_1 - (1 - y_1)$ de donde $y_1 = \frac{1}{2}$ y por lo tanto $y_2 = \frac{1}{2}$

Hemos resuelto el juego al determinar que la estrategia mixta del Jugador I está constituida por el par (1/2, 1/2), que la estrategia mixta del Jugador II es (1/2, 1/2) y que el pago esperado correspondiente a ellas y por lo tanto óptimo en el sentido minimax es 0.

Supongamos ahora que hasta aquí no se ha jugado el juego y se lo hará una vez a continuación. ¿Cómo deben proceder los jugadores? La única regla posible es hacer un sorteo para elegir qué estrategia jugar. Esto es así, pues si hubiese una regla, ambos jugadores la conocerían y por ende podrían contrarrestarla jugando para obtener un mejor pago. Por lo tanto, la mejor elección racional será la que surja del sorteo que, de acuerdo con la distribución de probabilidades de su estrategia mixta, cada uno realice para elegir si muestra uno o dos dedos. Quizás pueda no verse aún que esta es la mejor respuesta racional factible, pero podremos entenderlo si volvemos al ejemplo en que se jugaba el juego 3000 veces y un jugador elegía 2000 veces una estrategia y 1000 la otra, lo que respondería a la estrategia mixta (2/3, 1/3). Simplemente si el otro jugador se atuviera a la respuesta racional y sorteara según la estrategia mixta (1/2, 1/2) cual estrategia jugar cada vez, seguramente al cabo de 3000 juegos hubiera jugado aproximadamente la mitad de las veces cada estrategia. Habría entonces, posiblemente, 500 veces en que este jugador le hubiera opuesto al otro una estrategia ganadora y en ese caso la posible diferencia a su favor sería de 500 pesos. En cambio, si ambos jugadores juegan racionalmente la ganancia al cabo de los 3000 juegos tendría que rondar los 0 pesos para cada uno.

Un aspecto importante a destacar es que, si el punto de equilibrio se alcanza sin recurrir a estrategias mixtas, esto puede interpretarse pensando que la estrategia óptima de cada uno de los jugadores tiene probabilidad 1 de ser jugada y el resto de las disponibles, probabilidad 0. Tal lo ocurrido al resolver el problema planteado en la sección VI.4 y también cuando calculamos los pagos esperados para ambos jugadores en el problema de los dedos.

VI.6 Juegos y programación lineal

Cuando ninguno de los jugadores puede quedarse con dos estrategias para formar su estrategia mixta, no resulta factible resolver el juego en forma gráfica. Sin embargo, es posible aún hallar la solución por medio de la programación lineal. Un juego de dos jugadores que compiten en forma racional, con información completa y de suma cero, puede en forma general, tener m estrategias disponibles para el Jugador I y n estrategias seleccionables para el Jugador II. Esto se trasuntaría en una matriz de pagos como la que sigue:

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ siendo $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ e $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ estrategias mixtas de los Jugadores I y II respectivamente. La fórmula general del pago esperado es $PE = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$

Cuando calculamos la solución en forma gráfica supusimos en realidad que el Jugador II o bien jugaba la estrategia 1, es decir que considerábamos su estrategia mixta $(y_1, y_2) = (1{,}0)$, o bien jugaba su estrategia 2 lo que correspondía a la mixta $(y_1, y_2) = (0{,}1)$. En el caso general también podríamos hacerlo así, considerando las estrategias mixtas (1, 0, 0…0) hasta (0, 0, …,1) elegidas por el Jugador II. De este modo, las cantidades $\sum_{i=1}^{m} a_{i1} x_i$, $\sum_{i=1}^{m} a_{i2} x_i$, …, $\sum_{i=1}^{m} a_{im} x_i$ resultarán siempre mayores o iguales al mínimo de ellas al que denominaremos min . Por otra parte es claro que min es lo que se intenta maximizar en términos matemáticos para hallar el valor v del juego y que debe cumplirse $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1$ pues es la suma de las probabilidades de elegir cada una de las estrategias del Jugador I. Lo expuesto permite entonces plantear el siguiente problema de programación lineal

[Max] $v = min$ con las restricciones:
$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i - min \geq 0$ $\quad j = 1, 2, \dots, n$
$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1$
$x_i \geq 0$ $\quad i = 1, 2, \dots, m$

El problema dual permitirá hallar la óptima estrategia mixta del jugador II por lo que en el renglón 0 del cuadro final resultante del problema primal, también estará la solución para éste jugador.

Para finalizar resolvemos entonces el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1: La matriz de pagos del conocido juego Piedra, Papel o Tijera se puede escribir de la siguiente forma:

Jugador I/Jugador II	Piedra	Papel	Tijera
Piedra	0	-1	1
Papel	1	0	-1
Tijera	-1	1	0

Como no hay punto de ensilladura, para hallar el valor del juego es necesario usar estrategias mixtas. Por otra parte, al no poder quitar ninguna de las filas o columnas por dominancia, ninguno de los dos jugadores tiene solo dos estrategias disponibles como para intentar la resolución gráfica. Por lo tanto, hay que plantear un problema de programación lineal.

[Max] $v = min$

$$x_2 - x_3 - min \geq 0$$

$$-x_1 + x_3 - min \geq 0$$

$$x_1 - x_2 - min \geq 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 \geq 0 \, , x_2 \geq 0 \, , x_3 \geq 0$$

Al resolver se obtienen la estrategia mixta del Jugador I (1/3, 1/3, 1/3), la estrategia mixta del Jugador II (1/3, 1/3, 1/3) y el pago esperado correspondiente v=PE=0

Ejercicios resueltos

Ejercicio N° 1- Considerar el juego que tiene la siguiente matriz de pagos:

I/II	1	2	3	4
1	2	-3	-1	1
2	-1	1	-2	2
3	-1	2	-1	3

Determinar la estrategia óptima para cada jugador mediante la eliminación sucesiva de estrategias dominadas. Proporcionar una lista de estas estrategias dominadas (y la estrategia correspondiente) en el orden en que se pueden eliminar.

I/II	1	2	3	4
1	~~2~~	~~-3~~	~~-1~~	~~1~~
2	~~-1~~	~~1~~	~~-2~~	~~2~~
3	~~-1~~	~~2~~	-1	~~3~~

1. F2 es dominada por F3
2. C1 es dominada por C3
3. F1 es dominada por F3

4. C4 es dominada por C2
5. C2 es dominada por C3

El jugador 2 elige la estrategia 3 y el jugador 2 elige la estrategia 3, el valor del juego es -1

Ejercicio N° 2- Encuentre el punto silla del juego que tiene matriz de pagos:

J_I/J_{II}	**1**	**2**	**3**	**4**	**Min**
1	3	-3	-2	-4	-4
2	-4	-2	-1	1	-4
3	1	-1	2	0	-1
Max	3	-1	2	1	

El valor MaxMin es -1, y el valor MinMax también es -1, por lo que el punto silla del juego es = -1.

Ejercicio N° 3- Resolver el juego que tiene la siguiente matriz de pagos:

I/II	1	2
1	3	-2
2	-1	2

En primer lugar, planteo el criterio mínimax:

I/II	1	2	mínimos
1	3	-2	-2
2	-1	2	**-1=Maxmin**
máximos	3	**2=minMax**	

Se observa que $\bar{v} \neq \underline{v}$ por lo tanto hay que buscar el punto de equilibrio del juego con estrategias mixtas.

I/II		1	2
	Proba.	Y1	Y2
1	X1	3	-2
2	X2	-1	2

Cuando el Jugador II juega la estrategia 1, es decir opta por su estrategia mixta (1,0), el pago esperado para el Jugador I es:

$PE = x_1 \times 3 + x_2 \times (-1)$

De la misma forma cuando el Jugador II juega su estrategia 2, aplicando la estrategia mixta (0,1), se puede esperar un pago

$PE = x_1 \times (-2) + x_2 \times 2$

Cómo, por tratarse de probabilidades, $x_1 + x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 - x_1$

resulta que el pago esperado puede ponerse en función de x_1 haciendo:

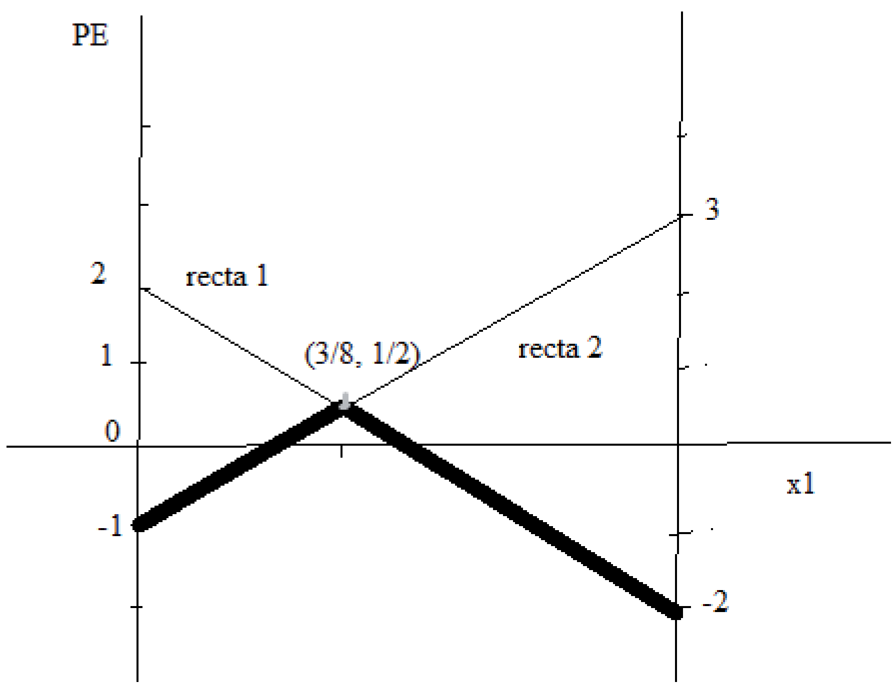
$PE = x_1 \times 3 + (1 - x_1) \times (-1) \Rightarrow PE = 4x_1 - 1 \quad recta\ 1$

$PE = x_1 \times (-2) + (1 - x_1) \times 2 \Rightarrow PE = -4x_1 + 2 \quad recta\ 2$

La matriz de pagos para el Jugador I puede ahora verse:

I/II	1	2
Estrategia mixta	$4x_1 - 1$	$-4x_1 + 2$

Según el criterio mínimax el Jugador I debe hallar el máximo de sus mínimos pagos. En la figura se muestran en negro los mínimos pagos esperados correspondientes y con un punto gris se señala el máximo.



El óptimo se produce en la intersección de las rectas 1 y 2. Se tiene:

$4x_1 - 1 = -4x_1 + 2$

$4x_1 + 4x_1 = 2 + 1$

$8x_1 = 3 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{8}$

El valor x_1 representa la probabilidad de que el Jugador I elija su estrategia 1. Se puede hallar también x_2, probabilidad de que el jugador I elija su estrategia 2

$x_2 = 1 - x_1$

$x_2 = 1 - \dfrac{3}{8}$

$x_2 = \dfrac{5}{8}$

y además con cualquiera de las rectas se puede calcular el valor óptimo de PE. Por ejemplo:

$PE = 4\dfrac{3}{8} - 1$

$PE = \frac{1}{2}$ Éste es entonces el valor v del juego

Para establecer el equilibrio el pago óptimo para el Jugador 2, surgido al calcular el mínimo de sus máximos pagos al Jugador I, también tendrá que ser igual al valor de PE. En fórmulas:

$\overline{v} = minMax = Maxmin = \underline{v} = v = PE = \frac{1}{2}$

Ahora resulta sencillo calcular la estrategia mixta para el Jugador II. En efecto, suponiendo que el Jugador I elige sus estrategias mixtas (1,0) y (0,1) se obtienen las ecuaciones:

$PE = y_1 \times 3 + y_2 \times (-2)$

$PE = y_1 \times (-1) + y_2 \times 2$

Además como $y_1 + y_2 = 1$ resulta $y_2 = (1 - y_1)$ y entonces:

$PE = -y_1 + (1 - y_1) \times 2$

$PE = -y_1 + 2 - 2y_1$

$PE = -3y_1 + 2$

Se tiene aquí: $1/2 = -3y_1 + 2$ con lo cual $y_1 = \frac{1}{2}$ y también $y_2 = 1 - \frac{1}{2} = 1/2$

El juego ha quedado entonces resuelto siendo (3/8, 5/8) la estrategia mixta del Jugador I, (1/2, 1/2) la del Jugador II y el pago esperado PE=1/2

Ejercicios propuestos

Ejercicio N° 4- Para cada una de las siguientes matrices de pago determinar la estrategia óptima para cada jugador eliminando sucesivamente las estrategias dominadas. (Indicar el orden en el que se eliminaron).

a)

I / II	1	2	3
1	-3	1	2
2	1	2	1
3	1	0	-2

b)

I / II	1	2	3
1	1	2	0
2	2	-3	-2
3	0	3	-1

Ejercicio N° 5- Encontrar el punto silla del juego que tiene matriz de pagos:

I / II	1	2	3
1	1	-1	1
2	-2	0	3
3	3	1	2

Ejercicio N° 6- Dos compañías comparten el grueso del mercado para cierto tipo de producto. Cada una está haciendo nuevos planes de comercialización para el próximo año con la intención de arrebatar parte de las ventas de la otra compañía. (Las ventas totales del producto son más o menos fijas, por lo que una compañía puede incrementar sus ventas solo si disminuyen las de la otra). Cada una está considerando tres posibilidades: 1) un mejor empacado del producto, 2) un aumento en la publicidad y 3) una pequeña reducción en el precio. Los costos de las tres opciones son comparables y lo suficientemente grandes como para que cada compañía elija solo una. El efecto de cada combinación de alternativas sobre el porcentaje aumentado de las ventas para la compañía 1 es:

I / II	1	2	3
1	2	3	1
2	1	4	0
3	3	-2	-1

Cada compañía debe hacer su elección antes de conocer la decisión de la otra compañía.

a) Sin eliminar las estrategias dominadas utilice el criterio mínimas para determinar la mejor estrategia para cada parte.

b) Identifique y elimine las estrategias dominadas hasta donde sea posible. Haga una lista de las estrategias dominadas que muestre el orden en el que se pudieron eliminar. Después elabore la matriz de pagos reducida que resulta cuando ya no quedan estrategias dominadas.

Ejercicio N° 7- El sindicato y la gerencia de una compañía negocian el nuevo contrato colectivo. Las negociaciones están congeladas pues la gerencia hace una oferta "final" de un aumento de 1.10 $/hora y el sindicato hace una demanda "final" de un aumento de 1.60 $/hora. Ambos han acordado que un árbitro imparcial establezca el aumento en alguna cantidad entre 1.10$/hora y 1.60$/hora (inclusive). El arbitraje ha pedido a cada lado que presente una propuesta confidencial de un aumento salarial económicamente razonable y justo redondeado a los 10 centavos más cercanos. Por experiencias anteriores ambos lados saben que el arbitraje casi siempre acepta la propuesta que le convenga mas al lado que mas cede respecto de su cantidad "final". Si ningún lado cambia su cantidad final o si ambos ceden en la misma cantidad, el arbitraje suele establecer la cifra en la mitad (1.35$/hora en este caso). Ahora cada lado necesita determinar que aumento proponer para obtener un beneficio máximo.

a) Formule este problema como un juego de dos jugadores de suma 0.
b) Utilice el concepto de estrategias dominadas para determinar la mejor estrategia para cada lado.
c) Sin eliminar estrategias dominadas utilice el criterio mínimas para determinar la mejor estrategia para cada lado.

Ejercicio N° 8- Dos jugadores juegan lo siguiente: en simultáneo muestran uno o dos dedos. Si las cantidades de dedos coinciden el jugador 1 gana 1$ si no es el jugador 2 el que gana $1. Resolver el juego analítica y gráficamente.

Ejercicio N° 9- Considere el juego que tiene la siguiente matriz de pago:

I/II	1	2
1	3	-2
2	-1	2

Resolver el juego en forma gráfica y analítica.

Ejercicio N° 9- Dos empresas compiten con un mismo producto en el mercado que monopolizan. Actualmente están diseñando sus campañas de publicidad en radio y televisión para el próximo verano. Según los estudios de marketing, las porciones de mercado que le ganarían a su competidor si anuncian en radio y/o televisión, considerando la perspectiva de la empresa A están dadas, en porcentajes, en la siguiente tabla:

Estrategia	Publicidad en TV	Publicidad en Radio
Publicidad en TV	2	1
Publicidad en Radio	-1	3

Se desea establecer la estrategia de publicidad que optimice la porción de mercado a ganar y cual es ésta.

Ejercicio N° 10- Resolver el juego dado por la matriz de pagos:

JugadorI/Jugador II	1	2	3
1	1	-2	0
2	-1	3	-2
3	0	-3	0

Ejercicio N° 11- Resolver el siguiente juego.

Estrategias	1	2	3
1	3	-3	0
2	5	7	2
3	9	1	-1

Ejercicio N° 12- Dos empresas compiten por un mercado con tres estrategias posibles de publicidad que por razones de costos no pueden combinar entre sí. Deben elegir entonces una opción entre hacer publicidad por radio, por televisión o por afiches callejeros. El resultado en porcentaje de mercado que ganaría o perdería la empresa A en cada cruce de estrategias ha sido establecido en la matriz de pagos

Empresa B

Empresa A		Radio	TV	Afiches
	Radio	2	-5	3
	TV	3	0	5
	Afiches	-1	-2	0

Determinar la estrategia óptima para cada empresa y el porcentaje de mercado que variará para cada una luego de la publicidad elegida.

Ejercicio N° 13- Resolver el juego cuya matriz de pagos es:

JugI/JugII	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3
Estrategia 1	-1	2	5
Estrategia 2	2	-1	4

Ejercicio N° 14- Una empresa de transporte de cargas realiza su servicio entre la Ciudad de Buenos Aires y la de Mendoza. Dispone de dos caminos alternativos: la ruta 7 directamente o la ruta 8 que pasa por Río Cuarto en Córdoba y empalma con la 7 en Villa Mercedes, San Luís. Si bien la empresa cumple con las reglamentaciones vigentes trata de evitar los controles de carga que efectúa la Dirección Nacional de Transporte pues esto le implica costos por demoras que se evalúan en $1000 por control. La Dirección Nacional de Transporte tiene personal limitado para los controles así que ha decidido optar entre dos políticas: colocar su puesto de control en una sola ruta en cuyo caso hay seguridad de que un camión será controlado si va por esa ruta, o partir a la mitad su personal colocando un puesto en cada ruta, pero en ese caso teniendo una probabilidad 0.5 de controlar el camión si este va por ruta 7 y otra probabilidad 0.3 de controlarlo si este va por ruta 8. Se desea establecer entonces la estrategia óptima de elección de ruta y política de control para la empresa y la Dirección Nacional de Transporte.

Ejercicio N° 15- Dada la matriz de pagos siguiente, resolver por programación lineal para ambos jugadores.

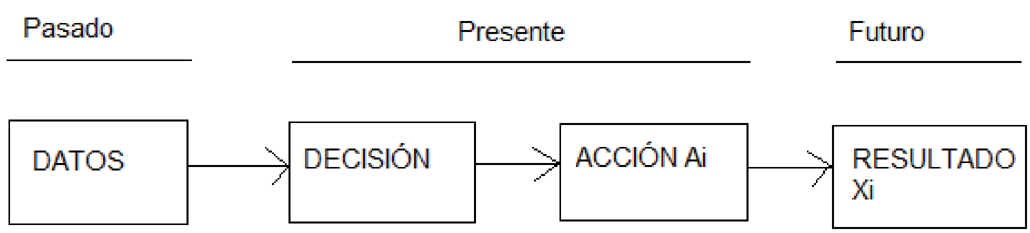
	B1	B2	B3
A1	3	-1	-3
A2	-2	4	-1
A3	-5	-6	2

VII- Teoría de la Decisión

VII.1 Introducción

Por lo general tomar una decisión involucra un proceso en el tiempo. En el pasado seguramente se han recogido datos que actualmente son utilizados como información para decidir realizar una acción de entre varias posibles. Los resultados de la acción realizada se verán en el futuro. En la Gráfica 1 se presenta un esquema de lo antedicho.

Gráfica 1



Las distintas acciones posibles se denotan $A_1, A_2, \dots, A_n$. Por otra parte hay diferentes situaciones futuras $F_1, F_2, \dots, F_m$ en las cuales se darán los resultados X_{ij}. Es decir: X_{ij} es el resultado de la acción A_i en el futuro F_j.

Cada futuro puede interpretarse como un *"estado de la naturaleza"*. Si los futuros correspondiesen a las estrategias posibles de un oponente racional, el problema de tomar una decisión podría interpretarse como un juego de dos jugadores, pero el oponente "naturaleza" no suele seleccionar sus estrategias buscando un óptimo opuesto a la estrategia de quien decide, sino que se comporta más benignamente.

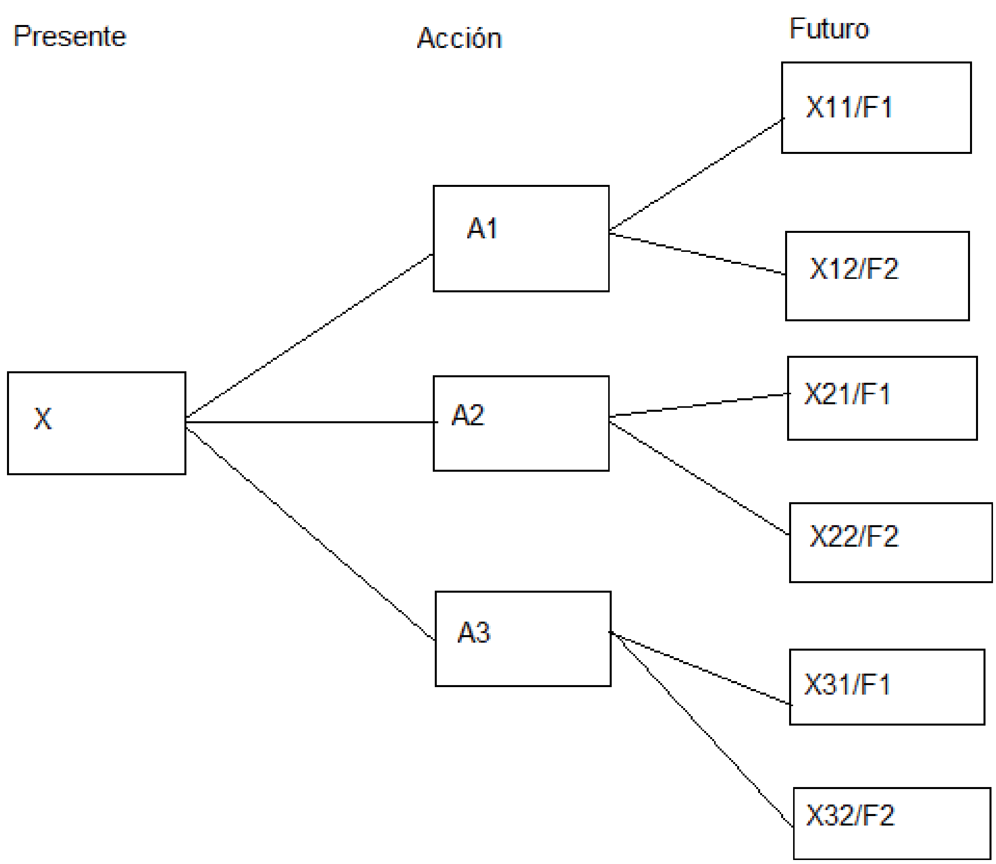
Veamos un ejemplo. En una fábrica se desea decidir si se compra maquinaria nueva (acción A_1), se reforma la maquinaria actualmente en uso (acción A_2) o se la sigue utilizando como está (acción A_3). Se sabe que en el futuro puede aumentar la demanda (futuro F_1) o puede no aumentar (futuro F_2). Claramente los resultados de cada una de las acciones posibles, en términos de ganancias, variarán de acuerdo a como se presente el futuro. Estas ganancias pueden estimarse y disponerse en una matriz de resultados como se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1

Acción/Futuro	F_1 Demanda aumentada	F_2 Demanda igual
A_1 Usar maquinaria nueva	X_{11}	X_{12}
A_2 Usar maquinaria reformada	X_{21}	X_{22}
A_3 Usar maquinaria actual	X_{31}	X_{32}

Las cantidades X_{ij} son las ganancias a obtener si se realiza la acción A_i cuando el futuro resulte F_j. La matriz de resultados puede diagramarse como un árbol de decisión según la Gráfica 2.

Gráfica 2



Cada futuro tiene una cierta probabilidad de ocurrencia. En este caso p_1 es la probabilidad del futuro p_1 y p_2 la probabilidad del futuro F_2 de forma tal que $p_1 + p_2 = 1$. Estas probabilidades forzosamente habrán de influir en la decisión según el criterio que se adopte para tomarla. En el presente problema ese criterio consistirá en buscar la máxima ganancia.

A partir de aquí se pueden identificar distintas condiciones bajo las que se produce la decisión.

i) *Certeza* Existe un único futuro posible F que se producirá con probabilidad $p = 1$

ii) *Riesgo* Existen varios futuros (estados de la naturaleza) posibles y sus probabilidades se conocen.

iii) *Incertidumbre* Existen varios futuros (estados de la naturaleza) posibles y sus probabilidades no se conocen.

VII.2 Decisión en condiciones de riesgo

Consideremos un nuevo ejemplo. Un agricultor puede sembrar trigo o maíz y tiene para los próximos meses estos posibles estados climáticos: tiempo bueno, tiempo variable o tiempo malo. Las ganancias X_{ij}, en cada situación posible, se dan en la Tabla 2 junto con las probabilidades conocidas de cada estado de la naturaleza.

Tabla 2

	F_1 Tiempo Bueno	F_2 Tiempo Variable	F_3 Tiempo Malo
A_1 Sembrar Trigo	2000 $/ha	1000 $/ha	500 $/ha
A_2 Sembrar Maíz	4000 $/ha	500 $/ha	0 $/ha
	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.5$	$p_3 = 0.2$

Conocidas las probabilidades de los estados del tiempo para los próximos meses nos encontramos en este problema con la necesidad de tomar una decisión en condiciones de *riesgo*. Es decir, no tenemos certezas de lo que habrá de ocurrir con el clima, pero conocemos el peso de sus distintas posibilidades. En esta situación, y acordado el criterio de buscar la máxima ganancia, se puede proceder obteniendo el resultado esperado de cada acción factible. Una vez hecho esto se elegirá la acción cuya expectativa de ganancia sea la mayor.

$$VE(A_1) = 2000x0.3 + 1000x0.5 + 500x0.2 = 1200\$/ha$$

$$VE(A_2) = 4000x0.3 + 500x0.5 + 0x0.2 = 1425\$/ha$$

De acuerdo a estos cálculos deberá elegirse la acción A_2 sembrar maíz.

Observaciones:

a) La idea detrás de este procedimiento es que si la decisión tuviera que tomarse muchas veces, por ejemplo todos los años, la tendencia central indicada por el valor esperado óptimo indicaría mayor ganancia total tomando la acción A_2.

b) Podría pasar, como ocurre en los juegos entre estrategias de un mismo jugador, que una acción dominara totalmente a la otra presentando para todos los futuros posibles mayores o iguales ganancias que otra.

c) Maximizar la ganancia podría hacer que el riesgo de pérdida aumentara. Supóngase al mismo agricultor, pero con los datos aportados por la Tabla 3

Tabla 3

	F_1 Tiempo Bueno	F_2 Tiempo Variable	F_3 Tiempo Malo
A_1 Sembrar Trigo	2000 $/ha	1000 $/ha	500 $/ha
A_2 Sembrar Maíz	6000 $/ha	0 $/ha	0 $/ha
	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.5$	$p_3 = 0.2$

Al utilizar el criterio del valor esperado:

$$VE(A_1) = 2000x0.3 + 1000x0.5 + 500x0.2 = 1200\$/ha$$

$$VE(A_2) = 6000x0.3 + 0x0.5 + 0x0.2 = 1800\$/ha$$

Corresponde entonces, según el criterio empleado, tomar la acción A_2. Sin embargo, debe quedarnos claro que corremos un fuerte riesgo de no tener ninguna ganancia si se presentasen los estados climáticos F_2 o F_2. Ese riesgo de no ganar o costo de oportunidad, puede ser apreciado utilizando la Teoría de la Utilidad que cae fuera de los límites de esta exposición introductoria.

VII.3 Decisión en condiciones de incertidumbre

Supongamos ahora un nuevo caso en el cual las probabilidades de los distintos estados de la naturaleza no se conocen y sin embargo debemos tomar una decisión. Consideremos que la Tabla 4 expresa los resultados de un cierto problema donde esto ocurre.

Tabla 4

	F_1	F_2	F_3	F_3
A_1	2	2	0	1
A_2	1	1	1	1
A_3	0	4	0	0
A_4	1	3	0	0

Ante la condición de *incertidumbre* provocada por el desconocimiento de las probabilidades de cada futuro F_j no puede usarse el criterio del valor esperado. Sin embargo, son varias las formas en que el problema puede abordarse.

Observación:

En lo que sigue se supone que un resultado es mejor cuanto mayor es. Sin embargo, en determinados problemas pudiera ser exactamente al revés. Por ejemplo si la matriz de la Tabla 4 se refiriera a costos está claro que de ejecutarse la acción A_3 un costo de 4 sería peor que un costo de 0. Esto sugiere que, en tales casos, los criterios que se exponen deben ajustarse *"mutatis mutandi"* (cambiando lo que hay que cambiar) para asegurar su efectividad.

i) Criterio de Laplace

También llamado criterio de racionalidad propone asignar a cada futuro F_j igual probabilidad p_j según el "principio de la razón insuficiente" que considera válida la suposición de equiprobabilidad ante la falta de otra información. Así una vez fijadas estas probabilidades se procede a buscar la acción que produzca el valor esperado óptimo. Para el problema considerado:

$$VE(A_1) = 2\times\frac{1}{4} + 2\times\frac{1}{4} + 0\times\frac{1}{4} + 1\times\frac{1}{4} = 1.25$$

$$VE(A_2) = 1\times\frac{1}{4} + 1\times\frac{1}{4} + 1\times\frac{1}{4} + 1\times\frac{1}{4} = 1$$

$$VE(A_3) = 0\times\frac{1}{4} + 4\times\frac{1}{4} + 0\times\frac{1}{4} + 0\times\frac{1}{4} = 1$$

$$VE(A_4) = 1\times\frac{1}{4} + 3\times\frac{1}{4} + 0\times\frac{1}{4} + 0\times\frac{1}{4} = 1$$

Según el criterio de Laplace la decisión debe consistir entonces en ejecutar la acción A_1.

Observación:

Si las acciones posibles fueran las mismas y los futuros se considerasen en forma diferente, agrupándolos o separándolos de alguna manera, pudiera ocurrir que el criterio de Laplace condujera a una decisión distinta al dividir la probabilidad total en partes iguales.

ii) Criterio de Wald

Enfoca el problema de decidir con pesimismo. Así analiza, en el supuesto de realizar la acción A_i, cuál sería el peor resultado posible y luego de realizar esto para todas las acciones en consideración, selecciona la mejor de las peores cantidades halladas. En términos matemáticos lo que hace es calcular el resultado $VW = \underset{i}{\mathrm{Max}}\,\underset{j}{\min} X_{ij}$ y elegir la acción A_i que lo produce. Para el problema ejemplo analizado se tiene la Tabla 7.5

Tabla 7.5

Acción	Peor Resultado
A_1	0
A_2	1
A_3	0
A_4	0

$$VW = \underset{i}{\mathrm{Max}}\,\underset{j}{\min} X_{ij} = 1$$

Al seguir este criterio se debe decidir realizar la acción A_2. De paso obsérvese que si la matriz expresara costos se debiera calcular $VW = \min_i \operatorname{Max}_j X_{ij} = 1$ correspondiendo entonces ejecutar también, en este particular caso, la acción A_2.

iii) Criterio de Hurwicz

Propone seleccionar un coeficiente de optimismo α en el rango $0 \leq \alpha \leq 1$. Luego para cada acción A_i se calcula la cantidad

$$H_i = \alpha \times \operatorname{Max}_j(X_{ij}) + (1 - \alpha) \times \min_j X_{ij}$$

Se selecciona la acción A_i que corresponda al mejor valor H_i. Por ejemplo si $\alpha = 0.6$ para el ejemplo analizado se tiene

$$H_1 = 0.6 \times 2 + 0.4 \times 0 = 1.2$$
$$H_2 = 0.6 \times 1 + 0.4 \times 1 = 1$$
$$H_3 = 0.6 \times 4 + 0.4 \times 0 = 2.4$$
$$H_4 = 0.6 \times 3 + 0.4 \times 0 = 1.8$$

Como consecuencia la acción a tomar según este criterio es A_3

Observaciones:

a) Un valor $\alpha = 0$ conduciría a elegir para cada acción A_i su peor resultado y si se tomara entonces el mejor valor de H_i este coincidiría con VW del criterio de Walt. Si por el contrario se eligiera $\alpha = 0$ para cada acción A_i se elegiría su mejor resultado y luego, de entre ellos, el mejor colocándose así en una posición de extremo optimismo.

b) La cuestión es entonces establecer el valor de α de una manera adecuada al criterio de optimismo con el que quiera decidirse. Una técnica que puede emplearse para determinar ese valor es proponer a quien toma la decisión que establezca para que valor de *X* entre 0 y 1 le es indiferente cuál de las acciones A_1 ó A_2, de la matriz de resultados de la Tabla 6, se elija.

Tabla 6

	F_1	F_2
A_1	0	1
A_2	X	X

Es claro que:

$$H_1 = \alpha \times 1 + (1 - \alpha) \times 0 = \alpha$$

$$H_2 = \alpha \times X + (1 - \alpha) \times X = X$$

Como para que cualquiera de las decisiones A_1 ó A_2 dé lo mismo debe ocurrir $H_1 = H_2$, en ese caso resultará $\alpha = X$. En esta circunstancia a quien decide le da lo mismo ganar X, hecho que logrará independientemente de cual sea el futuro si elige la acción A_2, que tener una ganancia que pueda ser 0 o 1 si realiza la acción A_1

iv) Criterio de Savage

Este enfoque es muy distinto a los anteriores y se basa en la cuantificación del *"lamento"* por no haber decidido una acción A_i cuando ya se sabe que ha ocurrido en el futuro. Si de antemano se hubiera conocido cual futuro habría de darse, en ese estado natural hubiera habido alguna acción que efectivamente diera la mayor ganancia; de tal modo, si se ha decidido por otra alternativa, habrá una diferencia entre lo que se ganó y lo que pudo ganarse que es la cantidad que se "lamenta" no haber obtenido. Este "lamento" se denomina más propiamente costo de oportunidad. En el problema que se analiza para cada una de las acciones posibles los eventuales "lamentos" son los de la Tabla 7

Tabla 7

	F_1	F_2	F_3	F_3
A_1	0	2	1	0
A_2	1	3	0	0
A_3	2	0	1	1
A_4	1	1	1	1

Una vez obtenidas estas cantidades que forman la llamada matriz de costos de oportunidad se procede a calcular para cada acción A_i el máximo costo. De esta forma surge la Tabla 8

Tabla 8

Acción	Máximo Costo de Oportunidad
A_1	2
A_2	3
A_3	2
A_4	1

Finalmente se decide entonces por la acción que garantice el menor "lamento", en este caso A_4

La exposición efectuada hasta aquí muestra claramente que la acción a realizar en un mismo problema de decisión puede ser distinta según el criterio que se adopte para elegirla.

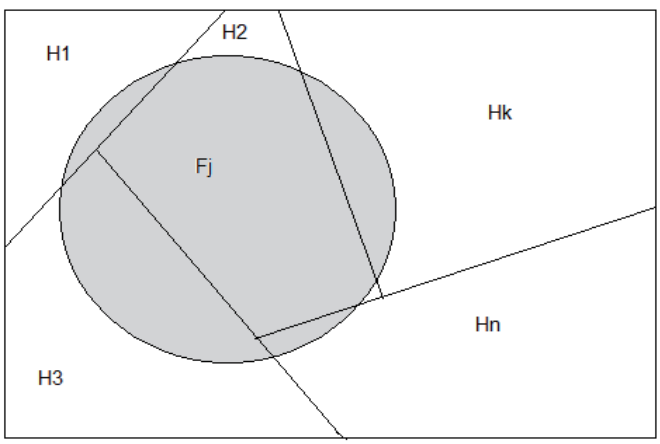
Al respecto sólo cabe comentar que aun siendo *"racionales"* todos los criterios enunciados, la adopción de uno u otro dependerá de las características singulares del problema en cuanto a posibilidades, apreciaciones subjetivas y riesgos que puedan o quieran enfrentarse.

VII.4 Enfoque Bayesiano de la Decisión

Una forma de ajustar el proceso decisorio reduciendo la incertidumbre es establecer, al menos en forma subjetiva, una probabilidad para la ocurrencia de cada "estado de la naturaleza". Esto significa, por ejemplo, que una o varias personas experimentadas en el dominio de estudio establecen un consenso sobre las posibilidades que se dé efectivamente cada futuro. Se estaría entonces en la condición de decisión bajo riesgo que se analizó en VII.2, solo que las probabilidades de cada futuro pudieran no estar basadas en datos fehacientes sino en apreciaciones un tanto intuitivas de quienes conocen el dominio. En este contexto si las probabilidades pudieran objetivizarse un poco más, recurriendo a algunos análisis y pruebas estadísticas, esto redundaría en una decisión más precisa. Tal cosa puede hacerse, y efectivamente en muchos casos se realiza, basándose en consideraciones de probabilidad bayesiana.

La probabilidad de un hecho $H_k$condicionado a la ocurrencia real de un futuro F_j se calcula por $P(H_k|F_j) = \frac{P(H_k \cap F_j)}{P(F_j)}$. En la Gráfica 3 la zona sombreada muestra como distintos hechos se presentan conjuntamente con el futuro F_j , mientras la zona no sombreada representa la ocurrencia de esos mismos hechos en futuros distintos.

Gráfica 3



Al utilizar la fórmula de Bayes, la probabilidad de un futuro F_j "a posteriori" de cada hecho constatado H_k se calcula

$$P(F_j|H_k) = \frac{P(H_k|F_j)P(F_j)}{P(H_1|F_j)P(F_j) + \cdots P(H_k|F_j)P(F_j) + \cdots P(H_n|F_j)P(F_j)}$$

De esta forma se pueden obtener las probabilidades de cada “estado de la naturaleza” cuando ocurre cada hecho. Esto representa una corrección realizada sobre las probabilidades de cada futuro que fueron establecidas de antemano ya fuera en forma subjetiva o con información más incompleta. Una vez halladas estas probabilidades “a posteriori” es posible calcular con ellas, en forma más ajustada, el valor esperado de cada acción y optimizar entonces la decisión. Veamos un ejemplo.

El problema del agricultor planteado en XI.2 contaba con las ganancias y probabilidades “a priori” que se recuerdan en la Tabla 9.

Tabla 9

	F_1 Tiempo Bueno	F_2 Tiempo Variable	F_3 Tiempo Malo
A_1 Sembrar Trigo	2000 $/ha	1000 $/ha	500 $/ha
A_2 Sembrar Maíz	4000 $/ha	500 $/ha	0 $/ha
	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.5$	$p_3 = 0.2$

Supongamos que para resolver el problema se encargue un estudio sobre la existencia de subsidios a la producción. Este estudio tiene un costo de $100 por cada hectárea sembrada y arroja los siguientes datos expresados en la Tabla 10

Tabla 10

$P(H_k \vert F_j)$	F_1 Tiempo Bueno	F_2 Tiempo Variable	F_3 Tiempo Malo
H_1 Subsidio Total	0	1/6	2/6
H_2 Medio Subsidio	1/6	2/6	3/6
H_3 Sin Subsidio	5/6	3/6	1/6

Cada celda de la tabla contiene la probabilidad $P(H_k|F_j)$ de obtener un tipo de subsidio cuando ocurre cada futuro. Claramente, cuando se anuncia un hecho, por ejemplo , H_2 existencia de medio subsidio, hay que tomar una decisión sobre si sembrar trigo (acciónA_1) o maíz (acción A_2). Para ello se arma la Tabla 11 en la cual cada celda contiene la probabilidad corregida de cada futuro cuando se produce cada tipo de subsidio $P(F_j|H_k)$ Cada uno de los futuros posibles tiene ahora una probabilidad “a posteriori” de cada hecho que se calcula al utilizar la fórmula de Bayes. Por ejemplo:

$$\mathrm{P(F_1|H_1)} = \frac{0 \times 0.3}{0 \times 0.3 + \frac{1}{6} \times 0.5 + \frac{2}{6} \times 0.2} = 0$$

$$\mathrm{P(F_2|H_1)} = \frac{\frac{1}{6} \times 0.5}{0 \times 0.3 + \frac{1}{6} \times 0.5 + \frac{2}{6} \times 0.2} = 0.56$$

$$P(F_2|H_1) = \frac{\frac{2}{6} \times 0.2}{0 \times 0.3 + \frac{1}{6} \times 0.5 + \frac{2}{6} \times 0.2} = 0.44$$

Tabla 11

$P(F_j \vert H_k)$	F_1 Tiempo Bueno	F_2 Tiempo Variable	F_3 Tiempo Malo
H_1 Subsidio Total	0	0.56	0.44
H_2 Medio Subsidio	0.158	0.526	0.316
H_3 Sin Subsidio	0.469	0.469	0.062

Al conocerse si va a haber subsidio completo, parcial o no va a haberlo, las nuevas probabilidades halladas permiten establecer una regla de decisión ajustada a esa información adicional que se solicitó. Por ejemplo, si hubiera subsidio total habría que tener en cuenta las probabilidades de "estado de la naturaleza" dadas en el primer renglón de la Tabla 11. De acuerdo a ella los valores esperados de ganancias según se siembre trigo o maíz son:

$$VE(A_1) = 2000x0 + 1000x0.56 + 500x0.44 - 100 = 670\$/ha$$

$$VE(A_2) = 4000 \times 0 + 500 \times 0.56 + 0 \times 0.44 - 100 = 175\$/ha$$

Al restar \$100 en cada cálculo del valor esperado, se está teniendo en cuenta el costo por hectárea del estudio realizado. Los resultados obtenidos determinan entonces que si hay subsidio lo más conveniente resulta sembrar trigo (A_1). Al calcular los valores esperados relacionados con la ocurrencia de cada uno de los escenarios H_k posibles se obtiene la siguiente regla de decisión:

$$d(H_1) = A_1$$

$$d(H_2) = A_1$$

$$d(H_3) = A_2$$

Es decir que según el criterio del valor esperado calculado aplicando las probabilidades "a posteriori", si el agricultor sabe que va a haber subsidio total o medio subsidio le conviene más sembrar trigo, mientras que si no va a haberlo le resulta mejor sembrar maíz.

VII.5 Valor de la Información

i) Valor de la información completa

Se puede medir el valor de la información al decidir. Para esto se parte del concepto de *información completa* que consiste en conocer efectivamente cual futuro habrá de presentarse en cada oportunidad en que deba decidirse. De acuerdo a ello, suponiendo que cada futuro habrá de darse en la proporción de veces que indica su probabilidad de ocurrencia, se define la ganancia esperada con información completa (GIC) como la suma de los productos de los mejores resultados en cada futuro por las probabilidades de ocurrencia de esos futuros. Para nuestro ejemplo resumido en la Tabla 9 se tiene:

$$GIC = 4000 \times 0.3 + 1000 \times 0.5 + 500 \times 0.2 = 1800\$ / ha$$

Por otra parte la decisión bajo condición de riesgo implica realizar la acción A_i cuya ganancia esperada $VE(A_i)$ resulte mayor.

$$VE(A_2) = 4000 \times 0.3 + 500 \times 0.5 + 0 \times 0.2 = 1425\$ / ha$$

De tal forma el valor de contar con la información completa VIC resulta la diferencia entre la ganancia esperada con información completa y el valor esperado óptimo. Así resulta:

$$VIC = 1800 - 1425 = 375\$ / ha$$

Esto significa que por la información completa acerca del clima, es decir por saber exactamente que va a ocurrir con él, podrían pagarse hasta 375$/ha.

ii) Valor de la información adicional

Hemos visto además que es posible atenuar el riesgo utilizando información adicional por medio de estudios que actualicen las probabilidades de cada futuro según los hechos que se presenten ¿Hasta cuanto tendrá sentido pagar por estudios de este tipo?

Hay que tener en cuenta que según cada hecho que efectivamente se dé, habrá una acción que produzca el mejor valor esperado con lo cual la ganancia promedio que produzca la regla de decisión adoptada se calculará como la suma de los productos del mejor valor esperado para cada hecho por la probabilidad de que ese hecho se presente. En el ejemplo del agricultor si se presenta el hecho H_1, otorgamiento de subsidio completo, el valor esperado de la acción decidida según la regla d, sin restarle el costo de la información sería:

$$VE(A_1) = 2000 \times 0 + 1000 \times 0.56 + 500 \times 0.44 = 770\$ / ha$$

De forma similar si ocurre el hecho H_2, medio subsidio, la acción elegida por la regla será A_1 con valor esperado

$$VE(A_1) = 2000 \times 0.158 + 1000 \times 0.526 + 500 \times 0.316 = 900\$ / ha$$

Finalmente si no hay subsidio, hecho H_3 , la acción A_2 decidida tiene valor esperado

$$VE(A_2) = 4000 \times 0.469 + 500 \times 0.469 + 0 \times 0.063 = 2110.5\$ / ha$$

Obsérvese que se han calculado los valores esperados óptimos ante cada hecho utilizando la probabilidad "a posteriori" de cada futuro dada por la Tabla 11.

De acuerdo a lo expuesto la ganancia media producida por la regla d, que tiene en cuenta la información adicional, resulta

$$GIA(d) = 770 \times P(H_1) + 900 \times P(H_2) + 2110.5 \times P(H_3)$$

Las probabilidades de cada uno de los hechos H_k pueden calcularse a partir de las obtenidas en la Tabla 10 al tener en cuenta que por definición de probabilidad condicional

$$P(H_k | F_j) = \frac{P(H_k \cap F_j)}{P(F_j)} \quad \text{y luego} \quad P(H_k | F_j) P(F_j) = P(H_k \cap F_j)$$

Entonces la probabilidad de cada hecho H_k se obtendrá como la suma de las probabilidades conjuntas con cada futuro F_j

$$P(H_k) = \sum_j P(H_k \cap F_j)$$

En el ejemplo que estamos analizando se tienen las probabilidades "a priori" $P(F_j)$ de cada futuro dadas en la Tabla 2 y las probabilidades $P\left(H_k \middle| F_j\right)$ de cada hecho condicionado a cada futuro en la Tabla 10. Entonces

$$P(H_1) = 0 \times 0.3 + \frac{1}{6} \times 0.5 + \frac{2}{6} \times 0.2 = 0.15$$

$$P(H_2) = \frac{1}{6} \times 0.3 + \frac{2}{6} \times 0.5 + \frac{3}{6} \times 0.2 = 0..317$$

$$P(H_3) = \frac{5}{6} \times 0.3 + \frac{3}{6} \times 0.5 + \frac{1}{6} \times 0.2 = 0.533$$

Luego calculamos la ganancia media con información adicional

$$GIA(d) = 770 \times 0.15 + 900 \times 0.317 + 2110.5 \times 0.533 = 1525.70\$/ha$$

Como la decisión en condiciones de riesgo, tomada al conocer solo las probabilidades "a priori" de cada futuro, tenía una ganancia esperada de 1425$/ha que se obtenía como resultado de elegir la acción A_2, se ve que el efecto de la información adicional permite una ganancia esperada mayor. En general, lo que se podría llegar a pagar por la información adicional sería la resta entre la ganancia esperada con ella y la ganancia esperada si no se la considera. En nuestro caso el valor de la información adicional es entonces

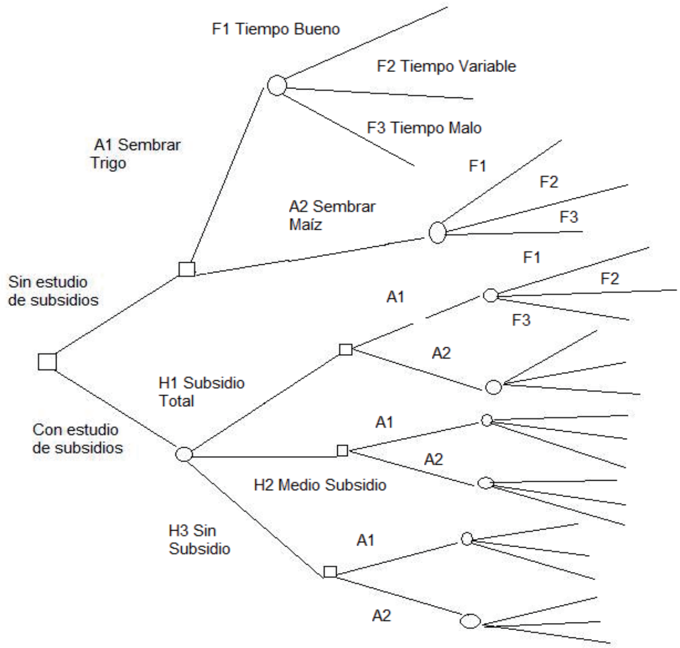
$$VIA = 1525.7 - 1425 = 100.7\$/ha$$

con lo cual el precio pagado efectivamente, de $100 por hectárea, es casi el máximo que tenía sentido pagar.

VII.6 Árboles de Decisión

El enfoque bayesiano de la decisión puede expresarse en forma gráfica a través de un *árbol de decisión*. Este consiste en un esquema que ordena cronológicamente las alternativas posibles basándose en nodos que pueden simbolizar puntos de decisión o puntos de bifurcación de acuerdo a probabilidades. Es de práctica señalar los nodos de decisión con cuadrados y los de probabilidad con círculos. Al unir los nodos por ramas se despliega el árbol que tiene en cuenta la precedencia de los eventos. Para nuestro ejemplo del agricultor el árbol es el de la Gráfica 4

Gráfica 4



La cuestión es que mientras en los nodos de decisión la elección de la rama a seguir la realiza quien decide, en los nodos de probabilidad esa elección está librada al azar que marca la respectiva distribución. Tomar la decisión óptima involucra entonces realizar las cuentas que se efectuaron en VII.4 considerando las esperanzas matemáticas necesarias. Por ejemplo, la ganancia esperada al decidir la acción A_1 cuando se ha presentado el hecho H_1 es, como vimos antes,

$$VE(A_1) = 2000 \times 0 + 1000 \times 0.56 + 500 \times 0.44 = 770\$/ha$$

Para calcular esta ganancia media se han utilizado las probabilidades "a posteriori" de cada futuro. Por otra parte la ganancia esperada al decidir la acción A_2 luego del mismo hecho H_1 es:

$$VE(A_2) = 4000 \times 0 + 500 \times 0.56 + 0 \times 0.44 = 275\$/ha$$

Esto implica que situado en el nodo de decisión correspondiente la rama del árbol que representa la acción A_2 debe descartarse. Al ir desde ese nodo, de color negro en la Gráfica 5, hacia la raíz, se llega al nodo anterior que es de probabilidad lo que implica que allí no hay decisión posible. Esto lleva a considerar las ramas que, saliendo de tal nodo, representan el otorgamiento de medio subsidio H_2 o la inexistencia del mismo H_3 y luego, en cada una de ellas las ganancias esperadas respectivas. Así podrán eliminarse otras ramas del árbol por no resultar óptimas.

Cuando se explora hacia atrás el árbol desde el nodo de probabilidad de los hechos posibles, se llega a la raíz que es un nodo de decisión. La ganancia esperada cuando se cuenta con la información adicional sobre las probabilidades de subsidios ya fue calculada y resultó:

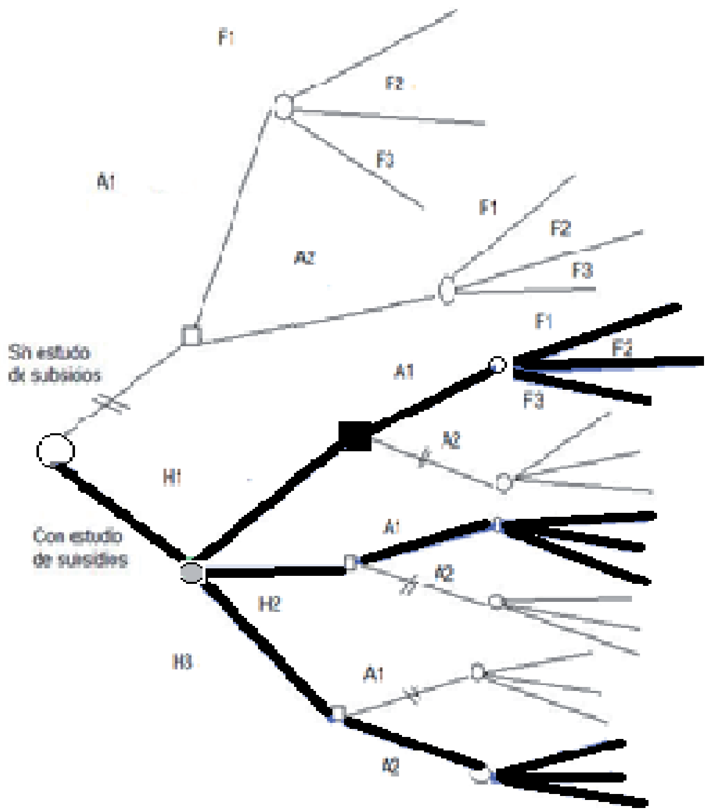
$$GIA(d) = 770 \times 0.15 + 900 \times 0.317 + 2110.5 \times 0.533 = 1525.70\$ / ha$$

Como en el presente nodo hay que decidir, ya que es precisamente un nodo de decisión, es necesario comparar esta cantidad con la que debiera esperarse si no se contara con información sobre los subsidios. Como ya se vio en 2-, tal ganancia esperada es consecuencia de tomar la acción A_2 y resulta:

$$VE(A_2) = 4000x0.3 + 500x0.5 + 0x0.2 = 1425\$ / ha$$

La comparación indica que en el árbol de decisión debe descartarse la rama que no incorpora información adicional. Finalmente, entonces quedan en pie, como regla de decisión óptima, todas las ramas que, partiendo de la raíz, señalada en negro en la Gráfica 5, proporcionan la mejor ganancia esperada.

Gráfica 5



En realidad, la identificación de tales trayectorias requiere los cálculos para cada rama, desde la raíz a las hojas, lo que aquí ha podido simplificarse en base a las cuentas desarrolladas en los anteriores apartados, que permitieron ilustrar el método gráfico, conociendo de antemano la solución.

VII.7 Decisión en Condiciones de Certidumbre

Cuando existe certidumbre sobre el futuro, es decir cuando un determinado futuro tiene probabilidad 1, solo hay que considerar la decisión óptima en ese caso. Para esto se pueden aplicar distintos modelos según las propiedades del sistema que se desee optimizar.

El modelo de programación lineal ya considerado o los diferentes modelos de inventario analizados son ejemplos de ello.

Ejercicios resueltos

Ejercicio N° 1- Los directivos de una empresa deben escoger entre 3 fondos de inversión para colocar un millón de pesos. El departamento de evaluación ha estimado la recuperación esperada en 1 año basándose en tres opciones: un desempeño pobre, moderado o excelente del índice Merval lo que se refleja en la siguiente tabla:

Inversión / Desempeño del Merval	Pobre	Moderada	Excelente
Fondo 1	$50.000	$75.000	$100.000
Fondo 2	$25.000	$50.000	$150.000
Fondo 3	$40.000	$60.000	$175.000
Probabilidad	0,2	0,6	0,2

$$VE(F1) = \$50.000 * 0,2 + \$75.000 * 0,6 + \$100.000 * 0,2 = \$75.000$$

$$VE(F2) = \$25.000 * 0,2 + \$50.000 * 0,6 + \$150.000 * 0,2 = \$65.000$$

$$VE(F3) = \$40.000 * 0,2 + \$60.000 * 0,6 + \$175.000 * 0,2 = \$79.000$$

Se debe elegir el Fondo 3 ya que es el que obtiene mayor valor esperado ($79.000)

Ejercicio N° 2- . Dados los datos del Ejercicio N° 1 se ha ordenado un estudio sobre las probabilidades de dos escenarios económicos distintos cuando se produjeran los desempeños indicados. Esa información se dispuso en la siguiente tabla:

	Pobre	Moderada	Excelente
Baja Inflación	1/2	1/4	1/4
Alta Inflación	1/2	3/4	3/4

Se pretende establecer una regla de decisión que tenga en cuenta esta información.

La información que aporta la tabla se refiere a la probabilidad de un escenario, baja o alta inflación, condicionada a la ocurrencia de uno de los tres futuros posibles: rendimiento pobre, moderado o excelente. Con ella podemos calcular entonces la probabilidad de cada futuro según el escenario que se dé. Es decir:

$$P((BI|Pobre) = \frac{P(BI \cap Pobre)}{P(Pobre)}$$
$$P((BI|Pobre)P(Pobre) = P(BI \cap Pobre)$$
$$P(BI \cap Pobre) = \frac{1}{2} \times 0.2 = 0.1$$
Así también:
$P(BI \cap Moderada) = \frac{1}{4} \times 0.6 = 0.15$ y $P(BI \cap Excelente) = \frac{1}{4} \times 0.2 = 0.05$
Entonces $P(BI) = 0.1 + 0.15 + 0.05 = 0.30$ y luego:
$$P(Pobre|BI) = \frac{0.1}{0.3} = 0.33$$
$$P(Moderada|BI) = \frac{0.15}{0.3} = 0.5$$
$$P(Excelente|BI) = \frac{0.05}{0.3} = 0.17$$
De similar forma se calcula
$$P((Pobre|AI) = \frac{\frac{1}{2} \times 0,2}{\frac{1}{2} \times 0,2 + \frac{3}{4} \times 0,6 + \frac{3}{4} \times 0,2} = 0.14$$
$$P((Moderada|AI) = \frac{\frac{3}{4} \times 0,6}{\frac{1}{2} \times 0,2 + \frac{3}{4} \times 0,6 + \frac{3}{4} \times 0,2} = 0.64$$
$$P((Excelente|AI) = \frac{\frac{3}{4} \times 0,2}{\frac{1}{2} \times 0,2 + \frac{3}{4} \times 0,6 + \frac{3}{4} \times 0,2} = 0.21$$

	Pobre	Moderada	Excelente
Baja Inflación	0.33	0.5	0.17
Alta Inflación	0.14	0.64	0.21

Escenario de Baja Inflación:
$$VE(F1) = \$50.000 * \frac{1}{3} + \$75.000 * \frac{1}{2} + \$100.000 * \frac{1}{6} = \$70.833,33$$
$$VE(F2) = \$25.000 * \frac{1}{3} + \$50.000 * \frac{1}{2} + \$150.000 * \frac{1}{6} = \$58.833,33$$
$$VE(F3) = \$40.000 * \frac{1}{3} + \$60.000 * \frac{1}{2} + \$175.000 * \frac{1}{6} = \$72.500$$

Escenario de Alta Inflación:
$$VE(F1) = \$50.000 * \frac{1}{7} + \$75.000 * \frac{9}{14} + \$100.000 * \frac{3}{14} = \$76.785,71$$

$$VE(F2) = \$25.000 * \frac{1}{7} + \$50.000 * \frac{9}{14} + \$150.000 * \frac{3}{14} = \$67.857,14$$
$$VE(F3) = \$40.000 * \frac{1}{7} + \$60.000 * \frac{9}{14} + \$175.000 * \frac{3}{14} = \$81.785,71$$

En ambos escenarios de baja o alta inflación, se deberá elegir el Fondo 3 ya que el mismo obtendrá el mayor valor esperado.

Ejercicio N° 3- Una empresa de comidas rápidas va a decidir la construcción de una nueva sucursal en un centro comercial abierto, en un centro comercial cerrado o en un lugar alejado en el que los analistas opinan existe un gran potencial de crecimiento. El costo de construcción, independientemente del lugar escogido es de $100.000, el alquiler anual (x 5 años) en el centro al aire libre es de $30.000, en el centro comercial cerrado $50.000 y en el lugar alejado $10.000. La situación es de incertidumbre respecto de las probabilidades de ventas. Se han realizado las siguientes proyecciones de recuperación en 5 años para cada resultado.

	Ventas por debajo del promedio	Ventas promedio	Ventas por encima del promedio
Centro al aire libre	$100.000	$200.000	$400.000
Centro Cerrado	$200.000	$400.000	$600.000
Lugar alejado	$50.000	$100.000	$300.000

Determinar la decisión óptima y la ganancia asociada, ignorando el flujo por encima de 5 años, utilizando los criterios de Wald (Minimax), Laplace, Hurwicz con α= 0,6 y el de Savage.

$\text{CAAL} = \text{Centro al aire libre}$
$\text{CC} = \text{Centro cerrado}$
$\text{LA} = \text{Lugar alejado}$

Ventas – Costo de construcción – Costo del alquiler = Ganancia
Por ejemplo, la ganancia en el centro al aire libre si las ventas están debajo del promedio resultan:
$\$100.000 - \$100.000 - \$30.000 = -\$30.000$
Calculando para cada caso se obtiene la tabla de ganancia:

	Ganancia con ventas por debajo del promedio	Ganancia con ventas promedio	Ganancia con ventas por encima del promedio
$A_1: CAAL$	-$30.000	$70.000	$270.000
$A_2: CC$	$50.000	$250.000	$450.000
$A_3: LA$	-$60.000	$-10.000	$190.000

Para determinar la decisión óptima y la ganancia asociada utilizan los distintos criterios:
Wald:

$\mathrm{A_1: CAAL}$	$100.000
$\mathrm{A_2: CC}$	$200.000
$\mathrm{A_3: LA}$	$50.000

Hay que optar por el centro cerrado ya que se obtiene la mejor ganancia en el peor caso.

Savage:

Se elige el máximo resultado de cada futuro y se calculan los costos de oportunidad

	F1	F2	F3	Savage
$\mathrm{A_1: CAAL}$	$100.000	$200.000	$200.000	$200.000
$\mathrm{A_2: CC}$	$0	$0	$0	$0
$\mathrm{A_3: LA}$	$150.000	$300.000	$300.000	$300.000

Considerando los costos de construcción y alquiler (5 períodos) se tiene que:

	F1	F2	F3
Centro al aire libre	100-100-30x5	200-100-30x5	400-100-30x5
Centro cerrado	200-100+50x5	400-100-50x5	600-100-50x5
Lugar alejado	50-100-10x5	100-100-10x5	300-100-10x5

	F1	F2	F3
Centro al aire libre	-$ 150.000	-$ 50.000	$ 150.000
Centro cerrado	-$ 150.000	$ 50.000	$ 250.000
Lugar alejado	-$ 100.000	-$ 50.000	$ 150.000

Para aplicar el criterio de Savage se obtiene la matriz:

	F1	F2	F3
Centro al aire libre	$ 50.000	$ 100.000	$ 100.000
Centro cerrado	$ 50.000	$ -	$ -
Lugar alejado	$ -	$ 100.000	$ 100.000

Esto significa que construir el centro cerrado es la acción de menor costo de oportunidad ($50.000) y por eso hay que elegirla.

Hurwicz (alfa: 0,6):

A_1: CAAL : $\$400.000 * 0{,}6 - \$100.000 * 0{,}4 = \$280.000$
A_2: CC: $\$600.000 * 0{,}6 + \$200.000 * 0{,}4 = \$440.000$
A_3: LA: $\$300.000 * 0{,}6 - \$50.000 * 0{,}4 = \$200.000$

Vemos como la mayor ganancia la obtengo en la elección del centro cerrado.

Laplace:

$$V_{\text{esperado}}(\text{CAAL}) = \$100.000 * \frac{1}{3} + \$200.000 * \frac{1}{3} + \$400.000 * \frac{1}{3} = \$233.333{,}33$$
$$V_{\text{esperado}}(\text{CC}) = \$200.000 * \frac{1}{3} + \$400.000 * \frac{1}{3} + \$600.000 * \frac{1}{3} = \$400.000$$
$$V_{\text{esperado}}(\text{LA}) = \$50.000 * \frac{1}{3} + \$100.000 * \frac{1}{3} + \$300.000 * \frac{1}{3} = \$150.000$$

La mejor recuperación se da en el caso de la construcción del centro cerrado.

Vemos como a pesar de utilizar distintos métodos para hallar la decisión óptima, la opción elegida es siempre la de construir un centro cerrado.

Ejercicios propuestos

Ejercicio N° 4- La Fuerza Aérea comprará un nuevo tipo de avión y debe determinarse el número de motores de repuesto que se van a comprar. Es posible comprar 15, 20 0 25 motores que el proveedor fabricará en dos plantas. Se sabe, por experiencia anterior, que si los motores son fabricados en la primera planta el número de motores de repuesto requeridos sigue una distribución de Poisson cuyo parámetro es θ_1=21, mientras que si se fabrican en la segunda planta la distribución del número de motores de repuesto requeridos será también Poisson pero con θ_2=24. El costo de cada motor de repuesto comprado ahora, es decir con la compra de los aviones, es de 400000 $ por motor. En cambio, si se los compra más adelante, cuando sea necesario reemplazar los motores originales, el costo será de 900000 $ por motor.

En cualquier caso, se piensa que prácticamente no hay costo de llevar el inventario y que los motores se harán obsoletos cuando lo sean los aviones. Se calcula entonces una función de pérdida dada por la siguiente tabla:

Acción/Estado de la Naturaleza	θ_1=21	θ_2=24
a_1: comprar 15	1.155	1.414
a_2: comprar 20	1.012	1.207
a_3: comprar 25	1.047	1.135

Las pérdidas están expresadas en decenas de millones de pesos (Por ejemplo $1.155x10^7$= 11550000). La experiencia también indica que el proveedor fabrica los dos tercios de toda su maquinaria en la primera planta y el resto en la segunda. Se desea saber entonces:
a) ¿Que acción se recomienda realizar?
b) ¿Cuánto dinero valdrá la pena pagar por la información perfecta?
c) Suponiendo que los datos correspondientes al modelo de avión anterior pueden obtenerse sin costo y que se requirieron en esa oportunidad 30 repuestos ¿cual es la decisión a tomar ahora?

Ejercicio N° 5- Una empresa que se dedica a la venta de un producto de consumo masivo está considerando si conviene o no enviar vendedores a domicilio, y estima que si se sigue la estrategia de enviarlos y el individuo visitado no resulta ser cliente, se incurre en un costo de oportunidad de \$ 1000 con respecto a la estrategia alternativa de no enviar al vendedor, mientras que si resulta ser cliente, el costo de oportunidad es nulo. En base a la experiencia acumulada, la empresa había podido determinar las probabilidades “a priori” de que un individuo sea cliente (0.7) o no cliente (0.3); pero a fin de decidir entre seguir o no esa nueva estrategia de comercialización se consideró conveniente realizar un estudio de mercado. De acuerdo a dicho estudio, tomando como variable de segmentación del mercado la edad, al dividir a la población en dos grupos: menores de 30 años y mayores de 30 años, se encontró que el 75% de los clientes pertenecía al primer grupo, mientras que sólo el 10% de los no clientes pertenecía a dicho grupo. Si el costo de la investigación de mercado fue de \$ 100, determinar si a la empresa le ha resultado o no conveniente realizarla.

Ejercicio N° 6- Un empresario está considerando la compra de uno de los siguientes negocios: Un local de venta de cámaras, uno de venta de computadoras, uno de venta de artefactos electrónicos. Las 3 con la misma inversión inicial. Ha estimado las probabilidades del desempeño de ventas y las correspondientes ganancias que se presentan en las siguientes tablas.

Tabla de probabilidades del desempeño de ventas

	Promedio	Bueno	Excelente
Local de cámaras	0,20	0,60	0,20
Local de computadoras	0,15	0,70	0,15
Local de productos electrónicos	0,05	0,60	0,35

Tabla de ganancias

	Promedio	Bueno	Excelente
Local de cámaras	\$20.000	\$75.000	\$100.000
Local de Computadoras	\$30.000	\$60.000	\$100.000
Local de productos electrónicos	\$25.000	\$75.000	\$150.000

Haga un árbol de decisiones identificando los nodos aleatorios y de decisión. Calcule la ganancia esperada para cada nodo aleatorio. Identifique la decisión óptima.

Ejercicio N° 7- Una empresa estudia la factibilidad de instalar una nueva planta que podrá ser grande o pequeña. También está dispuesta a no construirla si los análisis de la decisión así lo aconsejaran. Hacia el futuro evalúa dos escenarios posibles: mercado favorable a sus productos ó mercado desfavorable. Para cada caso ha cuantificado en base a análisis prospectivos las ganancias o pérdidas que en cada situación obtendría y, por otra parte, no está en condiciones de evaluar la probabilidad de que ocurra cada uno de los dos futuros posibles. Con la información volcada en la Tabla, ¿qué decisión debiera tomar?

	Mercado Favorable	Mercado No Favorable
Planta Grande	200000	-180000
Planta Pequeña	100000	-20000
No hacer nada	0	0

Ejercicio N° 8- Se debe seleccionar una de 4 máquinas para fabricar Q unidades de un producto. Se denomina Qmax y Qmin a las demandas máxima y mínima de dicho producto y se sabe que el costo fijo y el variable por unidad para cada una de las máquinas viene dado por la tabla.

Maquina	K- costo fijo	C- costo variable por unidad
1	100	5
2	40	12
3	150	3
4	90	8

Sabiendo que el costo total de producir Q artículos es $CT = K + C \times Q$ seleccionar la máquina adecuada.

VIII- Simulación

VIII.1 Introducción

La simulación es una técnica experimental de modelado de sistemas que tiene por objeto evaluar sus parámetros de comportamiento a partir de una estimación estadística basada en la realización ficticia de sus actividades. Tal realización puede lograrse si de antemano se conocen los patrones de comportamiento de cada actividad y por supuesto, se dispone también de una descripción del sistema que establece la forma en que ellas se vinculan. Con esos patrones pueden registrase muestras de la actividad total simulada del sistema y evaluar así comportamientos centrales, variabilidades, proporciones e incluso analizar tiempos, costos y beneficios. La simulación reemplaza con ventaja al modelado analítico cuando las características estocásticas del sistema y el carácter intrincado de su expresión matemática dificulta el establecimiento de fórmulas de cálculo. En ese contexto permite mayor simplicidad y similar efectividad como medio para evaluar decisiones. Por ejemplo; el mismo modelo de colas M/M/1, que permite el cálculo del tiempo esperado que cada cliente permanecerá en un sistema, puede ser representado por un modelo de simulación que siga los patrones poisson-exponencial para las entradas y salidas, con velocidades esperadas λ y μ conocidas. Bastará para ello generar simuladamente entradas y salidas de clientes del sistema y a partir de la muestra obtenida establecer una estimación $\widehat{W}$ para el tiempo esperado W. Claro que ya aprendimos que ese tiempo esperado es $W = \frac{1}{\mu-\lambda}$ pero si no contásemos con una fórmula deducida, podríamos obtener una estimación del parámetro por simulación. De tal modo, cuando por la complejidad del sistema o por cualquier otra razón, no disponemos de una fórmula analítica para un parámetro, siempre queda abierto el camino de la simulación para obtener su valor.

VIII.2 Números aleatorios

Si tenemos en una bolsa 1000 bolillas numeradas del 000 al 999, mezcladas sin arreglo a ningún patrón, la probabilidad de elegir una cualquiera de ellas es 1/1000 que resulta la misma que la de elegir cualquier otra. Además, si volvemos la bolilla extraída a la bolsa y mezclamos, la probabilidad de volver a sacarla, o de sacar cualquier otra, sigue siendo 1/1000. Esto pone de manifiesto dos características importantes de este sistema de almacenar y extraer bolillas, y por ende de los números por ellas representados. Todas tienen igual probabilidad de ser elegidas en cada sorteo y cada elección resulta independiente de toda otra anterior. Así, los números elegidos a partir de esta mecánica se denominan aleatorios. Seguramente se podrían realizar diez millones de sorteos con estas características y obtener, en base a la llamada regularidad estadística, aproximadamente una misma proporción de veces cada uno de los mil números. Es decir, tal proporción debiera ser cercana a 1/1000. En la práctica uno no anda por la vida con bolsas de 1000 bolillas encima, pero está claro que cada vez que quiere elegir un número de tres dígitos al azar, precisa hacer un sorteo que al menos emule las condiciones del sistema descripto de las bolillas en la bolsa. Ya que esto puede ser muy necesario al simular, como en seguida veremos, se han diseñado procedimientos algorítmicos, para computadoras y calculadoras, a fin de obtener números que sigan estos patrones Claro que por tratarse de un cálculo cuyos principios podemos conocer, su obtención podría no ser tan aleatoria. Sin embargo, es posible dar al resultado una característica al menos *pseudoaleatoria*, realizando el cálculo a partir de un número llamado semilla, obtenido en forma azarosa o desconocida. En ese caso nos será muy difícil reproducir el cálculo, si lo intentáramos, por lo cual a efectos prácticos actuaríamos con el número obtenido como si fuera puramente aleatorio.

El procedimiento algorítmico básico para obtener un número aleatorio es el método congruencial. Se basa, justamente en las congruencias de módulo m que estudia la aritmética. Un número x_1 es congruente con otro x_0, módulo m, si se cumple la relación $m \times q + x_1 = ax_0 + c$. Esto se corresponde con la disposición de una división por el entero m del número $ax_0 + c$, siendo q el cociente y x_1 el resto. Es decir:

$$\begin{array}{r|l} ax0 + c & m \\ \hline x1 & q \end{array}$$

Esto se suele escribir $x_1 \equiv (ax_0 + c)\ modulo\ m$

Si por ejemplo fueran $m = 8$, $a = 1$, $c = 5$ y se eligiera al azar la semilla $x_0 = 5$ se tendría

$$\begin{array}{r|l} 1x5 + 7 & 8 \\ \hline 4 & 1 \end{array}$$

siendo, $8 \times 1 + \mathbf{4} = 1 \times \mathbf{5} + 7$ o lo que resulta lo mismo, $4 \equiv (1 \times 5 + 7)\ modulo\ 8$. El azar de la elección de la semilla x_0 como un número natural entre 0 y 7, se refiere en realidad a una hipótesis de igual probabilidad e independencia. Esto puede suponerse pues, para el usuario del algoritmo, la elección resulta desconocida. La clave es que siempre está fundada en un cálculo distinto y oculto, efectuado por ejemplo a partir de la hora del reloj interno de una computadora. Así el número 5 se supondrá obtenido aleatoriamente pues, dada cualquier semilla elegida entre 0 y 7, los números congruentes con ellas aparecen solo una vez en la Tabla 1 correspondiente a la expresión $x_{n+1} \equiv (ax_n + c)\ modulo\ m$

Tabla 1

n	Semillas x_n	$1 \times x_n + 7$	q	Restos x_{n+1}
0	5	12	1	4
1	4	11	1	3
3	3	10	1	2
4	2	9	1	1
5	1	8	1	0
6	0	7	0	7
7	7	14	1	6
8	6	13	1	5

Es decir; si la experiencia se realizase en un número suficiente de oportunidades, se obtendría una proporción aproximadamente igual de veces cualquiera de los restos posibles de la división. Cada uno de ellos tendría entonces igual probabilidad de ser elegido.

La elección de $m = 8$ tampoco es casual. Se debe a que el byte tiene 8 bits y con él es posible representar los números en una computadora, aunque no nos detendremos en esto aquí. Sí, hay que aclarar que no cualquier elección de las cantidades a y c es adecuada para que todos los números entre 0 y $m - 1$ aparezcan una vez en la tabla. Si $m = 2^b$, potencia de 2, las elecciones adecuadas son $a = \{1,5,9,13 \ldots\}$ y $c = \{1,3,5,7 \ldots\}$ mientras que si es m una potencia de 10, $m = 10^d$ resultan elegibles $a = \{1,21,41,61 \ldots\}$ y $c = \{1,3,7,9,11,13,17,19 \ldots\}$

Existen, en realidad, una variedad de métodos para generar números aleatorios por medio de una computadora y, para nuestros fines, necesitaremos números que se encuentren entre los valores reales 0 y 1. Por esta razón los mil números aleatorios entre 000 y 999, por ejemplo, tendrán que considerarse como la parte decimal de tres dígitos de los números comprendidos entre 0.000 y 0.999. Estos son los números que habitualmente obtenemos con la instrucción random de muchos lenguajes de programación o con teclas en calculadoras.

VIII.3 Observaciones aleatorias

Para exponer ideas recurrimos al siguiente ejemplo. Se arrojan dos monedas y se observa el resultado. Por supuesto no todos los pares que puedan obtenerse tienen igual probabilidad de ocurrir. Cara y cara, CC, tiene probabilidad ¼ al igual que ceca y ceca, YY, mientras que cara y ceca, que se obtiene tanto en YC como en CY, tiene probabilidad ½. ¿Cómo uno podría simular la obtención del resultado con arreglo a esta probabilidad? La Tabla 2 muestra las probabilidades y su distribución acumulada.

Tabla 2

Suceso X	P(X)	$\sum P(x)$	Intervalo
CC	$1/_4 = 0.250$	0.250	$0.000 \leq r \leq 0.249$
YC o CY	$1/_2 = 0.500$	0.750	$0.250 \leq r \leq 0.749$
YY	$1/_4 = 0.250$	1.000	$0.750 \leq r \leq 0.999$

Si se entienden 0.000 y 0.999 como suficientes aproximaciones para 0 y 1, la cuarta columna de la tabla explica entonces que números entre 0.000 y 0.999 representan a cada uno de los tres sucesos posibles. Es decir; simular la experiencia terminaría consistiendo en apretar el botón de la función random de una calculadora y observar a cuál de los tres intervalos pertenece el resultado *r* obtenido. Si por ejemplo obtuviéramos el número aleatorio $r = 0.876$, su *observación* aleatoria asociada sería YY, ceca y ceca. Este es el principio básico de la simulación y su aplicación consecuente puede llevarnos al modelado sencillo de sistemas complejos.

Obtener observaciones aleatorias, es decir sucesos simulados que respeten un patrón estadístico de ocurrencia determinado, es una tarea que puede emprenderse por distintas técnicas. La más directa consiste en invertir el sentido de los cálculos, yendo desde el valor del número aleatorio *r* hasta el valor de la observación *x*, por medio de la inversión de la función de distribución acumulada. Este método conocido como de la *transformación inversa* comprende, en la práctica real, tres etapas.

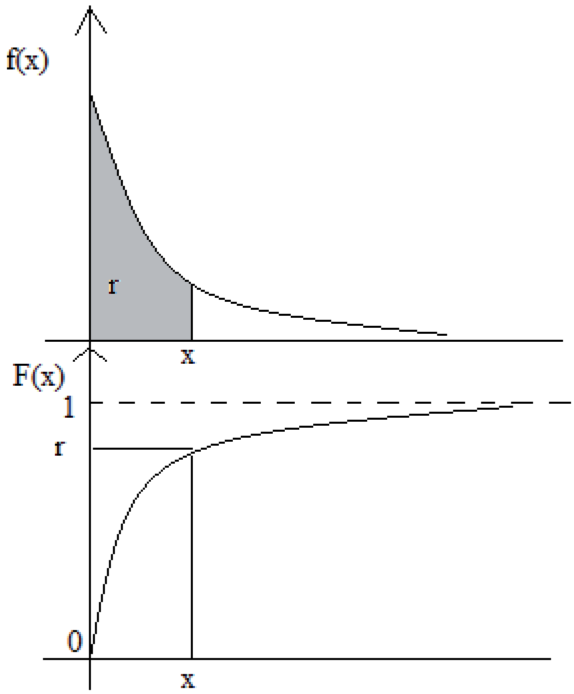
i) Hallar la función que caracteriza la actividad y comprobar que es una función de probabilidad. Usualmente esto requiere tomar muestras y realizar ajustes por medio de técnicas de cálculo numérico para encontrar la expresión del patrón estadístico. Por ejemplo, para conocer cómo se distribuyen los tiempos de atención de un cajero de supermercado habrá que tomar una muestra de tiempos reales de atención y ajustar, por medio de mínimos cuadrados, la función exponencial negativa que mejor los represente. Luego habrá que comprobar que se trata efectivamente de una función de densidad de probabilidad.

ii) Hallar la expresión de la distribución acumulada. Si la variable aleatoria fuera discreta la acumulación se produciría a través de la suma de probabilidades, pero si fuese continua, el cálculo debiera resolverse por integración. En el caso ejemplificado del cajero del supermercado habría que integrar utilizando la función de densidad de probabilidad obtenida en i).

iii) A cada suceso x, la función acumulada le hace corresponder un valor real entre 0 y 1. Es decir $F(x) = r$ con $0 \leq r \leq 1$. Este paso consiste entonces en hallar $F^{-1}(r) = x$. Es decir, invertir la distribución acumulada.

Supongamos entonces que una muestra nos permitió ajustar los tiempos de atención del cajero según la expresión $f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & si\ x \geq 0 \\ 0\ en\ otro\ caso \end{cases}$ siendo $\alpha = 30\ clientes/hora$ Deberíamos ahora realizar la secuencia de tres pasos indicada arriba. Comenzamos comprobando que se trata de una función de densidad de probabilidad. Claramente $f(x) = 30e^{-30x} = \frac{30}{e^{30x}} \geq 0$ que es la primera condición a cumplir para ser fdp. Además $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^{\infty} 30e^{-30x}dx = 30\int_0^{\infty} e^{-30x}dx = 30\frac{1}{-30}e^{-30x}|\begin{matrix}\infty \\ 0\end{matrix} = 0 - (-1) = 1$ con lo cual queda probado el punto i) pues se trata de una función de densidad de probabilidad. En seguida armamos entonces la distribución acumulada: $F(x) = \int_0^x 30e^{-30t}dt = 30\frac{1}{-30}e^{-30t}|\begin{matrix}x \\ 0\end{matrix} = -e^{-30x} - (-1) = 1 - e^{-30x}$. Como es sabido y se muestra en la Gráfica 1, $F(x) = r$ adopta valores entre 0 y 1 por lo cual está completado el paso ii)

Gráfica 1



El paso iii) requiere invertir la función de distribución hallando $F^{-1}(r) = x$. Hacemos:

$r = 1 - e^{-30x}$

$e^{-30x} = 1 - r$

$\ln e^{-30x} = \ln(1 - r)$

$x = \frac{\ln(1-r)}{-30} = F^{-1}(r)$

Al asumir valores aleatoriamente elegidos del número *r*, se generan observaciones aleatorias de tiempos de atención del cajero, que en términos estadísticos seguirán una distribución exponencial con media $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{30cilentes\ /hora} = 2\ minutos/cliente$

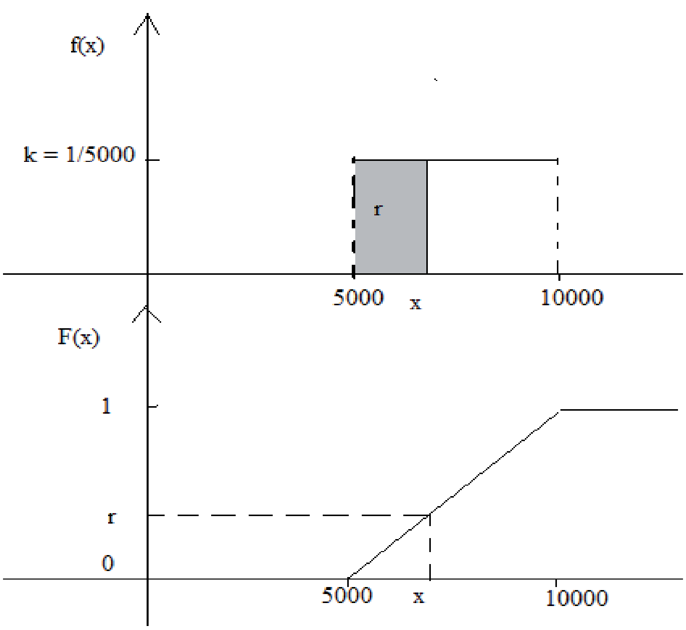
Si la variable considerada es discreta, el procedimiento para encontrar la inversa resulta similar, aunque requiere trabajar con sumatorias en vez de integrales. Pero, además, cuando no se puede expresar con una fórmula cerrada la integral de la función de densidad de probabilidad, como por ejemplo ocurre con la distribución normal, el método de la transformada inversa no puede aplicarse. En tal caso, para generar observaciones aleatorias que sigan una distribución normal de media μ y desvío estándar σ, puede usarse la fórmula de aproximación $x = \frac{\sigma}{\sqrt{n/12}} \sum_{i=1}^{n} r_i + \left(\mu - \frac{n}{2}\frac{\sigma}{\sqrt{n/12}}\right)$. Como se aprecia para una observación normal habrá que generar *n* números aleatorios lo que se corresponde con la idea de que la suma de variables aleatorias independientes tiende a una normal para un número suficientemente grande de variables. La fórmula produce buena aproximación incluso con unos pocos números aleatorios, por ejemplo, para $n = 6$ o $n = 12$.

VIII.4 Técnicas de Montecarlo

Las técnicas de Montecarlo, que deben su nombre al casino del estado homónimo, son métodos que se aplican para reducir la varianza en las muestras de modo que, a su vez, esto reduzca la cantidad de observaciones necesarias para estimar adecuadamente un parámetro.

Por ejemplo, si se conoce que cierta componente de un equipo electrónico tiene una duración que se distribuye uniformemente entre las 5000 horas y las 10000 horas de uso, se pueden simular duraciones de componentes para constituir una muestra con la que evaluar la duración promedio sin necesidad de apelar al cálculo analítico. Si se utiliza el método de la transformación inversa para obtener una expresión que genere la muestra, hay que hallar primero el valor de k que hace de densidad de probabilidad a la función $f(x) = \begin{cases} k & 5000 \leq x \leq 10000 \\ 0 & en\ otra\ parte \end{cases}$ En efecto, es fácil calcular k a partir del cumplimiento de la igualdad $1 = \int_{-\infty}^{\infty} k dx = k \int_{5000}^{10000} dx = kx|_{5000}^{10000} = k(10000 - 5000) = k\, 5000$ con lo cual resulta $k = \frac{1}{5000}$. Si ahora se halla la función de distribución acumulada para el intervalo $5000 \leq x \leq 10000$, $F(x) = \int_{5000}^{x} \frac{1}{5000} dt = \frac{1}{5000} t|_{5000}^{x} = \frac{1}{5000} x - 1$. Los pasos i) y ii) del procedimiento antes descripto para hallar la transformada inversa se han completado y se los representa en la Gráfica 2

Gráfica 2



Ahora resta calcular la transformación inversa despejando x desde $r = \frac{1}{5000} x - 1$. Resulta $x = 5000(r + 1)$

Con la fórmula hallada podemos aplicar la llamada técnica de Montecarlo aproximada para calcular la media de duración de las componentes. A efecto de elegir una muestra aleatoria de diez duraciones, se toman diez números aleatorios r de tres dígitos decimales y se calculan las observaciones aleatorias correspondientes según se ve en la Tabla 2

Tabla 2

i	r_i	$x_i = 5000(r+1)$
1	0.506	7530
2	0.649	8245
3	0.941	9705
4	0.664	8320
5	0.277	6385
6	0.375	6875
7	0.637	8185
8	0.673	8365
9	0.497	7485
10	0.434	7170
		$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{10} = 7826.5$

El ejemplo fue elegido para comparar el resultado experimental obtenido por medio de la simulación con el parámetro poblacional que en este caso puede calcularse haciendo $\mu = E(x) = \int_{5000}^{10000} x \frac{1}{5000} dx = \frac{1}{5000} \frac{x^2}{2} \Big| \begin{matrix} 10000 \\ 5000 \end{matrix} = 7500$ Como se aprecia hay una importante diferencia entre el valor real de la media y su estimación. Claramente, la ley de los grandes números nos autorizaría a continuar realizando observaciones hasta que la variabilidad de la estimación a obtener baje drásticamente y se obtenga un promedio mucho más cercano a la media poblacional real. Hay que observar que al optar por reducir la variancia de este modo se acepta incrementar grandemente el número de observaciones. Si el tamaño de las muestras es $n = 10$ el estimador $\bar{x}$ tendrá como varianza la razón $\frac{\sigma^2}{10}$ ya que, según la teoría estadística, se distribuye normalmente con media y desvío estándar de acuerdo a $\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{10}})$ Entonces para reducir en un dígito la varianza del estimador deberán agregarse 90 observaciones a las 10 ya tomadas. Si se hace esto, se dice que se aplica el método de Montecarlo aproximado o "crudo", y puede continuarse reduciendo la variabilidad incrementando en potencias de 10 el tamaño muestral.

Sin embargo, existen algunos procedimientos que permiten reducir la variabilidad de la estimación sin necesidad de incrementar la muestra. Veremos a continuación, y a título de ejemplo, uno de ellos. Se trata del llamado método de Montecarlo de números complementarios y, básicamente, consiste en armar una muestra paralela invirtiendo la suerte. Es decir, a cada número aleatorio elegido se le calcula su complemento a 1 por medio de $\acute{r} = 1 - r$ para obtener nuevas observaciones aleatorias $\acute{x}$ que compensan la suerte. En el caso del ejemplo se procede según se muestra en la Tabla 3.

Tabla 3

i	r_i	$x_i = 5000(r+1)$	$\acute{r} = 1 - r$	$\acute{x} = 5000(\acute{r} + 1)$
1	0.506	7530	0.494	7470
2	0.649	8245	0.351	6755
3	0.941	9705	0.059	5295
4	0.664	8320	0.336	6680
5	0.277	6385	0.723	8615
6	0.375	6875	0.625	8125
7	0.637	8185	0.363	6815
8	0.673	8365	0.327	6635
9	0.497	7485	0.503	7515
10	0.434	7170	0.566	7830
		$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{10} = 7826.5$		$\bar{\acute{x}} = \frac{\sum \acute{x}_i}{10} = 7173.5$

Como era de esperar, por tratarse de una distribución uniforme, la compensación de cada observación por una complementaria debía hacer que la estimación, obtenida como el promedio de ambos promedios, fuera exacta: $\frac{\bar{x}+\bar{\acute{x}}}{2} = 7500$. Si bien no puede esperarse tal precisión para observaciones realizadas con distribuciones asimétricas, el ejemplo ilustra la efectividad del método de Montecarlo de números complementarios.

VIII.5 Modelos de simulación

Como se ha visto con anterioridad un sistema está conformado por entidades cuyos atributos pueden adquirir valores numéricos, y actividades que vinculan estas entidades y los modifican. El modelado de simulación procurará establecer la ley de probabilidad y los parámetros que caracterizan la actividad conjunta y total del sistema, basado en los patrones conocidos de cada actividad y en la forma en que cada una de ellas se vincule con las otras. Esta dinámica muchas veces puede querer estudiarse a través del tiempo, considerando los cambios probables de estado a estado. Respecto de esta simulación temporal, el valor de los parámetros de interés puede actualizarse a intervalos de tiempo fijos o en cada momento en que ocurre el siguiente evento. En ambos casos el modelo incluye también la simulación del paso del tiempo.

Para fijar ideas supongamos que en un proceso de fabricación de automóviles las carrocerías llegan a un robot de pintado siguiendo un patrón poisson- exponencial con una media $\lambda = 6\, carrocerías/hora$. El pintado se realiza en tiempos que se distribuyen en forma uniforme entre 4 y 8 minutos. Se desea calcular la cantidad esperada de carrocerías en este sistema.

Se trata de un sistema de colas, pero aquí, a diferencia del modelo MM1 que hemos estudiado antes, si bien las llegadas son del tipo poisson, los servicios se realizan en tiempos de probabilidad uniforme. Por supuesto cabría la posibilidad de deducir una fórmula para la probabilidad de estado del sistema, para su funcionamiento temporal y en definitiva para sus parámetros, uno de los cuales es la cantidad esperada de carrocerías en el sistema *L*. Sin embargo, estimar el valor del parámetro *L* por medio de una simulación puede resultar más rápido y práctico. Al considerar la relación entre las medias de poisson y de la exponencial ya estudiada, se tiene que $\frac{1}{\alpha} = E(t) = \frac{1}{E(k)} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{6}\ horas/carrocería = 10\ min/carrocería$ y $\alpha = \lambda$. Por lo tanto los tiempos simulados entre llegadas de carrocerías pueden obtenerse mediante la transformación inversa de la exponencial $t_{ei} = \frac{\ln(1-r)}{-\frac{1}{10}} = -10\ln(1-r)$. De similar forma los tiempos simulados de pintado se obtienen mediante la inversión del patrón uniforme $t_{si} = 4(\acute{r}+1)$. Si se considera la actualización del valor de los parámetros del sistema cada vez que se produce un evento, la llegada de una carrocería al servicio o la culminación de un pintado, la simulación se realiza según el *criterio del evento siguiente* y el modelo queda definido por la Tabla 3 siguiente.

Tabla 3

Reloj	*r*	Tiempo hasta la siguiente entrada $t_{ei} = -10\ln(1-r)$	*r'*	Tiempo de siguiente salida $t_{si} = 4(\acute{r}+1)$.	Cantidad de carrocerías en el sistema
0.000	0.073	<u>0.7580</u> (0.7580)	------	------------------------	0
0.7580	0.323	<u>5.4260</u> (4.6680)	0.677	7.4460 (6.7080)	1
5.4260	0.115	<u>6.6477</u> (1.2217)	------	7.4460	2
6.6477	0.722	19.4490 (12.8013)	------	<u>7.4460</u>	3
7.4460	------	19.4490	0.215	<u>12.3060</u> (4.8600)	2
12.3060	------	19.4490	0.022	<u>16.3940</u> (4.0880)	1
16.3940	------	<u>19.4490</u>	------	---------------------	0
19.4490	.617	30.7500 (11.3010)	0.500	<u>25.4490</u> (6.0000)	1
25.4490	------	30.7500	------	---------------------	0
30.7500					

La primera columna de la Tabla 3 simula el paso del tiempo, que se actualiza cada vez que llega o sale una carrocería del sistema. Las cantidades temporales señaladas en negro son *puntos de regeneración* del sistema pues en ellos el estado actual no depende de ninguno anterior, no hay pendientes llegadas ni completamientos de servicio y hay que generar un número aleatorio por cada actividad futura. El tiempo que media entre dos puntos de regeneración consecutivos se denomina *ciclo*. En principio, para estimar la cantidad esperada de carrocerías en el sistema pueden contabilizarse los tiempos en que hubo 0, 1, 2 y 3 carrocerías y efectuar un promedio pesado.

Hubo 0 clientes en el sistema en los intervalos temporales [0.0000, 0.7580], [16.3940, 19.4490] y [25.4490, 30.7500]. Con esto durante $0.7580 + 3.0550 + 5.3010 = 9.1140$ minutos no hubo clientes. Un cliente hubo en los lapsos [0.7580, 5.4260], [12.3060, 16.3940] y [19.4490, 25.4490]. Es decir; durante 14.7560 minutos hubo 1 cliente. De forma similar calculamos que hubo 2 clientes durante 6.0870 minutos y 3 clientes durante 0.7983 minutos. Entonces la estimación del número esperado de carrocerías en el sistema en base a lo simulación del sistema realizada es:

$$\hat{L} = \frac{0\times 9.1140 + 1\times 14.7560 + 2\times 6.0870 + 3\times 0.7983}{30.7500} = 0.95 \text{ carrocerías}$$

Este valor indica que seguramente el sistema permanece una parte del tiempo ocioso. Para estimar la probabilidad de que el sistema esté vacío podemos hacer $\widehat{p_0} = \frac{tiempo\ con\ 0\ clientes}{tiempo\ total} = \frac{9.1140}{30.7500} \approx 0.30$

Con todo, la cantidad de observaciones incluidas en la muestra representan un ejemplo de escritorio del procedimiento. En realidad, si se aplica la técnica de Montecarlo aproximada habrá que generar observaciones hasta que la estimación de interés se estabilice alrededor de un cierto valor. Tal cosa se logra cuando para la i-ésima observación aleatoria incorporada, se calcula la respectiva estimación $\hat{L}_i$ y se la compara con la anterior $\hat{L}_{i-1}$, por el criterio de variación absoluta $\left|\hat{L}_i - \hat{L}_{i-1}\right| < \varepsilon$, o por el más exigente criterio de variación relativa $\left|\frac{\hat{L}_i - \hat{L}_{i-1}}{\hat{L}_i}\right| < \varepsilon$, haciendo $\varepsilon > 0$ y tan pequeño como se considere necesario. Por supuesto, esto puede requerir, en sistmas complejos, realizar un gran número de observaciones para estimar sus parámetros, pero a favor del crecimiento en la rapidez de cálculo y en la capacidad de almacenamiento computacional, cada vez se torna más precisa la aplicación de esta técnica de simulación. Alternativamente cada ciclo entre puntos de regeneración puede tomarse como una muestra distinta y considerar así varias veces, no solo el estado del sistema cuando está en un régimen estable de funcionamiento, sino también aquella parte transitoria transcurrida hasta alcanzar la estabilidad. Pueden promediarse entonces las estimaciones realizadas por ciclo para obtener una nueva, más robusta en términos estadísticos.

Ejercicios resueltos

Ejercicio N° 1- Utilizar el método congruencial para generar las siguientes sucesiones de números aleatorios:

a) Una sucesión de 10 números aleatorios de un dígito tales que : $X_{n+1} \equiv (X_n + 3)(\text{mod}10)$ y $X_0 = 2$

b) Una sucesión de 8 números aleatorios entre 0 y 7 tales que: $X_{n+1} \equiv (5X_n + 1)\text{mod}8$ y $X_0 = 1$.

c) Una sucesión de cinco números aleatorios de dos dígitos tales que: $X_{n+1} = (61X_n + 27)\ \text{mod}100$ y $X_0 = 10$

a)

n	X_n	$X_n + 3$	$(X_n + 3)/10$	X_{n+1}
1	2	5	0 + 5/10	5
2	5	8	0 + 8/10	8
3	8	11	11/10 = 1+1/10	1
4	1	4	4/10 + 0	4
5	4	7	0 + 7/10	7
6	7	10	1 + 0/10	0
7	0	3	0 + 3/10	3
8	3	6	0 + 6/10	6
9	6	9	0 + 9/10	9
10	9	12	1 + 2/10	2

b)

n	X_n	$5X_n + 1$	$(5X_n + 1)/8$	X_{n+1}
1	1	6	0 + 6/10	6
2	6	31	31/8 =3 + 7/8	7
3	7	36	36/8 = 4 + 4/8	4
4	4	21	21/8 = 2 + 5/8	5
5	5	26	26/8 = 3 + 2/8	2
6	2	11	11/8 = 1 + 3/8	3
7	3	16	16/8 = 2 + 0/8	0
8	0	1	0 + 1/8	1

c)

n	X_n	$61X_n + 27$	$(61X_n + 27)/100$	X_{n+1}
1	10	637	637/100 = 6 + 37/100	37
2	37	2284	2284/100 = 22 + 84/100	84
3	84	5151	5151/100 = 51 + 51/100	51
4	51	3138	3138/100 = 31 + 38/100	38
5	38	2345	2345/100 = 23 + 45/100	45

Ejercicio N° 2- Un juego de dados requiere que el jugador lance dos dados una o más veces hasta que se llegue a una decisión de si pierde o gana. Gana si la primera tirada suma 7 u 11, o si la primera suma es 4, 5, 6, 8, 9, 10 y sale la misma suma antes de que aparezca una suma de 7. Por el contrario, pierde si el resultado de la primera tirada suma 2, 3 o 12, o si la primera suma es 4, 5, 6, 8, 9, 10 y aparece una suma de 7 antes de que la primera tirada vuelva a salir. Simule cinco jugadas de este juego para iniciar el proceso de estimar la probabilidad de ganar.

Dado => 6 caras => 1/6 $\therefore$ $0 \le r < 0{,}167 \rightarrow$ Cara 1
$0{,}167 \le r < 0{,}333 \rightarrow$ Cara 2
$0{,}333 \le r < 0{,}5 \rightarrow$ Cara 3
$0{,}5 \le r < 0{,}667 \rightarrow$ Cara 4
$0{,}667 \le r < 0{,}833 \rightarrow$ Cara 5
$0{,}833 \le r < \le 1 \rightarrow$ Cara 6

n	r_1	r_2	v_1	v_2	Suma	Acción	Resultado/ Partida N°	$\hat{p}$
1	0,598	0,147	4	1	5	Sigue	---	0/1
2	0,583	0,359	4	3	7	Pierde	Perdió/1	
3	0,904	0,087	6	1	7	Gana	Ganó/2	1/2
4	0,902	0,223	6	2	8	Sigue	---	2/3
5	0,193	0,621	2	4	6	Sigue	---	
6	0,947	0,626	6	4	10	Sigue	---	
7	0,676	0,066	5	1	6	Sigue	---	
8	0,752	0,839	5	6	11	Sigue	---	
9	0,342	0,796	3	5	8	Gana	Ganó/3	
10	0,556	0,164	4	1	5	Sigue	---	3/4
11	0,713	0,718	5	5	10	Sigue	---	
12	0,561	0,041	4	1	5	Gana	Ganó/4	
13	0,365	0,802	3	5	8	Sigue	---	3/5
14	0,583	0,160	4	1	5	Sigue	---	
15	0,954	0,434	6	3	9	Sigue	---	
16	0,846	0,159	6	1	7	Pierde	Perdió/5	

El procedimiento debe continuar hasta que la estimación $\hat{p}$ se estabilice en dos dígitos decimales exactos.

Ejercicios propuestos

Ejercicio N° 3- Utilice los números aleatorios de un dígito 5, 2, 4, 9, 7 para generar observaciones aleatorias en cada una de las siguientes situaciones:

a) La tirada de una moneda legal
b) La tirada de un dado

c) El color de un semáforo que permanece el 40% del tiempo en verde , el 10% en amarillo y el resto en rojo.

Ejercicio N° 4-

a) Generar 5 observaciones aleatorias a partir de una distribución uniforme entre - 10 y 40.
b) Obtener tres observaciones aleatorias a partir de un a distribución triangular cuya función de densidad de probabilidad es:
   $f(x) = 2x$ si $0 \leq x \leq 1$ y 0 en otra parte.
c) Generar tres observaciones aleatorias a partir de la función de densidad de probabilidad siguiente:
   $f(x) = \frac{1}{4}(x+1)^3$ si $-1 \leq x \leq 1$ y 0 en otro caso.

Ejercicio N° 5- Generar tres observaciones aleatorias a partir de cada una de las siguientes distribuciones de probabilidad:

a) La variable aleatoria x tiene $P(x=0) = ½$ y si $x \neq 0$ se distribuye uniformemente entre -5 y 15.
b) La función de densidad de probabilidad es x-1 si $1 \leq x \leq 2$ y es 3-x si $2 \leq x \leq 3$ con 0 en otra parte.
c) La distribución geométrica con parámetro p = 1/3 de forma que
   $P(x = k) = 1/3(2/3)^{k-1}$ si k= 1, 2, … y 0 en otro caso.

Ejercicio N° 6- Generar tres observaciones aleatorias a partir de :

a) una distribución normal de media 10 y desvío estándar 5 (utilizar n=3 para cada observación)
b) una distribución exponencial con media 4.

Ejercicio N° 7- El clima se puede considerar un sistema estocástico, por que evoluciona de una manera probabilística de un día a otro. Su pongamos que para cierto lugar este comportamiento probabilístico satisface la siguiente descripción:

a) La probabilidad de lluvia para mañana es de 0.6 si hoy llueve.
b) La probabilidad de un día despejado (sin lluvia) para mañana es de 0.8 si hoy está despejado.

Simular el comportamiento del clima durante 10 días, comenzando con un día que sigue a uno despejado.

Ejercicio N° 8- Considerar el modelo de colas M/M/1. Suponer que el promedio de arribos es de 3 cl/h y el de servicios es de 5 cl/h. Diseñar un procedimiento de simulación para estimar el tiempo promedio en cola de un cliente.

Ejercicio N° 9- Considerar la distribución de probabilidad cuya función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & si \quad 1 \leq x \leq \infty \\ 0 & deotra \quad manera \end{cases}$$

a) Utilice el método de Monte Carlo crudo para evaluar su media.

b) Utilice el método de Monte Carlo de números complementarios con igual fin.
c) Compare los resultados obtenidos con los de la media teórica.

Ejercicio N° 10- Un producto fabricado por una compañía requiere que se perforen cilindros en un bloque metálico y que se inserten pistones en ellos. Es necesario que los pistones tengan un radio de 1.0000 cm por lo menos y, hasta donde sea posible, muy poco más grande. La distribución de probabilidad de cuánto medirá el radio del pistón tiene una función de densidad

$$f_1(x) = \begin{cases} 400e^{-400(x-1.0000)} & si \quad x \geq 1.0000 \\ 0 & de \quad otra \quad manera \end{cases}$$

De igual manera, la distribución de probabilidad de la medida de los cilindros tiene la función de densidad

$$f_2(x) = \begin{cases} 100\, si & 1.0000 \leq x \leq 1.0100 \\ 0 & de \quad otra \quad manera \end{cases}$$

Realizar un experimento simulado para estimar la probabilidad de interferencia por ser mayor el diámetro del pistón al del cilindro.

Ejercicio N° 11- Una compañía tiene un problema de mantenimiento con una compleja pieza de equipo. Este equipo contiene 4 tubos de vacío que son la causa del problema. Los tubos fallan con bastante frecuencia, forzando a que se apague el equipo mientras se reemplazan. La práctica actual es reemplazar los tubos solo cuando fallan, pero hay un propuesta para reemplazar los cuatro siempre que falle uno de ellos, para reducir la frecuencia con la que debe apagarse el equipo. El objetivo es comparar estas dos alternativas en cuanto a su costo. Los datos son los siguientes. Para cada tubo, el tiempo de operación hasta que falla tiene una distribución uniforme de 1.000 a 2.000 horas. El equipo debe apagarse durante una hora para cambiar un tubo y durante dos horas para cambiar los cuatro. El costo total asociado con la maquina apagada y reemplazo de los tubos es \$100/hora más \$20 por cada tubo nuevo.
Comenzando con los 4 tubos nuevos, simule la operación de las dos políticas durante 5000 horas de tiempo simulado.

Ejercicio N° 12- Simular la actividad de un sistema de colas con entradas y salidas tipo Poisson-Exponencial λ= 2 (entradas) μ=4(salidas). Diseñar el procedimiento para calcular el tiempo promedio de permanencia en el sistema de un cliente.

Ejercicio N° 13- Se tienen cuatro bolillas numeradas 1, 2, 3 y 4 dentro de un bolillero. Se pretende utilizarlas para simular:

a) La aparición del palo oro, espada, basto o copa al sacar una carta de un mazo de truco
b) La aparición de cara o ceca al tirar una moneda

Dar la regla de la simulación en ambos casos.

Ejercicio N° 14- Una embotelladora de gaseosas de un litro realiza la operación de colocar la tapa de metal en tiempos que se distribuyen uniformemente entre 5 y 10 segundos. Las botellas llegan al recipiente de acceso a la tapadora transportadas por una cinta y siguiendo un proceso de Poisson a razón media de 400 por hora. Construir una tabla de simulación para estimar el tiempo promedio que una botella tarda desde que entra al recipiente hasta que sale tapada de la tapadora.

Ejercicio N° 15- La empresa LIMPIAX acaba de ganar la licitación para recoger la basura en cierto distrito del conurbano bonaerense y se dispone ahora a invertir en la compra de camiones para la recolección. El pliego de la licitación establece que deberá recogerse por lo menos el 95% de la basura generada diariamente para quedar libre de quitas y multas por incumplimiento de servicio. Por esta razón la empresa quiere asegurarse de que su flota de camiones alcance para cumplir esta norma en el 90 % o más de los días. Para determinar que cantidad de camiones adquirir de acuerdo a esto, posee dos informaciones relevantes: a) cada camión posee una cantidad máxima de carga de 15 toneladas y puede hacer solo un viaje durante el horario de recolección y b) las estadísticas de la cantidad de toneladas diarias de basura recolectada en los meses pasados son:

Toneladas de basura recolectada/día	Probabilidad
10	0.10
20	0.22
30	0.25
40	0.20
50	0.12
60	0.07
70	0.04

Desarrollar un esquema de simulación que permita evaluar, de acuerdo a esta información, la cantidad de camiones necesarios para alcanzar los estándares de calidad de servicio fijados.

Ejercicio N° 16- En área céntrica los clientes llegan al cajero automático instalado según tiempos distribuidos exponencialmente a razón media de 15 cl/hora. Los tiempos de uso del cajero por parte de cada cliente se distribuyen en forma uniforme entre 3 y 5 minutos. Desarrollar un modelo de simulación para evaluar la probabilidad de que el cajero esté vacío.

Anexo sobre Software

1. Introducción

Como se ha comentado, el modelado matemático de sistemas utiliza técnicas estadísticas, experimentales, de simulación, de optimización, aplicadas a fin de encontrar soluciones complejas de problemas del mundo tecnológico. Todos los métodos que se aplican tienen en común la complejidad y extensión de los cálculos involucrados. Con los avances en las tecnologías computacionales ya no resulta indispensable conocer cómo se resuelven ágilmente los cálculos para cualquier tipo de problema, sino que el aspecto clave resulta expresar correctamente los problemas y saber interpretar los resultados que se presenten. El cálculo si bien debe conocerse en líneas generales puede ser resuelto por una variedad de software que está disponibles en el mercado. Este tipo de software puede agruparse en cuatro clases distintas:

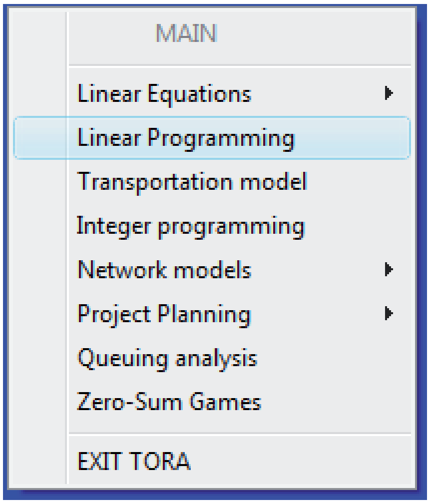
- **Software de resolución de problemas de investigación operativa**: tales como programación lineal, stocks o cualquier otro problema que requiera este cálculo complejo. Algunos pueden ser más integrales (varios módulos para varios tipos de resoluciones o solamente alguno de ellos). Hoy incluso pueden encontrarse Apps para celulares que sean útiles.
- **Aplicativos online**: páginas web diseñadas para la resolución de problemas de investigación operativa (principalmente programación lineal).
- **Planillas de cálculo**: no están diseñadas específicamente para la resolución de problemas de este tipo, pero pueden adaptarse a las necesidades del modelado.
- **Lenguajes de programación o similares**: Siempre se puede escribir código con la lógica necesaria para resolver cualquiera de estos problemas.

De todos estos, vamos a enfocarnos en los primeros tres ya que, si bien se puede programar desde casi cualquier lenguaje un programa que se ajuste a las necesidades, esto está afuera del alcance de este libro y solo se hará mención de algún lenguaje más adelante. Se presentan a continuación algunos paquetes informáticos de utilidad para la resolución de problemas:

Tora

Es el software para un curso de Investigación Operativa por excelencia, contiene posibilidades de resolución para la mayoría de los temas de una manera más o menos sencilla. Permite resolver problemas de:

- Programación lineal (incluye un modelo para transportes)
- Programación entera
- Modelos de colas
- Redes (Árbol de expansión minimal, ruta más corta, flujo máximo)
- Planeamiento de proyectos (CPM – PERT)
- Juegos

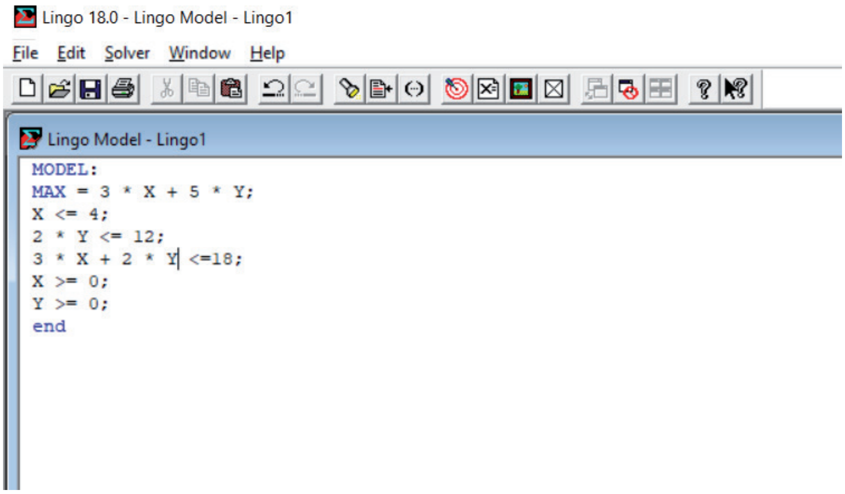


Presenta importantes ventajas como mostrar soluciones gráficas, cuando son dos las variables, desarrollar iteración a iteración la solución hasta llegar a un óptimo, poder elegir entre varios métodos para llegar a un resultado o la posibilidad de guardar los planteos y/o resultados. Por otro lado, es importante tener en cuenta que este software fue diseñado hace más de 20 años y tiene las limitaciones propias de un programa hecho por los 90, tales como

- Dificultad para funcionar con varias variables.
- No aceptar decimales
- Problemas de visualización en computadoras modernas.

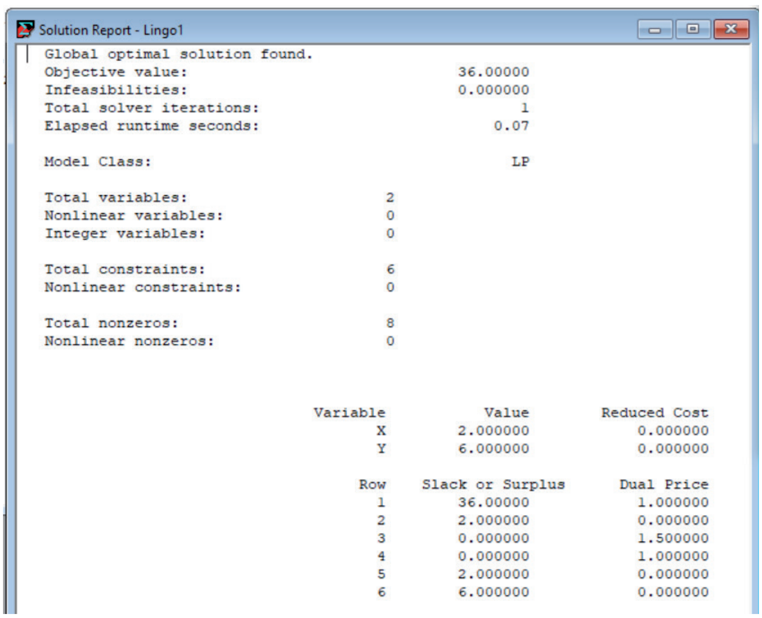
De todas formas, es recomendable para resolver ejercicios en los que intervienen 2, 3 o 4 variables enteras con restricciones también enteras.

Lingo
Es un software diseñado por la empresa Lindo para desarrollar problemas de programación lineal. Si bien pareciera un lenguaje de programación, resulta bastante más amigable de lo esperado y su utilización sólo requiere escribir la ecuación que se pretende optimizar



Solo hay que escribir un código de apertura ("model"), un ";" cuando se concluye de escribir una línea de ecuación y un cierre ("end").

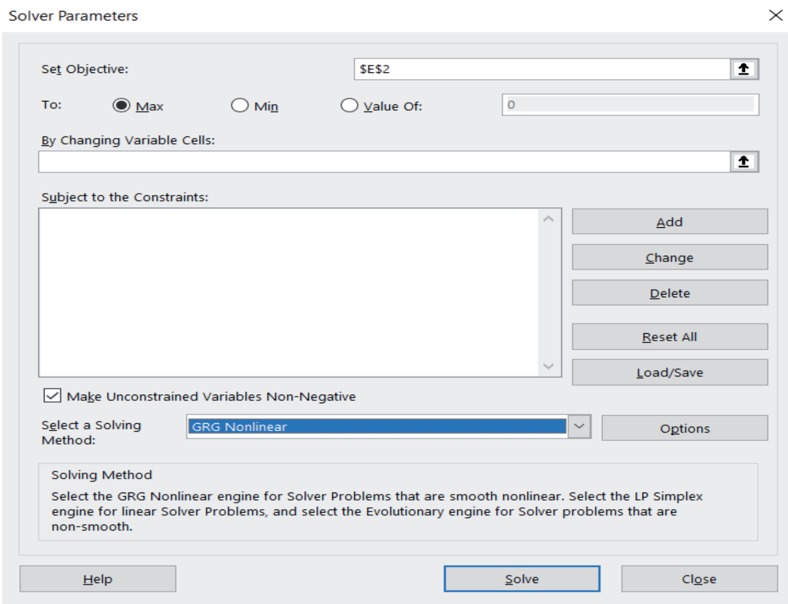
Si ingresamos todo correctamente, nos arroja todo el resultado de la siguiente manera:



Como se ve, indica la cantidad de variables, restricciones, el valor resultante de cada una las mismas y el modelo empleado.

Solver

Si bien técnicamente no es un software, es uno de los más conocidos módulos para resolver problemas de programación lineal y transporte, el mismo es un complemento de Excel que se activa en las opciones del programa. Su utilización puede no ser muy amigable, ya que se deben ingresar los valores en las celdas de cierta manera que se permita al programa entender la lógica que se desea utilizar. Luego de ingresar los datos de manera correcta, al usar el complemento aparece una ventana como la siguiente:



Aquí hay que ingresar los datos como la funcional objetivo, que tipo de operación deseamos hacer, maximizar o minimizar, donde estarán las variables a modificar o las restricciones que se tendrán en cuenta, así como el método utilizado para resolver. Al hacer todo correcto, nos dará como resultado los valores resultantes óptimos.

PHPSIMPLEX

Se trata de un aplicativo online exclusivamente diseñado para resolver problemas de programación lineal. Es de un uso simple y no se requiere mayor instrucción para poder resolver problemas de este tipo. Es de un diseño bastante sencillo pero muy útil a la hora de resolver problemas para n cantidad de variables. Tiene la ventaja de graficar los resultados, en caso de que se trate de un problema con 2 variables, sumado a la posibilidad de utilizar decimales. Otra posibilidad interesante que presenta es el hecho de resolver los problemas a través del método simplex yendo paso por paso, identificando columna y fila pivote en cada caso. Por otro lado, su desventaja está en que, al ser una aplicación web, se requiere de una conexión a internet estable para poder utilizarlo. El uso es como se ve a continuación. Hay que entrar en http://www.phpsimplex.com/ y al hacerlo nos dirigirá a la siguiente página:

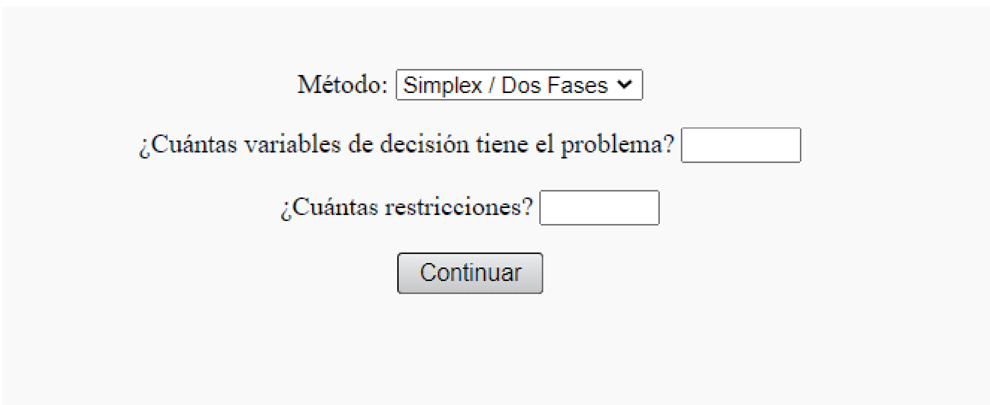
PHPSimplex

PHPSimplex es una herramienta online para resolver problemas de programación lineal. Su uso es libre y gratuito. Para acceder a ella basta con pulsar sobre el icono que aparece a la izquierda, o sobre «PHPSimplex» en el menú superior.

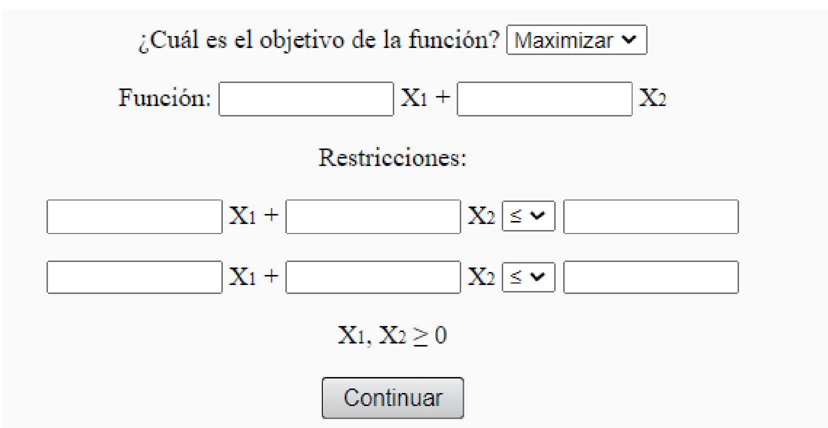
PHPSimplex es capaz de resolver problemas mediante el método Simplex, el método de las Dos Fases, y el método Gráfico, y no cuenta con limitaciones en el número de variables de decisión ni en las restricciones de los problemas.

desarrolló el M
Aprender más

Al hacer click en el primer vínculo lleva a la posibilidad de plantear el problema:

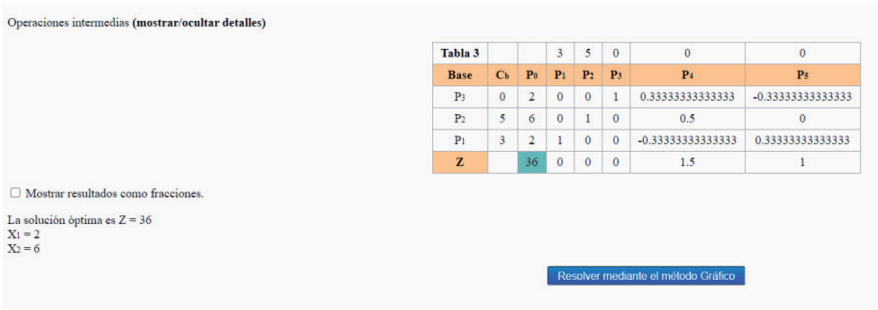


Al ingresar la cantidad de variables y restricciones, permite cargar el problema propiamente dicho:



Luego de ingresados todos los valores, se puede elegir una solución directa o “paso a paso” que no es más que mostrar las sucesivas iteraciones del simplex.

En cualquier caso, al finalizar dará la solución al problema:



Operaciones intermedias **(mostrar/ocultar detalles)**

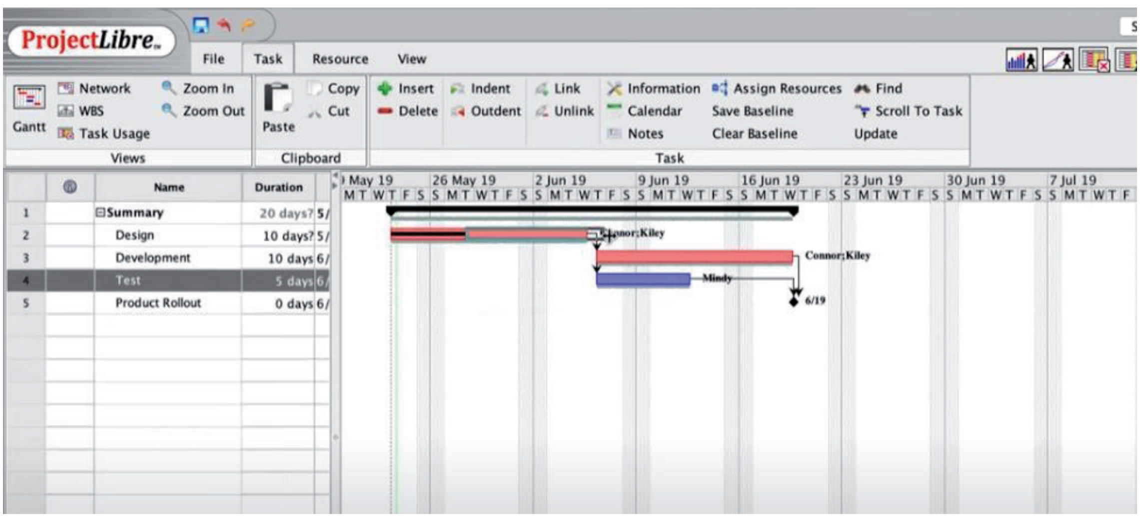
Tabla 3			3	5	0	0	0
Base	C_b	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_3	0	2	0	0	1	0.33333333333333	-0.33333333333333
P_2	5	6	0	1	0	0.5	0
P_1	3	2	1	0	0	-0.33333333333333	0.33333333333333
Z		36	0	0	0	1.5	1

☐ Mostrar resultados como fracciones.

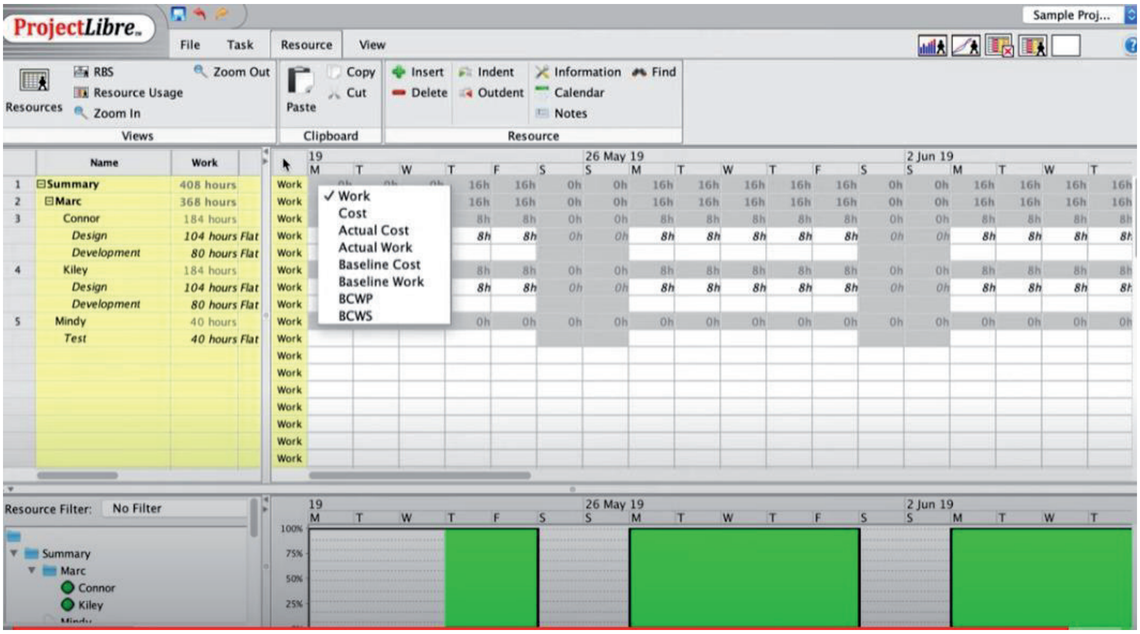
La solución óptima es Z = 36
$X_1 = 2$
$X_2 = 6$

Resolver mediante el método Gráfico

ProjectLibre
Este software se utiliza para administración de tiempos de proyectos y sirve tanto para CPM como para PERT. Es de código abierto y tiene un funcionamiento simple: luego de que se inicia un nuevo proyecto, se crean tareas, se incluyen datos como duración, precedencias o algún otro detalle que se necesite incluir:

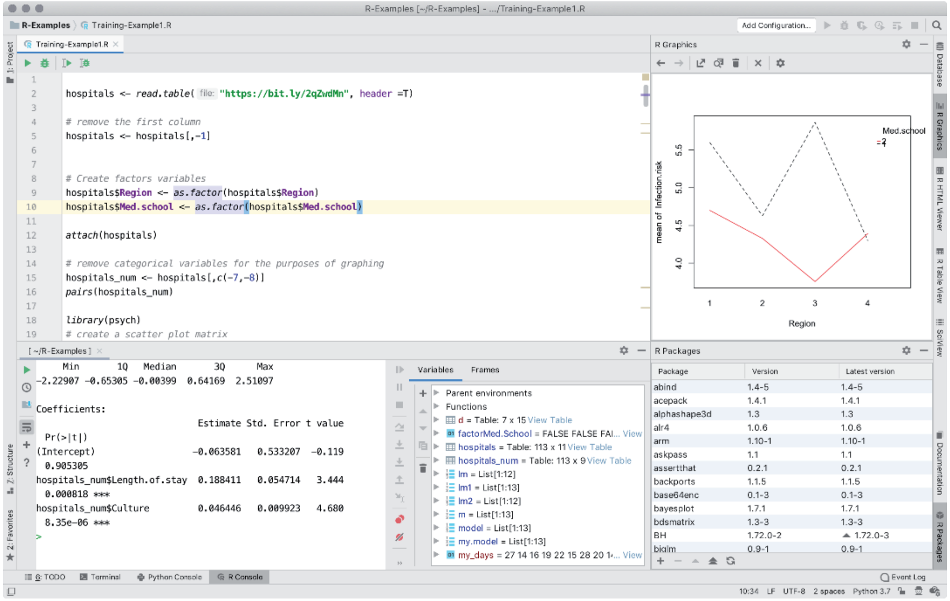


Tiene como ventaja que una vez incluida todas las actividades con sus respectivas precedencias, el mismo software se encarga de indicar el camino crítico y dibujar el diagrama del proyecto a medida que se lo va haciendo. Otro detalle interesante a tener en cuenta es que incluye como opción el cálculo de los recursos necesarios para realizar cada actividad:

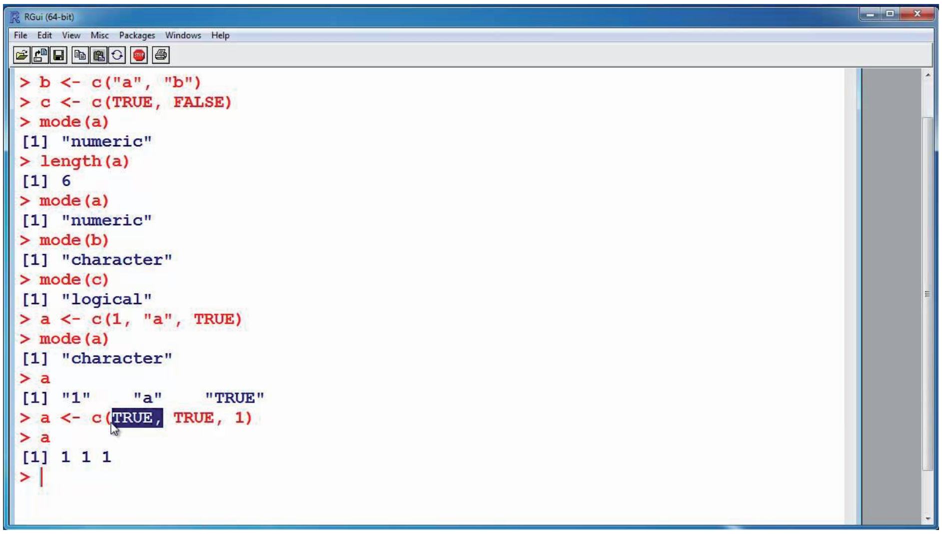


R

R no es en sí mismo un software diseñado para optimizar problemas propios de la investigación de operaciones, sino que es un lenguaje de programación de índole estadística. Funciona como cualquier lenguaje, solo que al ser especialmente estadístico-matemático permite diseñar un programa que efectivice casi cualquier modelo que se plantee acerca de un sistema.

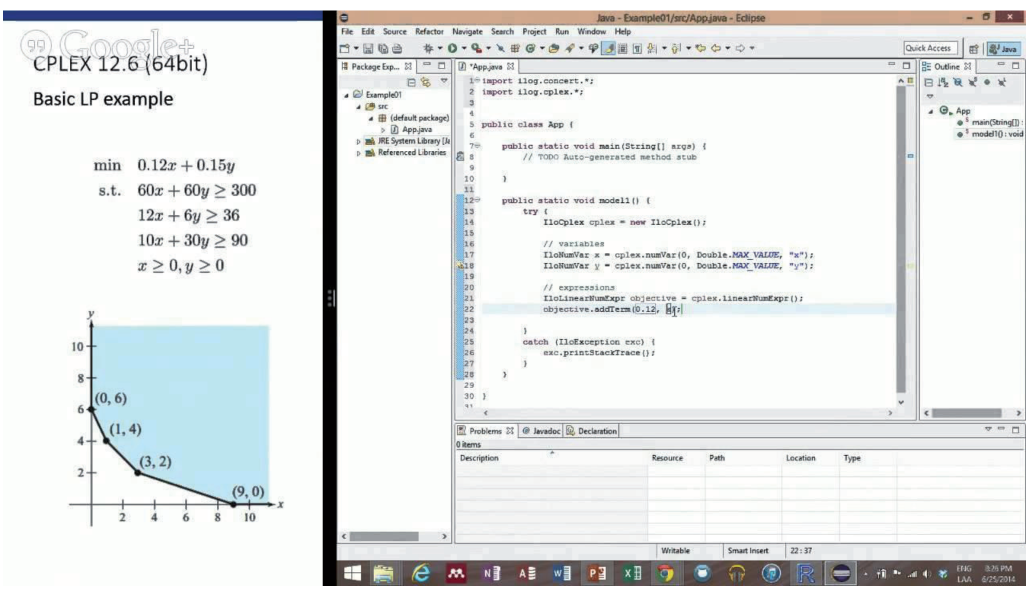


La ventaja que tiene es justamente la de ser un lenguaje pues da amplitud sobre los temas a abordar y los planteos a resolver. La desventaja es el nivel de preparación que exige, pues codificar un programa en este lenguaje no resulta intuitivo.



IBM CPLEX OPTIMIZATION STUDIO

Este software no es exactamente de código abierto, pero fue incluido ya que tiene una versión estudiantil que resulta gratuita, por lo que puede bajarse sin tener que desembolsar dinero por él. Es un caso particular, ya que técnicamente funciona más como un IDE, pero a través de varios lenguajes se pueden plantear modelos de optimización en cualquiera de los temas tratados. Como ventaja, proporciona la capacidad de diseñar cualquier tipo de problema que requiera optimización. Como desventaja, al igual que R, se requiere conocer algún lenguaje de programación para poder utilizarlo (C, C++, JAVA, etc), por lo que puede no resultar nada amigable al desarrollar un problema puntual.



Bibliografía

[1] Azarang, M. R. y García Dunna, E. *Simulación y análisis de modelos estocásticos.* Editorial McGraw-Hill (1996)

[2] Bazaraa, M. S. y Jarvis, J. J. *Linear programming and network flows.* Editorial Wiley (2009)

[3] Davis, M. *Introducción a la teoría de juegos.* Editorial Alianza (1998)

[4] Davis K. R. y McKeown *Modelos cuantitativos para administración.* Editorial Iberoamérica (2013)

[5] Dresdner, M. O; Evelson, A. R. y Dresdner, E. C. *Técnicas cuantitativas aplicadas a las decisiones.* Editorial El Coloquio. (1973)

[6] Eppen, G. D. y Gould, F. J. *Investigación de operaciones en la ciencia administrativa.* Editorial Pearson (2000)

[7] Gass, S. I. *Linear Programming.* Editorial Dover (2011)

[8] Gibbons, R. *Un primer curso de teoría de juegos.* Editorial Antoni Bosch (1993)

[9] Gordon, G. *Simulación de sistemas.* Editorial Diana (1991)

[10] Hillier, F. S. y Lieberman, G. J. *Introducción a la investigación de operaciones.* Editorial McGraw-Hill (2010)

[11] Sánchez Sánchez, F. *Introducción a la matemática de los juegos.* Editorial siglo XXI (1993)

[12] Taha, H. *Investigación de Operaciones.* Editorial Pearson (2012)

[13] Winston, W. *Investigación de operaciones.* Editorial Thomson (2005)

Índice de Contenidos

LOS AUTORES

Cristóbal Raúl Santa María

Licenciado en Matemática y Magister en Explotación de Datos por la Universidad de Buenos Aires. Ejerce la docencia en distintas universidades nacionales y privadas desde 1979. Se ha desempeñado como consultor en modelado matemático en empresas, en la administración gubernamental y dentro del Programa de Naciones Unidas para el Desarrollo. Es docente e investigador en la Universidad Nacional de La Matanza desde 1995 desempeñándose en la actualidad como Profesor Titular de Investigación Operativa y Director de Grupo de Investigación en temas de stocks y transporte. Es autor de libros y artículos científico-técnicos sobre temas de matemática aplicada al modelado de sistemas.

Agustín Bosio

Es Ingeniero Industrial por la Universidad Nacional de la Matanza y ha cursado estudios de Maestría en Ingeniería de Dirección Industrial en la Universidad de Buenos Aires. Ejerció la docencia como Jefe de Trabajos Prácticos de Investigación Operativa en la Universidad Nacional de La Matanza desde 2012 a 2022. Como investigador trabajó en temas de transporte y logística en UNLAM y en el Instituto del Cálculo de la Universidad de Buenos Aires. En la esfera privada se desempeña en áreas de negociación, licitaciones y contratos para distintas empresas.

DIIT
Departamento de Ingeniería e
Investigaciones Tecnológicas

Universidad Nacional
de La Matanza