VI- Teoría de Juegos

VI.1 Introducción

La teoría de juegos estudia las situaciones de competencia, y ocasionalmente de colaboración, entre distintos jugadores. Por jugador debe entenderse aquella entidad que con el objetivo de obtener su mejor beneficio selecciona y lleva a cabo estrategias de acción dentro de un sistema. Así, un jugador podría ser una especie que compite por un hábitat, una empresa que intenta vender un producto en un mercado, un político que lucha por obtener una banca o un jugador de cartas que busca ganar un juego. En cualquiera de estos casos, la aplicación de la teoría se realiza para seleccionar la estrategia que conduce al óptimo resultado. Un ejemplo típico de formulación de un juego es el que se plantea a partir del llamado *Dilema del Prisionero*: dos sospechosos son detenidos y acusados de cometer un delito en conjunto; como no existe evidencia suficiente para condenarlos hay que obtener una confesión; separados sin poder tener comunicación entre sí, se les informa que si ninguno confiesa serán condenados ambos con una pena de un mes de cárcel; si ambos confiesan le corresponderán seis meses de cárcel a cada uno; y finalmente si uno confiesa y el otro no, el que lo haga saldrá en libertad y el que no será condenado a nueve meses, seis por el delito en sí y tres más por obstrucción de la justicia. ¿Qué le conviene hacer a cada prisionero?

La representación de este dilema como un juego puede lograrse mediante una matriz binaria, de dos cantidades por celda, en la cual se registran los resultados de cada cruce de estrategias. Cada preso es un jugador y como tal tiene dos estrategias posibles callarse o confesar. La matriz de pagos del juego resulta entonces:

Jugador 1 / Jugador 2	Estrategia 1 Callarse	Estrategia 2 Confesar
Estrategia 1 Callarse	-1, -1	-9, 0
Estrategia 2 Confesar	0, -9	-6,-6

En cada celda, la primera cantidad es el pago correspondiente al Jugador 1 cuyas estrategias posibles se ordenan por fila. La segunda cifra corresponde al pago al jugador 2, con las estrategias dispuestas en las columnas. Las cantidades distintas de 0 están precedidas por un signo menos pues representan una pérdida, en este caso de la libertad.

La forma normal de representación de un juego establece los jugadores que participan en él, las estrategias de que dispone cada jugador y la ganancia que le corresponde de acuerdo a la combinación de las estrategias que los jugadores utilicen. Claro que la expresión matricial del pago es posible cuando participan en el juego solo dos jugadores. Un juego de 3 jugadores tendría que dar lugar a un arreglo de tres dimensiones y, en general, uno de n jugadores debería representarse con un arreglo de pagos de dimensión n.

En el ejemplo del dilema del prisionero se ve una característica importante que se verifica en muchos juegos: los jugadores deben tomar sus decisiones sin conocer cuáles serán las decisiones de los demás. Otra condición importante es que poseen la información sobre el pago que cada cruce de estrategias le corresponderá a cada uno. Es decir; los jugadores tienen información completa. Por supuesto ambas situaciones no necesariamente se verifican en un juego; a veces un jugador conoce las estrategias que elegirán los demás jugadores y a veces, también pude ocurrir, que no sepa el resultado que obtendrá el o cualquier otro jugador al desarrollarlas. En cualquier caso, asumiremos una hipótesis muy necesaria: los jugadores juegan racionalmente. Esto quiere decir que emplean todos los conocimientos y razonamientos posibles con el objetivo de obtener el resultado óptimo. En otras palabras, la teoría se edifica descartando por el momento el pálpito a la hora de la decisión.

Hasta aquí el juego se caracteriza por la elección simultánea de estrategias por parte de los jugadores. Esto resulta en una formulación estática a través de la representación normal que se ajusta mejor a la situación. Podría utilizarse también la forma normal si existiera una dinámica de tomas de decisiones sucesivas por parte de los jugadores, por ejemplo, en un juego de ajedrez. En tales casos es más conveniente utilizar la forma extensiva que se despliega como un árbol, aunque esto no será parte del contenido de este capítulo.

VI.2 Suma cero

Vamos a comenzar a restringir el tipo de sistema que modelaremos. Será uno en que participen compitiendo entre sí solo dos jugadores, que lo harán en forma racional y con información completa, aunque sin conocer, antes de su decisión, lo que decidirá su rival.

Pero además tendremos en cuenta una situación particular muy común que consiste en que, dado un cruce de estrategias, la ganancia de un jugador será la pérdida del otro. Por ejemplo, supongamos que dos personas, en forma simultánea, exhiben uno o dos dedos de la mano. El que llamaremos jugador I ganará un peso toda vez que la cantidad de dedos exhibida por ambos sea la misma y en caso contrario perderá un peso a manos del jugador II. Es claro aquí que cuánto gana uno de los jugadores, el otro lo pierde en igual cantidad. Pérdidas de uno más ganancias del otro, se compensan siendo la suma de ambas 0. La representación normal por medio de una matriz, que por convención será la del jugador I, contiene ahora una sola cifra en cada celda pues la otra, que representaría el pago a obtener por el jugador 2, sería simplemente igual, pero de signo opuesto. Para nuestro ejemplo la matriz de pagos del jugador I resulta:

Jugador I/Jugador II	Exhibir un dedo	Exhibir dos dedos
Exhibir un dedo	1	-1
Exhibir dos dedos	-1	1

En el supuesto que quisiera construirse la matriz de pagos para el jugador II bastaría con transponer la matriz y cambiar el signo en cada una de las celdas. En lo que sigue solo consideraremos juegos de suma cero.

VI.3 Dominancia de estrategias

Hasta aquí nos hemos limitado a expresar el juego en la forma normal a partir del enunciado de un problema, pero nada hemos hecho aún para resolverlo. Resolverlo es precisamente encontrar las estrategias óptimas para cada jugador y el pago óptimo. Esto último no significa otra cosa que la mejor ganancia o pérdida que cada jugador pueda obtener. Como el juego es de suma cero el pago para ambos jugadores será el mismo salvo por un signo opuesto.

El camino para resolver un juego así planteado comienza descartando las estrategias dominadas. Consideremos un juego cuya matriz de pagos es la siguiente:

Jugador I/Jugador II	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3
Estrategia 1	2	3	2
Estrategia 2	-1	2	1
Estrategia 3	4	2	1
Estrategia 4	2	3	1

Como ya aclaramos, esta es por convención, la matriz de pagos del Jugador 1, pero al tener información completa, ambos jugadores disponen de ella para calcular y pueden, porque son racionales, establecer cuáles serán las estrategias elegidas y las descartadas por su oponente.

Una estrategia de un jugador está dominada por otra siempre que, cualquiera sea la opción elegida por su rival, el pago a obtener con la dominada sea inferior o a lo sumo igual que el que conseguiría con la dominante. Por ejemplo, en la matriz de pagos del juego planteado, la estrategia 1 del Jugador I domina a su estrategia 2 pues comparando las filas en cada columna la entrada de la fila 1 es mayor o igual que la de la fila 2. Así las cosas, el Jugador I procederá a descartar la elección de la estrategia 2 tachándola. Está claro que con el mismo razonamiento el Jugador II sabrá que el I así procederá. Además, la estrategia 1 también domina a la estrategia 4 razón por la cual esta última también será tachada. En este caso particular hay que señalar que, aun cuando el Jugador II se decidiera por su estrategia 1 y el resultado de elegir la estrategia 1 o la 4 para el jugador I fuera el mismo, eso no ocurriría en caso de que el jugador II eligiera su estrategia 3 donde el pago de la estrategia 1 del Jugador 1 sería mayor. Tenemos entonces:

Jugador I/Jugador II	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3
Estrategia 1	2	3	2
Estrategia 2	~~-1~~	~~2~~	~~1~~
Estrategia 3	4	2	1
~~Estrategia 4~~	~~2~~	~~3~~	~~1~~

Pero si el Jugador I, actuando en forma racional descarta sus Estrategias 2 y 4, el Jugador II una vez comprendido esto, descartará sus estrategias 1 y 2. Si bien optando por la estrategia 3 pierde, cualquiera sea la estrategia elegida por el I, lo hace en menor cantidad. Por lo tanto, sus estrategias 1 y 2 están dominadas por la 3 y esta será la elegida. Así las cosas, hasta ahora las eliminaciones han dejado sobre la matriz de pagos lo siguiente:

Jugador I/Jugador II	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3
Estrategia 1	~~2 xxxxxxx~~	~~3 xxxxxx~~	2
Estrategia 2	~~1~~	~~2~~	~~1~~
Estrategia 3	~~4 xxxxxxx~~	~~2 xxxxxx~~	1
~~Estrategia 4~~	~~2~~	~~3~~	~~1~~

Finalmente, puede verse que, si bien el Jugador II no tiene otra opción que su estrategia 3 luego de las sucesivas tachaduras, la estrategia 1 del Jugador I domina a su estrategia 3 de forma que procederá a descartarla. Por lo tanto, quedan todas las entradas de la matriz tachadas, salvo la correspondiente al cruce de la estrategia 1 del Jugador 1 con la estrategia 3 del Jugador II. La cifra correspondiente es el llamado valor del juego v=2, ganancia óptima para el Jugador 1, pérdida óptima para el Jugador II. Se ha alcanzado el llamado equilibrio de Nash del juego. Es decir, el punto de cruce de estrategias óptimo para ambos jugadores.

Jugador I/Jugador II	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3
Estrategia 1	~~2 xxxxxxx~~	~~3 xxxxxx~~	2
Estrategia 2	~~1~~	~~2~~	~~1~~
Estrategia 3	~~4 xxxxxxx~~	~~2 xxxxxx~~	~~1~~
~~Estrategia 4~~	~~2~~	~~3~~	~~1~~

VI.4 Criterio minimax

John Von Newman, matemático húngaro-norteamericano, demostró en 1928 que en un juego de dos competidores con información completa y suma cero, hay una única solución óptima. Para hallarla proporcionó un criterio algorítmico conocido como minimax. Este principio consiste en que cada jugador busque minimizar su pérdida posible máxima

Supongamos que un juego con las características apuntadas se expresa por la matriz de pagos del Jugador I siguiente:

Jugador I/Jugador II	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3
Estrategia 1	-4	-1	0
Estrategia 2	1	0	4
Estrategia 3	5	-1	-3

El Jugador I, al elegir la estrategia 1, se encontraría con que la situación más desfavorable que pudiera presentársele si el Jugador II seleccionase su estrategia 1. De igual forma si su elegida fuera la estrategia 2 el peor resultado que obtendría ocurriría cuando el Jugador II optara por la estrategia 2. Finalmente, al decidirse por la estrategia 3 su peor pago resultaría de la elección de la estrategia 3 por parte del Jugador II. Se observa entonces que esa situación más desfavorable en cada caso estaría dada por el pago mínimo de la fila que señala la estrategia del Jugador I. Similarmente el Jugador I puede calcular la situación más desfavorable del Jugador II al evaluar cada una de las estrategias para él disponibles. Le basta para esto tomar el máximo de los pagos que le corresponderían en cada columna, pues representarían la mayor pérdida para el Jugador II en cada caso. Entonces minimizar la mayor pérdida posible querría decir, para el jugador I, maximizar los mínimos obtenidos por fila. En el mismo sentido, minimizar la mayor pérdida para el Jugador II consistiría en minimizar los máximos calculados por columna. Así resulta:

Jugador I/Jugador II	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3	**min**
Estrategia 1	-4	-1	0	-4
Estrategia 2	1	**0**	4	**0=Maxmin**
Estrategia 3	5	-1	-3	-3
Max	5	**0=minMax**	4	

Se llega entonces al llamado punto de ensilladura. El pago correspondiente al cruce de las estrategias 2 de ambos jugadores, resulta aquí el valor del juego v=0. Para él, coinciden el llamado valor inferior $\underline{v} = Maxmin$ con el valor superior $\overline{v} = minMax$. Es decir $v = \underline{v} = \overline{v}$. En esta situación se da el equilibrio de Nash del juego. Como además en este caso el pago óptimo es 0, se dice que el juego es justo pues nadie gana ni pierde.

En el apartado anterior se proporcionó un ejemplo en el cual por simple aplicación reiterada del criterio de estrategia dominada se llegó al punto de equilibrio del juego. ¿Será esto posible en el ejemplo que acabamos de resolver? Veamos.

Jugador I/Jugador II	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3
Estrategia 1	~~-4~~	~~-1~~	~~0~~
Estrategia 2	~~1xxxxxxxxx~~	0	4
Estrategia 3	~~5xxxxxxxxx~~	-1	-3

Una vez tachadas la estrategia 1 del Jugador I por ser dominada por la 2, y tachada la estrategia 1 del Jugador II por ser dominada por la 2, no puede continuarse aplicando el enfoque de dominancia para llegar a la solución del juego. Por ahora entonces, vemos que el criterio minimax permite resolver una clase más amplia de problemas.

VI.5 Estrategias mixtas

Volvamos ahora al problema de la sección VI.2 y tratemos de aplicar el criterio minimax para resolverlo. Calculamos máximos y mínimos para obtener:

Jugador I/Jugador II	Exhibir un dedo	Exhibir dos dedos	min
Exhibir un dedo	1	-1	-1
Exhibir dos dedos	-1	1	-1
Max	1	1	

Como se ve, aquí resulta que el máximo de los mínimos es $Maxmin = -1$ mientras que el mínimo de los máximos es $minMax = 1$. Como no coinciden, no hay punto de ensilladura y tal cual lo estamos planteando el juego no tendría equilibrio. Sin embargo, el equilibrio puede establecerse hallando el valor del juego cuando se consideran estrategias mixtas.

Una estrategia mixta es una combinación de probabilidades, cada una de las cuales es precisamente la probabilidad de elegir cada estrategia disponible. Con las estrategias mixtas de ambos jugadores puede calcularse un pago esperado. Es decir, para obtener el pago esperado habrá que considerar los pagos expresados en cada cruce de estrategias, pesados con la probabilidad de que tal cruce ocurra. Expliquemos esto. Por ejemplo, un jugador puede participar en el juego de los dedos 3000 veces, de forma tal que en 2000 ocasiones elige una de las estrategias y en las 1000 veces restantes, la otra. El número 3000, suficientemente grande, asegura la regularidad estadística para estimar sus probabilidades de jugar cada estrategia. Es decir, estaría eligiendo con probabilidad cercana a 2/3 una de las estrategias y con probabilidad aproximada 1/3 la otra. La estrategia mixta sería la constituida por el par (2/3, 1/3). ¿Será óptima? Es decir, ¿podrá esperar al jugarla el mejor pago posible? No hay que olvidar que el pago que reciba el jugador, no solo dependerá de lo que él haga, sino también de lo que juegue su rival. Esto significa que el pago esperado $PE = y_1x_1(1) + y_1x_2(-1) + y_2x_1(-1) + y_2x_2(1)$ resulta una función de las cuatro probabilidades. Según la estrategia mixta que lleve adelante el otro jugador, la estrategia del que juega con probabilidades (2/3, 1/3) pudiera no conducir a un pago esperado óptimo. Entonces si el juego no se va a jugar 3000 veces, sino una sola, será bueno contar “a priori” con las probabilidades que optimicen el pago esperado. Con ellas se podría efectuar un sorteo para elegir la estrategia que finalmente se elija jugar. Esto implica que, tanto para el Jugador I como para el II, hay que calcular racionalmente esas probabilidades antes de jugar. Es decir, hay que hallar el par de probabilidades (x_1, x_2) que conforman la estrategia mixta del Jugador I y el respectivo par (y_1, y_2) correspondiente a la estrategia mixta del jugador 2, de forma tal que produzcan el mejor pago esperado para ambos jugadores. Ese pago esperado corresponderá al equilibrio de Nash en presencia de estrategias mixtas. Ahora necesitamos encontrar la forma de calcular las estrategias mixtas y el pago esperado.

Preguntémonos ¿cuál sería el pago esperado óptimo? La respuesta está en el criterio minimax. Recordemos que el mínimo de cada fila representa la situación más desfavorable para el Jugador I al jugar cada una de sus estrategias y que, por ende, al elegir el máximo de estos mínimos se está buscando la peor situación en la que el Jugador I podría encontrase procediendo racionalmente. Es decir el valor inferior del juego, que para que la solución exista debe cumplir $v = \overline{v} = \underline{v}$, debe maximizar estos mínimos.

El problema de los dedos, puede resultar bastante sencillo de resolver con ayuda gráfica. Para clarificar ampliamos la tabla con filas y columnas que van a contener las probabilidades halladas para cada estrategia.

Jugador I/Jugador II		Exhibir un dedo	Exhibir dos dedos
	Probabilidades	Y_1	Y_2
Exhibir un dedo	X_1	1	-1
Exhibir dos dedos	X_2	-1	1

Cuando el Jugador II juega la estrategia 1, es decir opta por su estrategia mixta (1,0), el pago esperado es $PE = x_1 1 + x_2(-1)$ De la misma forma cuando el Jugador II juega su estrategia 2, aplicando la estrategia mixta (0,1), se puede esperar un pago $PE = x_1(-1) + x_2 1$. Cómo, por tratarse de probabilidades, $x_1 + x_2 = 1$ resulta que el pago esperado puede ponerse en función de x_1 haciendo:

$PE = x_1 - (1 - x_1) = 2x_1 - 1$ recta 1

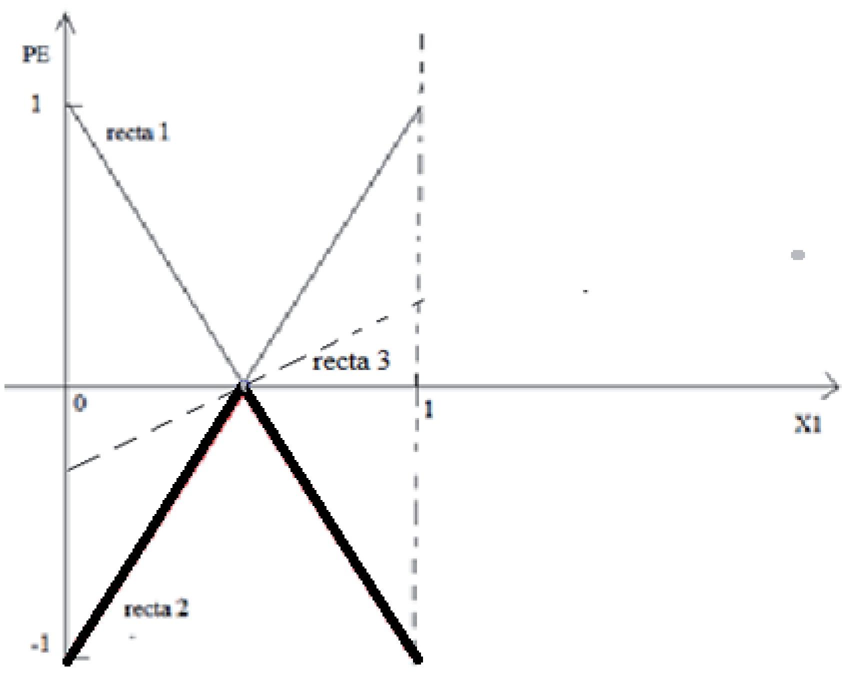
$PE = -x_1 + (1 - x_1) = -2x_1 + 1$ recta 2

La matriz de pagos para el Jugador I puede ahora verse:

Jugador I/Jugador II	Exhibir un dedo	Exhibir dos dedos
Estrategia mixta	$2x_1 - 1$	$-2x_1 + 1$

Según el criterio minimax el Jugador I debe hallar el máximo de sus mínimos pagos. En la Gráfica 1 se muestran en negro los mínimos pagos esperados correspondientes y con un punto gris se señala su máximo.

Gráfica 1



Cada valor de probabilidad x_1 se corresponde con posibles pagos esperados surgidos de estrategias distintas aplicadas por el jugador II. Nótese que cualquier otra estrategia que eligiera el Jugador II se asociaría con una recta que pasaría por el punto señalado y cuya ordenada al origen estaría en el intervalo [-1, 1]. Por ejemplo la recta 3 señalada con trazo cortado corresponde al pago esperado cuando el Jugador II elige la estrategia mixta (2/3, 1/3) Entonces la traza negra es la formada cuando para cada $x_1$se toma el mínimo de todos los pagos. Las coordenadas del punto señalado son el valor de probabilidad x_1 que realiza el PE máximo entre los mínimos sombreados en negro y ese propio PE que es el Maxmin.

Ahora calculamos, teniendo en cuenta que el óptimo se produce en la intersección de las rectas 1 y 2. Se tiene:
$2x_1 - 1 = -2x_1 + 1$ luego
$4x_1 = 2$ y entonces
$$x_1 = \frac{1}{2}$$
Con este valor de probabilidad hallamos también $x_2 = 1 - x_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ y además con cualquiera de las rectas podemos calcular el valor óptimo de PE haciendo por ejemplo:
$$PE = 2x_1 - 1 = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 0$$
Éste será entonces el valor v del juego. Para establecer el equilibrio el pago óptimo para el Jugador 2, surgido al calcular el mínimo de sus máximas pagos al Jugador I, también tendrá que ser igual al valor de PE. En fórmulas:
$$\overline{v} = minMax = Maxmin = \underline{v} = v = PE = 0$$
Ahora resulta sencillo calcular la estrategia mixta para el Jugador II. En efecto, suponiendo que el Jugador I elige sus estrategias mixtas (1,0) y (0,1) se obtienen las ecuaciones:
$$0 = PE = y_1 1 + y_2(-1)$$
$$0 = PE = y_1(-1) + y_2 1$$
Como $y_1 + y_2 = 1$ queda $0 = y_1 - (1 - y_1)$ de donde $y_1 = \frac{1}{2}$ y por lo tanto $y_2 = \frac{1}{2}$
Hemos resuelto el juego al determinar que la estrategia mixta del Jugador I está constituida por el par (1/2, 1/2), que la estrategia mixta del Jugador II es (1/2, 1/2) y que el pago esperado correspondiente a ellas y por lo tanto óptimo en el sentido minimax es 0.

Supongamos ahora que hasta aquí no se ha jugado el juego y se lo hará una vez a continuación. ¿Cómo deben proceder los jugadores? La única regla posible es hacer un sorteo para elegir qué estrategia jugar. Esto es así, pues si hubiese una regla, ambos jugadores la conocerían y por ende podrían contrarrestarla jugando para obtener un mejor pago. Por lo tanto, la mejor elección racional será la que surja del sorteo que, de acuerdo con la distribución de probabilidades de su estrategia mixta, cada uno realice para elegir si muestra uno o dos dedos. Quizás pueda no verse aún que esta es la mejor respuesta racional factible, pero podremos entenderlo si volvemos al ejemplo en que se jugaba el juego 3000 veces y un jugador elegía 2000 veces una estrategia y 1000 la otra, lo que respondería a la estrategia mixta (2/3, 1/3). Simplemente si el otro jugador se atuviera a la respuesta racional y sorteara según la estrategia mixta (1/2, 1/2) cual estrategia jugar cada vez, seguramente al cabo de 3000 juegos hubiera jugado aproximadamente la mitad de las veces cada estrategia. Habría entonces, posiblemente, 500 veces en que este jugador le hubiera opuesto al otro una estrategia ganadora y en ese caso la posible diferencia a su favor sería de 500 pesos. En cambio, si ambos jugadores juegan racionalmente la ganancia al cabo de los 3000 juegos tendría que rondar los 0 pesos para cada uno.

Un aspecto importante a destacar es que, si el punto de equilibrio se alcanza sin recurrir a estrategias mixtas, esto puede interpretarse pensando que la estrategia óptima de cada uno de los jugadores tiene probabilidad 1 de ser jugada y el resto de las disponibles, probabilidad 0. Tal lo ocurrido al resolver el problema planteado en la sección VI.4 y también cuando calculamos los pagos esperados para ambos jugadores en el problema de los dedos.

VI.6 Juegos y programación lineal

Cuando ninguno de los jugadores puede quedarse con dos estrategias para formar su estrategia mixta, no resulta factible resolver el juego en forma gráfica. Sin embargo, es posible aún hallar la solución por medio de la programación lineal. Un juego de dos jugadores que compiten en forma racional, con información completa y de suma cero, puede en forma general, tener m estrategias disponibles para el Jugador I y n estrategias seleccionables para el Jugador II. Esto se trasuntaría en una matriz de pagos como la que sigue:

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ siendo $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ e $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ estrategias mixtas de los Jugadores I y II respectivamente. La fórmula general del pago esperado es $PE = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$

Cuando calculamos la solución en forma gráfica supusimos en realidad que el Jugador II o bien jugaba la estrategia 1, es decir que considerábamos su estrategia mixta $(y_1, y_2) = (1{,}0)$, o bien jugaba su estrategia 2 lo que correspondía a la mixta $(y_1, y_2) = (0{,}1)$. En el caso general también podríamos hacerlo así, considerando las estrategias mixtas (1, 0, 0…0) hasta (0, 0, …,1) elegidas por el Jugador II. De este modo, las cantidades $\sum_{i=1}^{m} a_{i1} x_i$, $\sum_{i=1}^{m} a_{i2} x_i$, …, $\sum_{i=1}^{m} a_{im} x_i$ resultarán siempre mayores o iguales al mínimo de ellas al que denominaremos min . Por otra parte es claro que min es lo que se intenta maximizar en términos matemáticos para hallar el valor v del juego y que debe cumplirse $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1$ pues es la suma de las probabilidades de elegir cada una de las estrategias del Jugador I. Lo expuesto permite entonces plantear el siguiente problema de programación lineal

[Max] $v = min$ con las restricciones:
$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i - min \geq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n$
$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1$
$x_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m$

El problema dual permitirá hallar la óptima estrategia mixta del jugador II por lo que en el renglón 0 del cuadro final resultante del problema primal, también estará la solución para éste jugador.

Para finalizar resolvemos entonces el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1: La matriz de pagos del conocido juego Piedra, Papel o Tijera se puede escribir de la siguiente forma:

Jugador I/Jugador II	Piedra	Papel	Tijera
Piedra	0	-1	1
Papel	1	0	-1
Tijera	-1	1	0

Como no hay punto de ensilladura, para hallar el valor del juego es necesario usar estrategias mixtas. Por otra parte, al no poder quitar ninguna de las filas o columnas por dominancia, ninguno de los dos jugadores tiene solo dos estrategias disponibles como para intentar la resolución gráfica. Por lo tanto, hay que plantear un problema de programación lineal.

[Max] $v = min$

$$
\begin{aligned}
&\qquad x_2 - x_3 - min \geq 0 \\
&-x_1 \quad + x_3 - min \geq 0 \\
&x_1 - x_2 \qquad - min \geq 0 \\
&x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 1 \\
&x_1 \geq 0 \,, x_2 \geq 0 \,, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Al resolver se obtienen la estrategia mixta del Jugador I (1/3, 1/3, 1/3), la estrategia mixta del Jugador II (1/3, 1/3, 1/3) y el pago esperado correspondiente v=PE=0

Ejercicios resueltos

Ejercicio N° 1- Considerar el juego que tiene la siguiente matriz de pagos:

I/II	1	2	3	4
1	2	-3	-1	1
2	-1	1	-2	2
3	-1	2	-1	3

Determinar la estrategia óptima para cada jugador mediante la eliminación sucesiva de estrategias dominadas. Proporcionar una lista de estas estrategias dominadas (y la estrategia correspondiente) en el orden en que se pueden eliminar.

I/II	1	2	3	4
1	~~2~~	~~-3~~	~~-1~~	~~1~~
2	~~-1~~	~~1~~	~~-2~~	~~2~~
3	~~-1~~	~~2~~	-1	~~3~~

1. F2 es dominada por F3
2. C1 es dominada por C3
3. F1 es dominada por F3

4. C4 es dominada por C2
5. C2 es dominada por C3

El jugador 2 elige la estrategia 3 y el jugador 2 elige la estrategia 3, el valor del juego es -1

Ejercicio N° 2- Encuentre el punto silla del juego que tiene matriz de pagos:

J_I/J_{II}	**1**	**2**	**3**	**4**	**Min**
1	3	-3	-2	-4	-4
2	-4	-2	-1	1	-4
3	1	-1	2	0	-1
Max	3	-1	2	1	

El valor MaxMin es -1, y el valor MinMax también es -1, por lo que el punto silla del juego es = -1.

Ejercicio N° 3- Resolver el juego que tiene la siguiente matriz de pagos:

I/II	1	2
1	3	-2
2	-1	2

En primer lugar, planteo el criterio mínimax:

I/II	1	2	mínimos
1	3	-2	-2
2	-1	2	**-1=Maxmin**
máximos	3	**2=minMax**	

Se observa que $\bar{v} \neq \underline{v}$ por lo tanto hay que buscar el punto de equilibrio del juego con estrategias mixtas.

I/II		1	2
	Proba.	Y1	Y2
1	X1	3	-2
2	X2	-1	2

Cuando el Jugador II juega la estrategia 1, es decir opta por su estrategia mixta (1,0), el pago esperado para el Jugador I es:

$PE = x_1 \times 3 + x_2 \times (-1)$

De la misma forma cuando el Jugador II juega su estrategia 2, aplicando la estrategia mixta (0,1), se puede esperar un pago

$PE = x_1 \times (-2) + x_2 \times 2$

Cómo, por tratarse de probabilidades, $x_1 + x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 - x_1$

resulta que el pago esperado puede ponerse en función de x_1 haciendo:

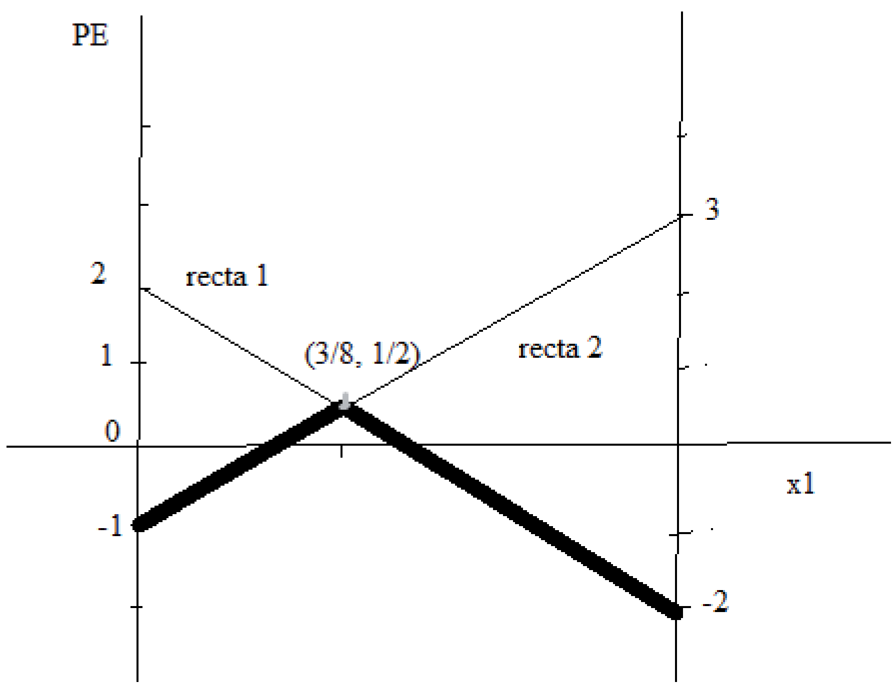
$PE = x_1 \times 3 + (1 - x_1) \times (-1) \Rightarrow PE = 4x_1 - 1 \quad recta\ 1$

$PE = x_1 \times (-2) + (1 - x_1) \times 2 \Rightarrow PE = -4x_1 + 2 \quad recta\ 2$

La matriz de pagos para el Jugador I puede ahora verse:

I/II	1	2
Estrategia mixta	$4x_1 - 1$	$-4x_1 + 2$

Según el criterio mínimax el Jugador I debe hallar el máximo de sus mínimos pagos. En la figura se muestran en negro los mínimos pagos esperados correspondientes y con un punto gris se señala el máximo.



El óptimo se produce en la intersección de las rectas 1 y 2. Se tiene:

$4x_1 - 1 = -4x_1 + 2$

$4x_1 + 4x_1 = 2 + 1$

$8x_1 = 3 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{8}$

El valor x_1 representa la probabilidad de que el Jugador I elija su estrategia 1. Se puede hallar también x_2, probabilidad de que el jugador I elija su estrategia 2

$x_2 = 1 - x_1$

$x_2 = 1 - \dfrac{3}{8}$

$x_2 = \dfrac{5}{8}$

y además con cualquiera de las rectas se puede calcular el valor óptimo de PE. Por ejemplo:

$PE = 4\dfrac{3}{8} - 1$

$PE = \frac{1}{2}$ Éste es entonces el valor v del juego

Para establecer el equilibrio el pago óptimo para el Jugador 2, surgido al calcular el mínimo de sus máximos pagos al Jugador I, también tendrá que ser igual al valor de PE. En fórmulas:

$\overline{v} = minMax = Maxmin = \underline{v} = v = PE = \frac{1}{2}$

Ahora resulta sencillo calcular la estrategia mixta para el Jugador II. En efecto, suponiendo que el Jugador I elige sus estrategias mixtas (1,0) y (0,1) se obtienen las ecuaciones:

$PE = y_1 \times 3 + y_2 \times (-2)$

$PE = y_1 \times (-1) + y_2 \times 2$

Además como $y_1 + y_2 = 1$ resulta $y_2 = (1 - y_1)$ y entonces:

$PE = -y_1 + (1 - y_1) \times 2$

$PE = -y_1 + 2 - 2y_1$

$PE = -3y_1 + 2$

Se tiene aquí: $1/2 = -3y_1 + 2$ con lo cual $y_1 = \frac{1}{2}$ y también $y_2 = 1 - \frac{1}{2} = 1/2$

El juego ha quedado entonces resuelto siendo (3/8, 5/8) la estrategia mixta del Jugador I, (1/2, 1/2) la del Jugador II y el pago esperado PE=1/2

Ejercicios propuestos

Ejercicio N° 4- Para cada una de las siguientes matrices de pago determinar la estrategia óptima para cada jugador eliminando sucesivamente las estrategias dominadas. (Indicar el orden en el que se eliminaron).

a)

I / II	1	2	3
1	-3	1	2
2	1	2	1
3	1	0	-2

b)

I / II	1	2	3
1	1	2	0
2	2	-3	-2
3	0	3	-1

Ejercicio N° 5- Encontrar el punto silla del juego que tiene matriz de pagos:

I / II	1	2	3
1	1	-1	1
2	-2	0	3
3	3	1	2

Ejercicio N° 6- Dos compañías comparten el grueso del mercado para cierto tipo de producto. Cada una está haciendo nuevos planes de comercialización para el próximo año con la intención de arrebatar parte de las ventas de la otra compañía. (Las ventas totales del producto son más o menos fijas, por lo que una compañía puede incrementar sus ventas solo si disminuyen las de la otra). Cada una está considerando tres posibilidades: 1) un mejor empacado del producto, 2) un aumento en la publicidad y 3) una pequeña reducción en el precio. Los costos de las tres opciones son comparables y lo suficientemente grandes como para que cada compañía elija solo una. El efecto de cada combinación de alternativas sobre el porcentaje aumentado de las ventas para la compañía 1 es:

I / II	1	2	3
1	2	3	1
2	1	4	0
3	3	-2	-1

Cada compañía debe hacer su elección antes de conocer la decisión de la otra compañía.

a) Sin eliminar las estrategias dominadas utilice el criterio mínimas para determinar la mejor estrategia para cada parte.

b) Identifique y elimine las estrategias dominadas hasta donde sea posible. Haga una lista de las estrategias dominadas que muestre el orden en el que se pudieron eliminar. Después elabore la matriz de pagos reducida que resulta cuando ya no quedan estrategias dominadas.

Ejercicio N° 7- El sindicato y la gerencia de una compañía negocian el nuevo contrato colectivo. Las negociaciones están congeladas pues la gerencia hace una oferta “final” de un aumento de 1.10 $/hora y el sindicato hace una demanda “final” de un aumento de 1.60 $/hora. Ambos han acordado que un árbitro imparcial establezca el aumento en alguna cantidad entre 1.10$/hora y 1.60$/hora (inclusive). El arbitraje ha pedido a cada lado que presente una propuesta confidencial de un aumento salarial económicamente razonable y justo redondeado a los 10 centavos más cercanos. Por experiencias anteriores ambos lados saben que el arbitraje casi siempre acepta la propuesta que le convenga mas al lado que mas cede respecto de su cantidad “final”. Si ningún lado cambia su cantidad final o si ambos ceden en la misma cantidad, el arbitraje suele establecer la cifra en la mitad (1.35$/hora en este caso). Ahora cada lado necesita determinar que aumento proponer para obtener un beneficio máximo.

a) Formule este problema como un juego de dos jugadores de suma 0.
b) Utilice el concepto de estrategias dominadas para determinar la mejor estrategia para cada lado.
c) Sin eliminar estrategias dominadas utilice el criterio mínimas para determinar la mejor estrategia para cada lado.

Ejercicio N° 8- Dos jugadores juegan lo siguiente: en simultáneo muestran uno o dos dedos. Si las cantidades de dedos coinciden el jugador 1 gana 1$ si no es el jugador 2 el que gana $1. Resolver el juego analítica y gráficamente.

Ejercicio N° 9- Considere el juego que tiene la siguiente matriz de pago:

I/II	1	2
1	3	-2
2	-1	2

Resolver el juego en forma gráfica y analítica.

Ejercicio N° 9- Dos empresas compiten con un mismo producto en el mercado que monopolizan. Actualmente están diseñando sus campañas de publicidad en radio y televisión para el próximo verano. Según los estudios de marketing, las porciones de mercado que le ganarían a su competidor si anuncian en radio y/o televisión, considerando la perspectiva de la empresa A están dadas, en porcentajes, en la siguiente tabla:

Estrategia	Publicidad en TV	Publicidad en Radio
Publicidad en TV	2	1
Publicidad en Radio	-1	3

Se desea establecer la estrategia de publicidad que optimice la porción de mercado a ganar y cual es ésta.

Ejercicio N° 10- Resolver el juego dado por la matriz de pagos:

JugadorI/Jugador II	1	2	3
1	1	-2	0
2	-1	3	-2
3	0	-3	0

Ejercicio N° 11- Resolver el siguiente juego.

Estrategias	1	2	3
1	3	-3	0
2	5	7	2
3	9	1	-1

Ejercicio N° 12- Dos empresas compiten por un mercado con tres estrategias posibles de publicidad que por razones de costos no pueden combinar entre sí. Deben elegir entonces una opción entre hacer publicidad por radio, por televisión o por afiches callejeros. El resultado en porcentaje de mercado que ganaría o perdería la empresa A en cada cruce de estrategias ha sido establecido en la matriz de pagos

Empresa B

Empresa A

	Radio	TV	Afiches
Radio	2	-5	3
TV	3	0	5
Afiches	-1	-2	0

Determinar la estrategia óptima para cada empresa y el porcentaje de mercado que variará para cada una luego de la publicidad elegida.

Ejercicio N° 13- Resolver el juego cuya matriz de pagos es:

JugI/JugII	Estrategia 1	Estrategia 2	Estrategia 3
Estrategia 1	-1	2	5
Estrategia 2	2	-1	4

Ejercicio N° 14- Una empresa de transporte de cargas realiza su servicio entre la Ciudad de Buenos Aires y la de Mendoza. Dispone de dos caminos alternativos: la ruta 7 directamente o la ruta 8 que pasa por Río Cuarto en Córdoba y empalma con la 7 en Villa Mercedes, San Luís. Si bien la empresa cumple con las reglamentaciones vigentes trata de evitar los controles de carga que efectúa la Dirección Nacional de Transporte pues esto le implica costos por demoras que se evalúan en $1000 por control. La Dirección Nacional de Transporte tiene personal limitado para los controles así que ha decidido optar entre dos políticas: colocar su puesto de control en una sola ruta en cuyo caso hay seguridad de que un camión será controlado si va por esa ruta, o partir a la mitad su personal colocando un puesto en cada ruta, pero en ese caso teniendo una probabilidad 0.5 de controlar el camión si este va por ruta 7 y otra probabilidad 0.3 de controlarlo si este va por ruta 8. Se desea establecer entonces la estrategia óptima de elección de ruta y política de control para la empresa y la Dirección Nacional de Transporte.

Ejercicio N° 15- Dada la matriz de pagos siguiente, resolver por programación lineal para ambos jugadores.

	B1	B2	B3
A1	3	-1	-3
A2	-2	4	-1
A3	-5	-6	2