

I- Introducción a la Investigación de Operaciones

I.1 Aspectos Históricos

En el siglo III A.C. durante la II Guerra Púnica, Arquímedes gran matemático de la antigüedad griega, propuso usar algunos de sus inventos para defender la ciudad de Siracusa sitiada entonces por los romanos. Entre estos inventos, que fueron efectivamente usados, se encontraba la catapulta, que permitía arrojar a distancia piedras voluminosas e incandescentes, al utilizar el principio de la palanca. También había un sistema de espejos que concentraba y reflejaba la luz solar de tal manera que, al dirigir el rayo reflejado hacia embarcaciones enemigas, estas se incendiaban.

En 1503 Leonardo da Vinci participó como ingeniero en la guerra contra la ciudad de Pisa y aportó allí sus conocimientos sobre construcción de barcos, cañones, vehículos acorazados y otra maquinaria de uso militar.

Estos dos casos de colaboración entre conocimientos científicos y arte militar son útiles para ilustrar porqué, durante el desarrollo de la Segunda Guerra Mundial del siglo XX, el gobierno británico convocó a un nutrido y variado grupo de eminentes científicos a fin de *investigar* el carácter de las *operaciones* militares y elaborar, en consecuencia, métodos para optimizar costos, beneficios, equipamiento, hombres, etc. Lo propio hizo en 1942 al entrar en guerra EEUU, al fundar entonces el grupo SCOOP (Scientific Computations of Optimum Programs).

El primer asunto al que se abocó el grupo inglés fue la mejora de su sistema de defensa antiaérea, al estudiar la relocalización de sus radares de detección de naves enemigas de modo tal que cubriese la mayor cantidad de territorio y con el mayor tiempo de antelación al ataque posible. En términos matemáticos el estudio constituyó la resolución exitosa de un problema de optimización del uso de recursos y fue seguido por otros muchos problemas afines.

Finalizada la guerra con el triunfo aliado, George Dantzig (1914-2005), miembro del grupo SCOOP, desarrolló un algoritmo que podía ser usado en una amplia clase de problemas similares llamados de Programación Lineal. Tal algoritmo se denominó SIMPLEX y vio la luz en 1947.

Sin embargo los antecedentes matemáticos de dichos trabajos provenían de un tiempo anterior. En efecto, ya en 1928 el matemático húngaro J.Von Neumann comenzaba a desarrollar la luego llamada Teoría de Juegos, en la cual utilizaba conceptos de la teoría de matrices que más tarde estructuraron la programación lineal. Por los finales de los años treinta G.J. Stigler resolvió por métodos heurísticos el llamado “problema de la dieta” que consistía en optimizar la ración de comida diaria que recibía cada soldado británico a costo que resultara mínimo. En 1941 y 1942 el problema del transporte fue estudiado por primera vez por el matemático ruso L. Kantorovich (1912-1986) y el holandés T. J. Koopmans (1910-1985), quien acuñó el término programación lineal, usando métodos vinculados a las figuras geométricas convexas. Los resultados obtenidos los condujeron a recibir el premio Nobel de Economía en 1975. Todos estos estudios fueron utilizados por Dantzig para la construcción del SIMPLEX.

Pero la colaboración científico militar producida durante la guerra continuó en forma creciente a efecto de lo que se denominó entonces abreviadamente Investigación de Operaciones que incluía, claro está, a los métodos de la programación lineal entre otras teorías. A su vez, quienes habían participado en los grupos de investigación durante la guerra fueron llevando paulatinamente los distintos resultados a la industria y los servicios al comprobar que el tipo de problemas que se presentaban tenían fuertes similitudes con los que habían resuelto antes. Así creció el interés del mundo civil por la Investigación Operativa. Un aspecto que colaboró decisivamente a propagar el uso de estas técnicas fue el desarrollo de las computadoras, que permitieron resolver problemas involucrando cada vez mayor cantidad de operaciones matemáticas, en tiempos que resultaban también más cortos. Durante 1952 se utilizó en EEUU por primera vez una computadora en ese tipo de resoluciones y cobró entonces mayor vuelo todavía la aplicación de estas técnicas al arte militar. Se establecieron respuestas óptimas para la altura de vuelo de los aviones a fin de alcanzar submarinos enemigos durante un bombardeo, para el volumen y cantidad de bombas a utilizar a efecto de causar el mayor daño y para la inversión de recursos económicos en estas tecnologías.

Paulatinamente durante las décadas del 50 y del 60 comenzaron las aplicaciones a fines más altruistas y benéficos en todo el mundo. En 1958 se aplicaron en Moscú las técnicas de la programación lineal para diseñar el plan óptimo de transporte de arena para construcción, desde 10 puntos de origen a 230 de destino, utilizando computadora para el cálculo y logrando un ahorro del 11% sobre las estimaciones iniciales.

La gestión de gobiernos y de empresas, los problemas técnicos ingenieriles de todo tipo, muchos aspectos de la medicina, problemas de biología, ecología o química resultaron algunos de los campos a los que se extendió el uso de la Investigación Operativa, a punto tal de resultar quizás uno de los avances humanamente más significativos de la matemática del siglo xx.

En nuestro país el estudio y aplicación de estas herramientas comenzó en la Universidad de Buenos Aires a fines de la década del 50 con la creación del Instituto del Cálculo fundado por el matemático Manuel Sadosky (1914-2005), en el ámbito de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, y en la Cátedra de Investigación de Operaciones de la Facultad de Ingeniería, dirigida por el Ing. Isidoro Marín. En Marzo de 1960 se fundó la Sociedad Argentina de Investigación Operativa (SADIO) y actualmente funciona además la Escuela Permanente de Investigación Operativa (EPIO) conformada por especialistas de todo el país.

Si bien la Programación Lineal resultó el núcleo original de la disciplina, de a poco se fueron desarrollando distintos esquemas y teorías para abordar todo tipo de problemas en el marco general del modelado de sistemas. Así aparecieron distintas variantes de la programación lineal, la teoría de colas y la de stocks, la teoría de la decisión, la de juegos ya nombrada, los algoritmos para el recorrido de redes, los procedimientos de camino crítico PERT y CPM, y con auxilio de la teoría de probabilidades y de la estadística, la técnica poderosa de simulación. Los métodos de análisis y los paquetes de software basados en estas teorías permitieron optimizar costos, beneficios y tiempos en la producción industrial y los servicios, de modo que hoy sus elementos básicos constituyen parte esencial en la formación de ingenieros y administradores.

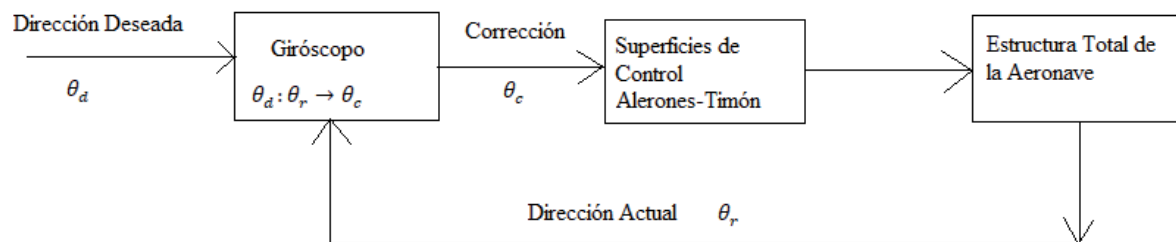
I.2 Perspectiva Sistémica

Se desarrolla a continuación un enfoque general de modelado de sistemas para las técnicas de la investigación operativa. Esto significa que la teoría matemática se utiliza como un modelo posible de un sistema, que permite analizarlo y extraer conclusiones acerca de su comportamiento actual y futuro. La idea es establecer entonces un lenguaje-marco ecléctico dentro del cual puedan quedar comprendidas las distintas teorías y su aplicación en situaciones y problemas reales de la ingeniería.

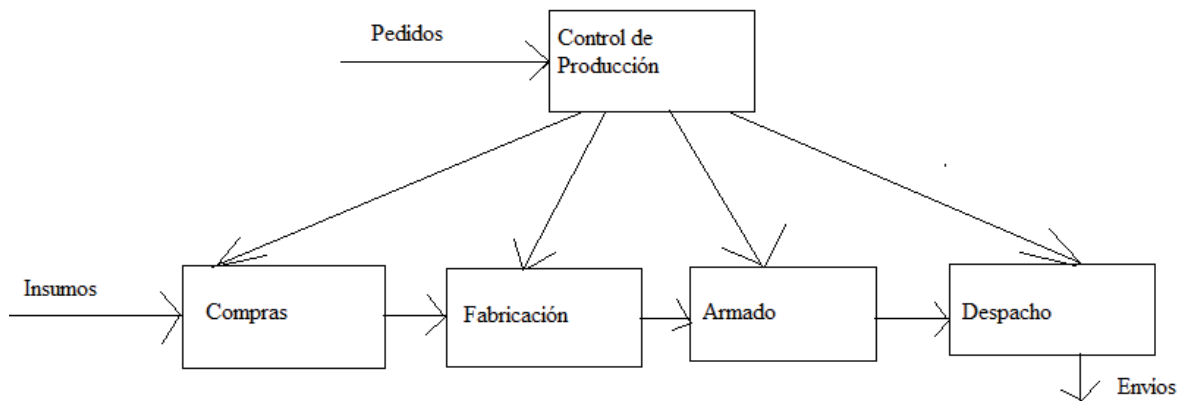
I.2.1- Sistemas

Un *sistema* es un conjunto de objetos, de existencia ser real o formal, que se hallan reunidos por alguna interacción o vinculación regular. Los diagramas de los ejemplos 1 y 2 describen distintos sistemas.

Ejemplo 1: Sistema de navegación aérea



Ejemplo 2: Sistema de fabricación



Conviene destacar que se trata de la descripción de dos sistemas en cuanto a los aspectos de interés de los mismos y en relación con lo que de ellos quiera analizarse. Es decir, los diagramas, así como la descripción en lenguaje coloquial, expondrán lo que resulte relevante de acuerdo a los objetivos del estudio. También se puede señalar aquí una característica marcada en la descripción del Ejemplo 1 para el cual se ve que hay un brazo de realimentación de la información que compara y controla la dirección de la estructura del aeronave con la deseada por el piloto. Este tipo de control “retroalimentado” no está presente en el Ejemplo 2. Los aspectos matemáticos de esta clase de sistemas son estudiados por la llamada Teoría de Control que usualmente no se considera dentro de la Investigación de Operaciones dada su autonomía, complejidad y extensión.

Al describir un sistema se trata de identificar sus distintos elementos y relaciones constitutivas. Para empezar, se buscan las *entidades* que son los objetos de interés. Por ejemplo, el giróscopo es una entidad en el ejemplo 1 o el departamento de fabricación lo es en el ejemplo 2. Las entidades tienen *atributos*, que pueden adoptar distintas cantidades o calidades. Por ejemplo, el giróscopo puede tener incorporada una dirección deseada expresada angularmente, digamos $\theta_d = 30^\circ$, o el departamento de fabricación puede tener que fabricar 50 pantallas según la indicación del departamento de control de la producción. Estas cantidades representan el valor de los atributos que se modificarán al desarrollarse las *actividades* que, por separado o de manera relacionada, efectúen las entidades. Por ejemplo, es una actividad del giróscopo elaborar la corrección θ_c de la dirección real θ_r respecto de la deseada e informarla a las superficies de control, o fabricar las pantallas resulta una actividad que realiza el departamento de fabricación. Además, como consecuencia de las actividades que se realizan, los sistemas sufren cambios o *transformaciones* de su *estado*.

Los sistemas pueden clasificarse según distintos criterios. Serán *discretos* o *continuos* si las variables involucradas, especialmente el tiempo, se miden en una u otra de estas formas. Los habrá *estáticos* o *dinámicos*, según sean las transformaciones que verifiquen y finalmente podrán clasificarse como *determinísticos* o *estocásticos*, según la naturaleza de las actividades que realicen. Por ejemplo, el tiempo empleado por una cajera de supermercado en cobrar a un cliente tiene una duración aleatoria que queda establecida por una ley de probabilidad, por lo cual el sistema “supermercado” que contiene a la cajera es aleatorio o estocástico. En cambio, si todas las actividades de un sistema tienen resultado determinado sin azar el sistema es determinístico.

Un sistema siempre se encuentra rodeado de entidades y actividades que se vinculan o no con él, que no forman parte de su descripción, pero que constituyen su *medio ambiente*. En el ejemplo 2 los clientes son una entidad del medio ambiente y sus pedidos una actividad que realizada originariamente allí, modifica sin embargo al sistema. Lo importante respecto del modelado es entonces la *descripción* del sistema, que marcará la distinción entre él y el medio ambiente, a la vez que resaltará los aspectos importantes a efecto del estudio que dese realizarse. Con vistas al modelado, habrá que tener en cuenta algunos principios a aplicar en la descripción. Por un lado, contar con *información exacta y fidedigna*, por otro incorporar solo los *conceptos relevantes* como ha quedado dicho. Además, y con el fin de facilitar la modelización, se procederá a partir el sistema en *bloques* por entidad o actividad o, por el contrario, *agregar* o reunir un conjunto de entidades y/o actividades bajo un solo concepto cuando sea posible la simplificación de la descripción por esa vía.

En el ejemplo 3 se muestran descripciones de distintos sistemas que atienden a la metodología detallada.

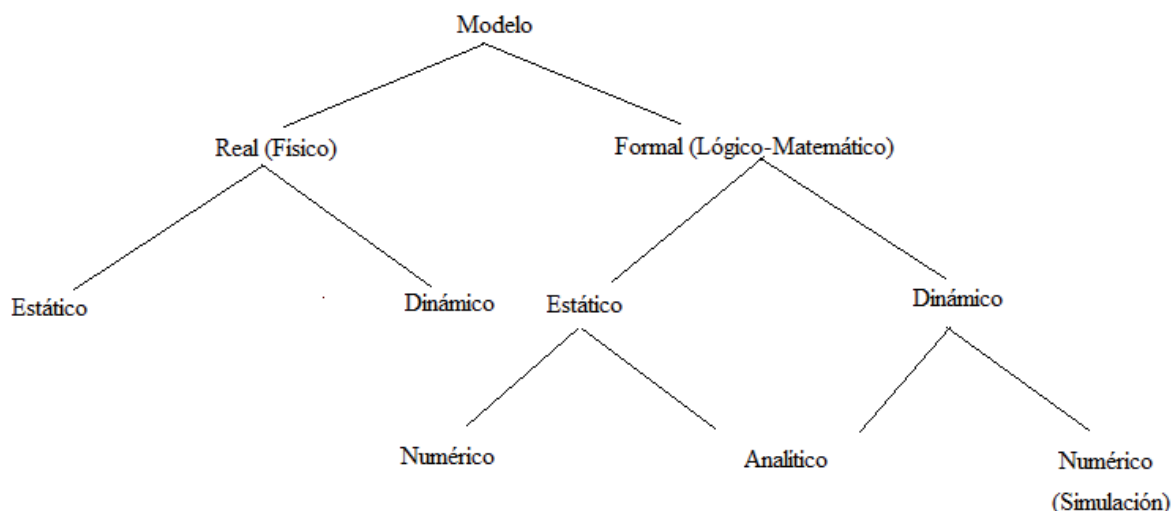
Ejemplo 3:

Sistema	Entidades	Atributos	Actividades
Tienda	Clientes Mercaderías	Compras, Horario Cantidades	Elegir, Pagar
Financiera	Clientes	Estado de Crédito	Pagar, Solicitar
Correo	Cartas	Peso, Forma	Enviar, Recibir
Tránsito	Vehículos	Velocidad, Peso, Distancia	Conducir, Cargar

I.2.2- Modelos

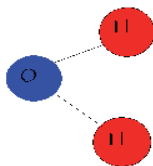
Un *modelo* es un conjunto o cuerpo de información sobre un sistema. Por ejemplo una foto del aula en la que se dicta la materia es un modelo del sistema de enseñanza-aprendizaje de la misma. Pero en particular aquí hay interés en el tipo de modelos utilizados en la investigación de operaciones que resultarán útiles respecto de ciertas decisiones a tomar sobre el sistema. Se inicia entonces el desarrollo del concepto ubicando este tipo de modelos en una clasificación usualmente aceptada que se desarrolla brevemente. La Gráfica 1 aporta entonces ese esquema general.

Gráfica 1



En primer término, conviene aclarar que los modelos reales, de existencia física, no serán objeto de estudio aquí. Sin embargo y para situar contextualmente la clasificación se dan a continuación algunos ejemplos de modelos.

Ejemplo 4: Modelo Icónico



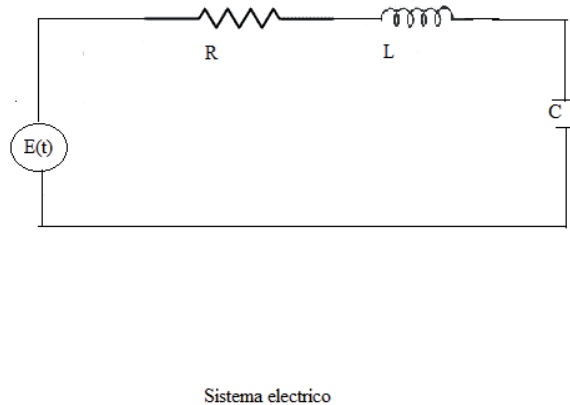
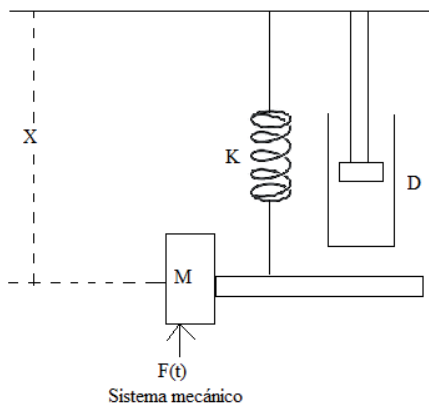
Una pelota de ping-pong pintada de azul y unida por medio de escarbadiantes a otras dos pintadas de rojo representan en forma real e icónica una molécula de agua compuesta de un átomo de oxígeno y dos de hidrógeno (H₂O). Tal modelo es estático y puede servir por ejemplo para enseñar esa estructura a escolares .

Ejemplo 5: Modelo Real a Escala



Un velero construido en miniatura, pero respetando las proporciones y materiales del que luego habrá de construirse en realidad es un modelo a escala y estático del mismo y puede permitir por ejemplo estudios de flotabilidad en piletas que simulen las condiciones reales de navegación.

Ejemplo 3. Modelo Físico Análogo



El sistema mecánico está integrado por una masa M a la que se aplica una fuerza F que depende del tiempo, un resorte R cuya fuerza es proporcional a su extensión o contracción con constante de rigidez K y un amortiguador que ejerce una fuerza de amortiguación proporcional a la velocidad de la masa. Tal sistema puede representar por ejemplo la suspensión del neumático de un automóvil. El movimiento x del sistema está en relación con las partes constitutivas del mismo y puede a su vez expresarse, con adecuadas condiciones iniciales, por la solución de la ecuación diferencial:

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = KF(t)$$

El sistema eléctrico es precisamente un modelo del sistema mecánico construido por analogía. En él, la carga q en el capacitor C resulta el elemento análogo a x . La intensidad de corriente $I = \dot{q}$ representa a la velocidad \dot{x} , la diferencia de potencial $E(t)$ a la fuerza F , la inductancia L a la masa M , el valor R de la resistencia al factor de amortiguación D y la constante $1/C$ a la constante K del resorte. De tal forma la ecuación diferencial cuya solución es precisamente q representa al sistema eléctrico.

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = \frac{E(t)}{C}$$

Esta ecuación es independientemente de las magnitudes físicas que representen las variables, enteramente análoga a la que representa en términos matemáticos al sistema mecánico. Es esta analogía entre fórmulas la que sugiere y autoriza entonces la sustitución física de un sistema por otro para estudiar propiedades, constituyendo en ese caso el sistema elegido un modelo físico análogo y dinámico del sistema original. Por supuesto y además las respectivas ecuaciones resultan modelos matemáticos de cada uno de los sistemas analizados.

Los modelos matemáticos son el objetivo principal de esta exposición. Un *modelo matemático estático y numérico* del curso de Investigación Operativa es por ejemplo una estadística sobre presencias de estudiantes, temas, notas, etc. del mismo. Algunos modelos matemáticos de los se verán aquí tendrán por ejemplo características invariantes en sus restricciones y objetivos constituyendo *modelos matemáticos estáticos y analíticos* porque involucrarán fórmulas para representar al sistema. Habrá también modelos que en sus fórmulas incluyan las diferentes transformaciones que el sistema pueda verificar y serán por esto *modelos matemáticos dinámicos y analíticos*. Finalmente habrá modelos que emulen el desempeño del sistema por medio de una estadística construida en forma ficticia a través de la aplicación de patrones de comportamiento conocidos dados por fórmulas simples. Estos *modelos matemáticos dinámicos y experimentales* son los que aportan las técnicas de *simulación*. Por ejemplo: conocido por el ajuste de datos estadísticos observados el comportamiento probabilístico exponencial del tiempo de atención de una cajera en un supermercado, se pueden generar tiempos ficticios de atención utilizando la ley matemática hallada, y simular así nuevos tiempos de atención de la cajera como si fueran reales.

Como es fácil imaginar la construcción de modelos matemáticos es una tarea cuya dificultad y duración dependen de la complejidad del sistema involucrado. No se requieren los mismos tiempos ni los mismos conocimientos para modelar por ejemplo la actividad de un satélite en órbita que para saber cuánto y cuando reponer en el stock de una fábrica. Pero en ambos casos, como en infinidad de otros, puede construirse un modelo matemático. Algunos sistemas suficientemente conocidos y relativamente sencillos tienen sus modelos estándar, en general analíticos. A ciertos modelos de ese tipo se refiere al menos inicialmente la Investigación de Operaciones, sin perjuicio que el uso y/o la combinación de modelos conocidos pueda extenderse a situaciones no analizadas o nuevas. Conviene entonces distinguir algunas etapas genéricas en la construcción de modelos nuevos y/o más complejos:

Etapa 1: Planteo del tipo de estudio o problema que desea realizarse acerca de un sistema.

Etapa 2: Descripción acabada del sistema con acopio de toda la información relevante dada por estadísticas, fórmulas relacionales, teorías, etc.

Etapa 3: Desarrollo del modelo matemático.

Etapa 4: Confección de un programa de computadora que en base al modelo calcule los valores de sus variables de decisión.

Etapa 5: Validación de parámetros.

Etapa 6: Uso del modelo. Evaluación de resultados y toma de decisiones.

Un breve comentario acerca de estas etapas debe comenzar destacando que por lo general se construye un modelo matemático a efecto de tomar, mediante su uso, alguna decisión. El planteo de cuál es esa decisión, cuáles son sus alcances y modalidades está contemplado en la Etapa 1. La Etapa 2 plantea un estudio pormenorizado del sistema para obtener su descripción en términos de entidades, atributos y actividades que normalmente serán representadas en términos matemáticos por variables, rangos de valores de las mismas y funciones que las ligan. Así se plantea la Etapa 3 para la cual puede hacerse necesario reconsideraciones sucesivas de las Etapas 1 y 2 a efecto de aumentar la claridad y precisión de la representación que el modelo haga del sistema y de la solución al problema de decisión involucrado. Terminado este proceso o al menos bien avanzado su desarrollo debe comenzar la Etapa 4 de confección de un programa de computadora que calcule los valores que hacen a la decisión a tomar. Este puede desarrollarse de muy variadas formas por medio de lenguajes de propósito general como por ejemplo Fortran Pythom, o R o C, aptos para el trabajo con expresiones matemáticas, o bien pueden utilizarse paquetes de software preparados para propósitos generales como el GPSS (Sistema de Simulación de Propósito General)) en el caso de un modelo experimental por simulación. También se dispone de paquetes por tipos de actividad como por ejemplo finanzas, exploración petrolera etc. La Etapa 5 significa un ajuste fino, buscando aportar máxima precisión en los parámetros de cálculo, a efecto que en situaciones conocidas el modelo y el sistema produzcan respuestas lo más parecidas posibles. Si esto ocurre, si el modelo ajusta a la realidad de comportamiento del sistema en situaciones conocidas, se podrá tener cierta certeza en que lo hará para casos desconocidos, en los cuales haya modificaciones o planteos nuevos. Por ende, se podrán utilizar las respuestas obtenidas en las pruebas con el modelo, para tomar las decisiones sobre qué hacer con la realidad del sistema. Esto involucra la realización de la Etapa 6.

Ejercicios resueltos

Ejercicio N°1- Detallar posibles entidades, atributos y actividades de los siguientes sistemas señalando objetivos de la descripción y caracterizando el medio ambiente de acuerdo a ello.

- a) Sistema de tránsito
- b) Sistema de comunicaciones
- c) Sistema bancario
- d) Sistema hospitalario
- e) Supermercado

Sistema	Objetivos	Entidades	Atributos	Actividades	Medio Ambiente
Sistema de Tránsito	Organizar la circulación de forma efectiva	Semáforos, automóviles, peatones	Velocidad, luces normativas, senda peatonal	Frenar, esperar, circular	Parada de ómnibus, subte
Sistema de Comunicaciones	Comunicar entre dos o más puntos, intercambiando datos o información	Emisor, receptor	Longitud del mensaje, hora	Enviar-recibir información	Computadoras
Sistema Bancario	Gestionar los valores de los clientes según las necesidades de los mismos, en forma segura	Banco, cliente	Valores monetarios (\$) en cuentas.	Depósitos, extracciones, transferencias	Edificio, cajas
Sistema Hospitalario	Diagnosticar y resolver la situación del paciente	Médico, enfermero, paciente	Tiempo de espera, equipamientos, insumos	Internación, consulta médica, atención de urgencia	Consultorios, computadoras
Supermercado	Abastecer a sus clientes	Empleado, cliente, repositor, proveedor, cajas	Lista de compras, mercadería en camiones, tiempo de atención	Comprar, vender, reponer mercadería	Fila de cobro y control de productos

Ejercicio N°2- Describir el sistema de enseñanza-aprendizaje de la materia Investigación Operativa

El sistema enseñanza-aprendizaje de la materia tiene por entidades fundamentales a los estudiantes y los profesores. Los atributos ligados con los primeros son los conocimientos previos, su interés por la materia y algunos más como el número de presencias y la nota obtenida en cada evaluación. En cuanto a los profesores son atributos sus conocimientos, sus recursos didácticos, sus clases asignadas. El aula es otra entidad a tener en cuenta con su disponibilidad horaria, la cantidad de sillas, escritorios y pizarrones disponibles como atributos. Si el curso se impartiera a distancia, recursos tales como la plataforma de enseñanza-aprendizaje y sus facilidades disponibles serían entidades y respectivos atributos también. Se trata de un sistema dinámico pues muchos de los atributos señalados cambian en razón de la actividad de enseñanza y aprendizaje compuesta, a su vez, por sub actividades tales como exposición teórica, realización de ejercicios, comprensión, estudio y evaluación. El tiempo puede considerarse en forma continua pues las distintas entidades pueden desarrollar en conjunto y/o separadamente estas actividades en cualquier momento, aunque puede también conceptuarse la discretización en días, por ejemplo. El

sistema es estocástico pues muchas de las actividades tienen a priori varios posibles resultados con distinta probabilidad de ocurrencia. Por supuesto cabría aquí un mayor detalle si se precisara en la consigna del problema el objetivo por el cual se requiere la descripción y el ulterior modelado que ésta supone.

Ejercicios propuestos

Ejercicio N°3- Dar ejemplos de sistemas:

- a) estáticos y dinámicos
- b) continuos y discretos
- c) determinísticos y estocásticos.

Ejercicio N°4- Según la siguiente descripción indicar entidades, atributos, actividades y tipo de sistema:

“A un puerto llegan barcos que atracan junto a un muelle si está disponible; en caso contrario, esperan hasta que se libere uno. Los descargan varias cuadrillas de trabajo cuyos tamaños dependen del tonelaje de la nave. Una bodega contiene una nueva carga para el barco. Se carga el barco y luego se hace a la mar.”

Ejercicio N°5- Se desea agregar una nueva ruta de colectivo en la ciudad y el director de transporte debe determinar con cuántos colectivos adicionales hay que contar para ello. ¿Cuáles son los atributos fundamentales de pasajeros y colectivos a tener en cuenta?