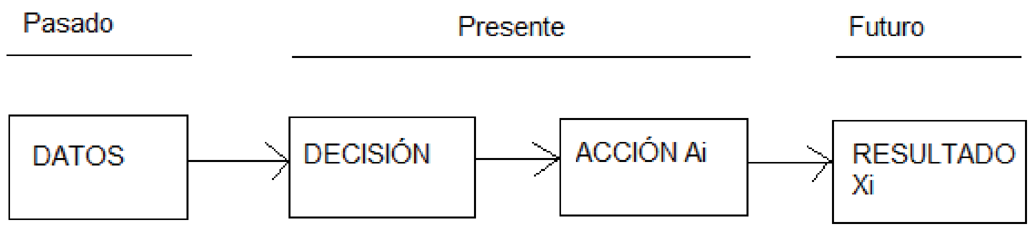
VII- Teoría de la Decisión

VII.1 Introducción

Por lo general tomar una decisión involucra un proceso en el tiempo. En el pasado seguramente se han recogido datos que actualmente son utilizados como información para decidir realizar una acción de entre varias posibles. Los resultados de la acción realizada se verán en el futuro. En la Gráfica 1 se presenta un esquema de lo antedicho.

Gráfica 1



Las distintas acciones posibles se denotan $A_1, A_2, \dots, A_n$. Por otra parte hay diferentes situaciones futuras $F_1, F_2, \dots, F_m$ en las cuales se darán los resultados X_{ij}. Es decir: X_{ij} es el resultado de la acción A_i en el futuro F_j.

Cada futuro puede interpretarse como un *"estado de la naturaleza"*. Si los futuros correspondiesen a las estrategias posibles de un oponente racional, el problema de tomar una decisión podría interpretarse como un juego de dos jugadores, pero el oponente "naturaleza" no suele seleccionar sus estrategias buscando un óptimo opuesto a la estrategia de quien decide, sino que se comporta más benignamente.

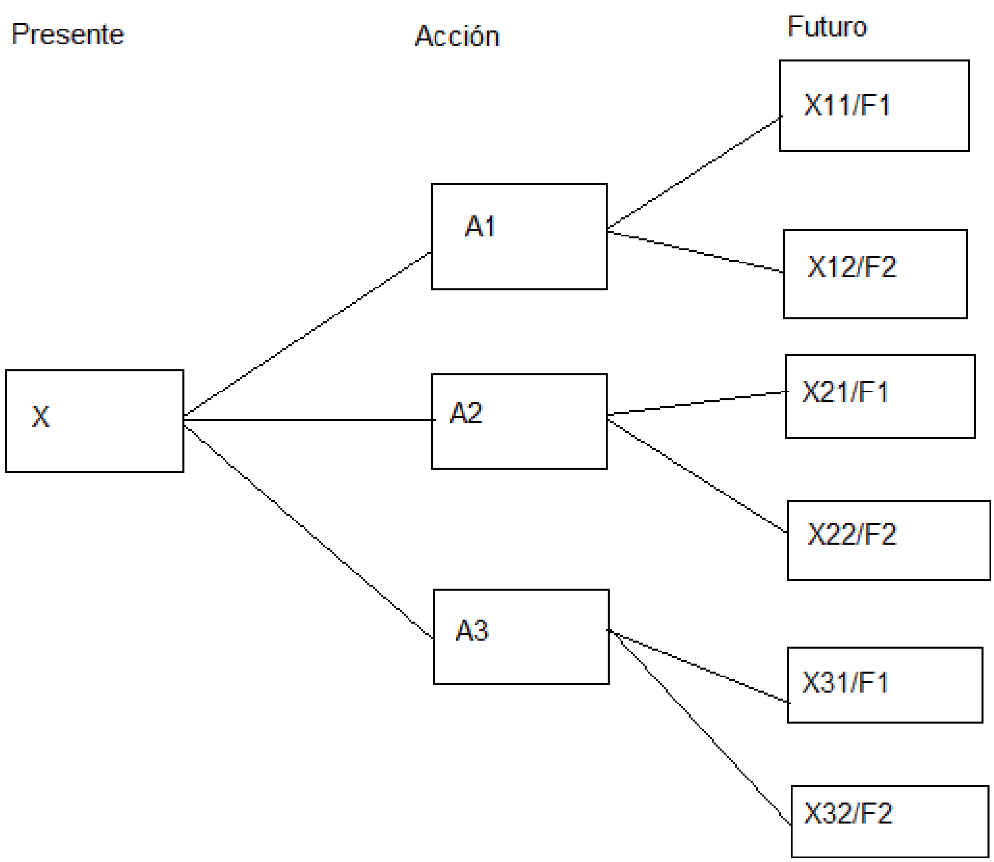
Veamos un ejemplo. En una fábrica se desea decidir si se compra maquinaria nueva (acción A_1), se reforma la maquinaria actualmente en uso (acción A_2) o se la sigue utilizando como está (acción A_3). Se sabe que en el futuro puede aumentar la demanda (futuro F_1) o puede no aumentar (futuro F_2). Claramente los resultados de cada una de las acciones posibles, en términos de ganancias, variarán de acuerdo a como se presente el futuro. Estas ganancias pueden estimarse y disponerse en una matriz de resultados como se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1

Acción/Futuro	F_1 Demanda aumentada	F_2 Demanda igual
A_1 Usar maquinaria nueva	X_{11}	X_{12}
A_2 Usar maquinaria reformada	X_{21}	X_{22}
A_3 Usar maquinaria actual	X_{31}	X_{32}

Las cantidades X_{ij} son las ganancias a obtener si se realiza la acción A_i cuando el futuro resulte F_j. La matriz de resultados puede diagramarse como un árbol de decisión según la Gráfica 2.

Gráfica 2



Cada futuro tiene una cierta probabilidad de ocurrencia. En este caso p_1 es la probabilidad del futuro p_1 y p_2 la probabilidad del futuro F_2 de forma tal que $p_1 + p_2 = 1$. Estas probabilidades forzosamente habrán de influir en la decisión según el criterio que se adopte para tomarla. En el presente problema ese criterio consistirá en buscar la máxima ganancia.

A partir de aquí se pueden identificar distintas condiciones bajo las que se produce la decisión.

i) *Certeza* Existe un único futuro posible F que se producirá con probabilidad $p = 1$

ii) *Riesgo* Existen varios futuros (estados de la naturaleza) posibles y sus probabilidades se conocen.

iii) *Incertidumbre* Existen varios futuros (estados de la naturaleza) posibles y sus probabilidades no se conocen.

VII.2 Decisión en condiciones de riesgo

Consideremos un nuevo ejemplo. Un agricultor puede sembrar trigo o maíz y tiene para los próximos meses estos posibles estados climáticos: tiempo bueno, tiempo variable o tiempo malo. Las ganancias X_{ij}, en cada situación posible, se dan en la Tabla 2 junto con las probabilidades conocidas de cada estado de la naturaleza.

Tabla 2

	F_1 Tiempo Bueno	F_2 Tiempo Variable	F_3 Tiempo Malo
A_1 Sembrar Trigo	2000 \$/ha	1000 \$/ha	500 \$/ha
A_2 Sembrar Maíz	4000 \$/ha	500 \$/ha	0 \$/ha
	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.5$	$p_3 = 0.2$

Conocidas las probabilidades de los estados del tiempo para los próximos meses nos encontramos en este problema con la necesidad de tomar una decisión en condiciones de *riesgo*. Es decir, no tenemos certezas de lo que habrá de ocurrir con el clima, pero conocemos el peso de sus distintas posibilidades. En esta situación, y acordado el criterio de buscar la máxima ganancia, se puede proceder obteniendo el resultado esperado de cada acción factible. Una vez hecho esto se elegirá la acción cuya expectativa de ganancia sea la mayor.

$$VE(A_1) = 2000x0.3 + 1000x0.5 + 500x0.2 = 1200\$/ha$$

$$VE(A_2) = 4000x0.3 + 500x0.5 + 0x0.2 = 1425\$/ha$$

De acuerdo a estos cálculos deberá elegirse la acción A_2 sembrar maíz.

Observaciones:

a) La idea detrás de este procedimiento es que si la decisión tuviera que tomarse muchas veces, por ejemplo todos los años, la tendencia central indicada por el valor esperado óptimo indicaría mayor ganancia total tomando la acción A_2.

b) Podría pasar, como ocurre en los juegos entre estrategias de un mismo jugador, que una acción dominara totalmente a la otra presentando para todos los futuros posibles mayores o iguales ganancias que otra.

c) Maximizar la ganancia podría hacer que el riesgo de pérdida aumentara. Supóngase al mismo agricultor, pero con los datos aportados por la Tabla 3

Tabla 3

	F_1 Tiempo Bueno	F_2 Tiempo Variable	F_3 Tiempo Malo
A_1 Sembrar Trigo	2000 $/ha	1000 $/ha	500 $/ha
A_2 Sembrar Maíz	6000 $/ha	0 $/ha	0 $/ha
	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.5$	$p_3 = 0.2$

Al utilizar el criterio del valor esperado:

$$VE(A_1) = 2000x0.3 + 1000x0.5 + 500x0.2 = 1200\$/ha$$

$$VE(A_2) = 6000x0.3 + 0x0.5 + 0x0.2 = 1800\$/ha$$

Corresponde entonces, según el criterio empleado, tomar la acción A_2. Sin embargo, debe quedarnos claro que corremos un fuerte riesgo de no tener ninguna ganancia si se presentasen los estados climáticos F_2 o F_2. Ese riesgo de no ganar o costo de oportunidad, puede ser apreciado utilizando la Teoría de la Utilidad que cae fuera de los límites de esta exposición introductoria.

VII.3 Decisión en condiciones de incertidumbre

Supongamos ahora un nuevo caso en el cual las probabilidades de los distintos estados de la naturaleza no se conocen y sin embargo debemos tomar una decisión. Consideremos que la Tabla 4 expresa los resultados de un cierto problema donde esto ocurre.

Tabla 4

	F_1	F_2	F_3	F_3
A_1	2	2	0	1
A_2	1	1	1	1
A_3	0	4	0	0
A_4	1	3	0	0

Ante la condición de *incertidumbre* provocada por el desconocimiento de las probabilidades de cada futuro F_j no puede usarse el criterio del valor esperado. Sin embargo, son varias las formas en que el problema puede abordarse.

Observación:

En lo que sigue se supone que un resultado es mejor cuanto mayor es. Sin embargo, en determinados problemas pudiera ser exactamente al revés. Por ejemplo si la matriz de la Tabla 4 se refiriera a costos está claro que de ejecutarse la acción A_3 un costo de 4 sería peor que un costo de 0. Esto sugiere que, en tales casos, los criterios que se exponen deben ajustarse *"mutatis mutandi"* (cambiando lo que hay que cambiar) para asegurar su efectividad.

i) Criterio de Laplace

También llamado criterio de racionalidad propone asignar a cada futuro F_j igual probabilidad p_j según el "principio de la razón insuficiente" que considera válida la suposición de equiprobabilidad ante la falta de otra información. Así una vez fijadas estas probabilidades se procede a buscar la acción que produzca el valor esperado óptimo. Para el problema considerado:

$$VE(A_1) = 2\times\frac{1}{4} + 2\times\frac{1}{4} + 0\times\frac{1}{4} + 1\times\frac{1}{4} = 1.25$$

$$VE(A_2) = 1\times\frac{1}{4} + 1\times\frac{1}{4} + 1\times\frac{1}{4} + 1\times\frac{1}{4} = 1$$

$$VE(A_3) = 0\times\frac{1}{4} + 4\times\frac{1}{4} + 0\times\frac{1}{4} + 0\times\frac{1}{4} = 1$$

$$VE(A_4) = 1\times\frac{1}{4} + 3\times\frac{1}{4} + 0\times\frac{1}{4} + 0\times\frac{1}{4} = 1$$

Según el criterio de Laplace la decisión debe consistir entonces en ejecutar la acción A_1.

Observación:

Si las acciones posibles fueran las mismas y los futuros se considerasen en forma diferente, agrupándolos o separándolos de alguna manera, pudiera ocurrir que el criterio de Laplace condujera a una decisión distinta al dividir la probabilidad total en partes iguales.

ii) Criterio de Wald

Enfoca el problema de decidir con pesimismo. Así analiza, en el supuesto de realizar la acción A_i, cuál sería el peor resultado posible y luego de realizar esto para todas las acciones en consideración, selecciona la mejor de las peores cantidades halladas. En términos matemáticos lo que hace es calcular el resultado $VW = \underset{i}{\mathrm{Max}}\,\underset{j}{\min} X_{ij}$ y elegir la acción A_i que lo produce. Para el problema ejemplo analizado se tiene la Tabla 7.5

Tabla 7.5

Acción	Peor Resultado
A_1	0
A_2	1
A_3	0
A_4	0

$$VW = \underset{i}{\mathrm{Max}}\,\underset{j}{\min} X_{ij} = 1$$

Al seguir este criterio se debe decidir realizar la acción A_2. De paso obsérvese que si la matriz expresara costos se debiera calcular $VW = \min_i \mathrm{Max}_j X_{ij} = 1$ correspondiendo entonces ejecutar también, en este particular caso, la acción A_2.

iii) Criterio de Hurwicz

Propone seleccionar un coeficiente de optimismo α en el rango $0 \leq \alpha \leq 1$. Luego para cada acción A_i se calcula la cantidad

$$H_i = \alpha \times \mathrm{Max}_j(X_{ij}) + (1-\alpha) \times \min_j X_{ij}$$

Se selecciona la acción A_i que corresponda al mejor valor H_i. Por ejemplo si $\alpha = 0.6$ para el ejemplo analizado se tiene

$$H_1 = 0.6 \times 2 + 0.4 \times 0 = 1.2$$
$$H_2 = 0.6 \times 1 + 0.4 \times 1 = 1$$
$$H_3 = 0.6 \times 4 + 0.4 \times 0 = 2.4$$
$$H_4 = 0.6 \times 3 + 0.4 \times 0 = 1.8$$

Como consecuencia la acción a tomar según este criterio es A_3

Observaciones:

a) Un valor $\alpha = 0$ conduciría a elegir para cada acción A_i su peor resultado y si se tomara entonces el mejor valor de H_i este coincidiría con VW del criterio de Walt. Si por el contrario se eligiera $\alpha = 0$ para cada acción A_i se elegiría su mejor resultado y luego, de entre ellos, el mejor colocándose así en una posición de extremo optimismo.

b) La cuestión es entonces establecer el valor de α de una manera adecuada al criterio de optimismo con el que quiera decidirse. Una técnica que puede emplearse para determinar ese valor es proponer a quien toma la decisión que establezca para que valor de *X* entre 0 y 1 le es indiferente cuál de las acciones A_1 ó A_2, de la matriz de resultados de la Tabla 6, se elija.

Tabla 6

	F_1	F_2
A_1	0	1
A_2	X	X

Es claro que:

$$H_1 = \alpha \times 1 + (1-\alpha) \times 0 = \alpha$$

$$H_2 = \alpha \times X + (1-\alpha) \times X = X$$

Como para que cualquiera de las decisiones A_1 ó A_2 dé lo mismo debe ocurrir $H_1 = H_2$, en ese caso resultará $\alpha = X$. En esta circunstancia a quien decide le da lo mismo ganar X, hecho que logrará independientemente de cual sea el futuro si elige la acción A_2, que tener una ganancia que pueda ser 0 o 1 si realiza la acción A_1

iv) Criterio de Savage

Este enfoque es muy distinto a los anteriores y se basa en la cuantificación del *"lamento"* por no haber decidido una acción A_i cuando ya se sabe que ha ocurrido en el futuro. Si de antemano se hubiera conocido cual futuro habría de darse, en ese estado natural hubiera habido alguna acción que efectivamente diera la mayor ganancia; de tal modo, si se ha decidido por otra alternativa, habrá una diferencia entre lo que se ganó y lo que pudo ganarse que es la cantidad que se "lamenta" no haber obtenido. Este "lamento" se denomina más propiamente costo de oportunidad. En el problema que se analiza para cada una de las acciones posibles los eventuales "lamentos" son los de la Tabla 7

Tabla 7

	F_1	F_2	F_3	F_3
A_1	0	2	1	0
A_2	1	3	0	0
A_3	2	0	1	1
A_4	1	1	1	1

Una vez obtenidas estas cantidades que forman la llamada matriz de costos de oportunidad se procede a calcular para cada acción A_i el máximo costo. De esta forma surge la Tabla 8

Tabla 8

Acción	Máximo Costo de Oportunidad
A_1	2
A_2	3
A_3	2
A_4	1

Finalmente se decide entonces por la acción que garantice el menor "lamento", en este caso A_4

La exposición efectuada hasta aquí muestra claramente que la acción a realizar en un mismo problema de decisión puede ser distinta según el criterio que se adopte para elegirla.

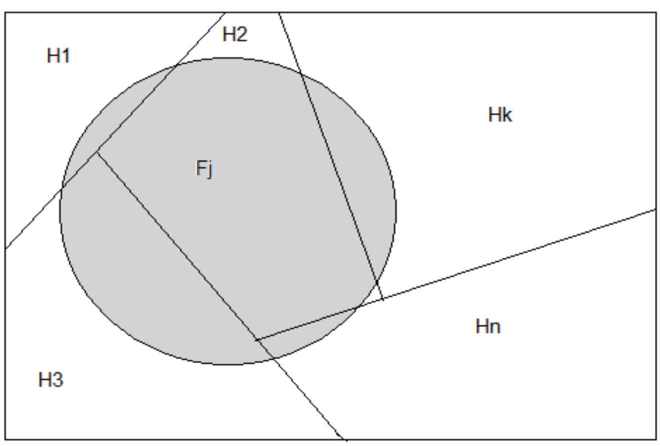
Al respecto sólo cabe comentar que aun siendo *"racionales"* todos los criterios enunciados, la adopción de uno u otro dependerá de las características singulares del problema en cuanto a posibilidades, apreciaciones subjetivas y riesgos que puedan o quieran enfrentarse.

VII.4 Enfoque Bayesiano de la Decisión

Una forma de ajustar el proceso decisorio reduciendo la incertidumbre es establecer, al menos en forma subjetiva, una probabilidad para la ocurrencia de cada "estado de la naturaleza". Esto significa, por ejemplo, que una o varias personas experimentadas en el dominio de estudio establecen un consenso sobre las posibilidades que se dé efectivamente cada futuro. Se estaría entonces en la condición de decisión bajo riesgo que se analizó en VII.2, solo que las probabilidades de cada futuro pudieran no estar basadas en datos fehacientes sino en apreciaciones un tanto intuitivas de quienes conocen el dominio. En este contexto si las probabilidades pudieran objetivizarse un poco más, recurriendo a algunos análisis y pruebas estadísticas, esto redundaría en una decisión más precisa. Tal cosa puede hacerse, y efectivamente en muchos casos se realiza, basándose en consideraciones de probabilidad bayesiana.

La probabilidad de un hecho $H_k$condicionado a la ocurrencia real de un futuro F_j se calcula por $P(H_k|F_j) = \frac{P(H_k \cap F_j)}{P(F_j)}$. En la Gráfica 3 la zona sombreada muestra como distintos hechos se presentan conjuntamente con el futuro F_j , mientras la zona no sombreada representa la ocurrencia de esos mismos hechos en futuros distintos.

Gráfica 3



Al utilizar la fórmula de Bayes, la probabilidad de un futuro F_j "a posteriori" de cada hecho constatado H_k se calcula

$$P(F_j|H_k) = \frac{P(H_k|F_j)P(F_j)}{P(H_1|F_j)P(F_j) + \cdots P(H_k|F_j)P(F_j) + \cdots P(H_n|F_j)P(F_j)}$$

De esta forma se pueden obtener las probabilidades de cada "estado de la naturaleza" cuando ocurre cada hecho. Esto representa una corrección realizada sobre las probabilidades de cada futuro que fueron establecidas de antemano ya fuera en forma subjetiva o con información más incompleta. Una vez halladas estas probabilidades "a posteriori" es posible calcular con ellas, en forma más ajustada, el valor esperado de cada acción y optimizar entonces la decisión. Veamos un ejemplo.

El problema del agricultor planteado en XI.2 contaba con las ganancias y probabilidades "a priori" que se recuerdan en la Tabla 9.

Tabla 9

	F_1 Tiempo Bueno	F_2 Tiempo Variable	F_3 Tiempo Malo
A_1 Sembrar Trigo	2000 \$/ha	1000 \$/ha	500 \$/ha
A_2 Sembrar Maíz	4000 \$/ha	500 \$/ha	0 \$/ha
	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.5$	$p_3 = 0.2$

Supongamos que para resolver el problema se encargue un estudio sobre la existencia de subsidios a la producción. Este estudio tiene un costo de \$100 por cada hectárea sembrada y arroja los siguientes datos expresados en la Tabla 10

Tabla 10

$P(H_k \mid F_j)$	F_1 Tiempo Bueno	F_2 Tiempo Variable	F_3 Tiempo Malo
H_1 Subsidio Total	0	1/6	2/6
H_2 Medio Subsidio	1/6	2/6	3/6
H_3 Sin Subsidio	5/6	3/6	1/6

Cada celda de la tabla contiene la probabilidad $P(H_k \mid F_j)$ de obtener un tipo de subsidio cuando ocurre cada futuro. Claramente, cuando se anuncia un hecho, por ejemplo , H_2 existencia de medio subsidio, hay que tomar una decisión sobre si sembrar trigo (acciónA_1) o maíz (acción A_2). Para ello se arma la Tabla 11 en la cual cada celda contiene la probabilidad corregida de cada futuro cuando se produce cada tipo de subsidio $P(F_j \mid H_k)$ Cada uno de los futuros posibles tiene ahora una probabilidad "a posteriori" de cada hecho que se calcula al utilizar la fórmula de Bayes. Por ejemplo:

$$\mathrm{P}(\mathrm{F}_1|\mathrm{H}_1) = \frac{0 \times 0.3}{0 \times 0.3 + \frac{1}{6} \times 0.5 + \frac{2}{6} \times 0.2} = 0$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{F}_2|\mathrm{H}_1) = \frac{\frac{1}{6} \times 0.5}{0 \times 0.3 + \frac{1}{6} \times 0.5 + \frac{2}{6} \times 0.2} = 0.56$$

$$P(F_2|H_1) = \frac{\frac{2}{6} \times 0.2}{0 \times 0.3 + \frac{1}{6} \times 0.5 + \frac{2}{6} \times 0.2} = 0.44$$

Tabla 11

$P(F_j \vert H_k)$	F_1 Tiempo Bueno	F_2 Tiempo Variable	F_3 Tiempo Malo
H_1 Subsidio Total	0	0.56	0.44
H_2 Medio Subsidio	0.158	0.526	0.316
H_3 Sin Subsidio	0.469	0.469	0.062

Al conocerse si va a haber subsidio completo, parcial o no va a haberlo, las nuevas probabilidades halladas permiten establecer una regla de decisión ajustada a esa información adicional que se solicitó. Por ejemplo, si hubiera subsidio total habría que tener en cuenta las probabilidades de "estado de la naturaleza" dadas en el primer renglón de la Tabla 11. De acuerdo a ella los valores esperados de ganancias según se siembre trigo o maíz son:

$$VE(A_1) = 2000x0 + 1000x0.56 + 500x0.44 - 100 = 670\$/ha$$

$$VE(A_2) = 4000 \times 0 + 500 \times 0.56 + 0 \times 0.44 - 100 = 175\$/ha$$

Al restar \$100 en cada cálculo del valor esperado, se está teniendo en cuenta el costo por hectárea del estudio realizado. Los resultados obtenidos determinan entonces que si hay subsidio lo más conveniente resulta sembrar trigo (A_1). Al calcular los valores esperados relacionados con la ocurrencia de cada uno de los escenarios H_k posibles se obtiene la siguiente regla de decisión:

$$d(H_1) = A_1$$

$$d(H_2) = A_1$$

$$d(H_3) = A_2$$

Es decir que según el criterio del valor esperado calculado aplicando las probabilidades "a posteriori", si el agricultor sabe que va a haber subsidio total o medio subsidio le conviene más sembrar trigo, mientras que si no va a haberlo le resulta mejor sembrar maíz.

VII.5 Valor de la Información

i) Valor de la información completa

Se puede medir el valor de la información al decidir. Para esto se parte del concepto de *información completa* que consiste en conocer efectivamente cual futuro habrá de presentarse en cada oportunidad en que deba decidirse. De acuerdo a ello, suponiendo que cada futuro habrá de darse en la proporción de veces que indica su probabilidad de ocurrencia, se define la ganancia esperada con información completa (GIC) como la suma de los productos de los mejores resultados en cada futuro por las probabilidades de ocurrencia de esos futuros. Para nuestro ejemplo resumido en la Tabla 9 se tiene:

$$GIC = 4000 \times 0.3 + 1000 \times 0.5 + 500 \times 0.2 = 1800\$/ha$$

Por otra parte la decisión bajo condición de riesgo implica realizar la acción $A_i$cuya ganancia esperada $VE(A_i)$ resulte mayor.

$$VE(A_2) = 4000 \times 0.3 + 500 \times 0.5 + 0 \times 0.2 = 1425\$/ha$$

De tal forma el valor de contar con la información completa VIC resulta la diferencia entre la ganancia esperada con información completa y el valor esperado óptimo. Así resulta:

$$VIC = 1800 - 1425 = 375\$/ha$$

Esto significa que por la información completa acerca del clima, es decir por saber exactamente que va a ocurrir con él, podrían pagarse hasta 375$/ha.

ii) Valor de la información adicional

Hemos visto además que es posible atenuar el riesgo utilizando información adicional por medio de estudios que actualicen las probabilidades de cada futuro según los hechos que se presenten ¿Hasta cuanto tendrá sentido pagar por estudios de este tipo?

Hay que tener en cuenta que según cada hecho que efectivamente se dé, habrá una acción que produzca el mejor valor esperado con lo cual la ganancia promedio que produzca la regla de decisión adoptada se calculará como la suma de los productos del mejor valor esperado para cada hecho por la probabilidad de que ese hecho se presente. En el ejemplo del agricultor si se presenta el hecho H_1, otorgamiento de subsidio completo, el valor esperado de la acción decidida según la regla d, sin restarle el costo de la información sería:

$$VE(A_1) = 2000 \times 0 + 1000 \times 0.56 + 500 \times 0.44 = 770\$/ha$$

De forma similar si ocurre el hecho H_2, medio subsidio, la acción elegida por la regla será A_1 con valor esperado

$$VE(A_1) = 2000 \times 0.158 + 1000 \times 0.526 + 500 \times 0.316 = 900\$/ha$$

Finalmente si no hay subsidio, hecho H_3 , la acción A_2 decidida tiene valor esperado

$$VE(A_2) = 4000 \times 0.469 + 500 \times 0.469 + 0 \times 0.063 = 2110.5\$/ha$$

Obsérvese que se han calculado los valores esperados óptimos ante cada hecho utilizando la probabilidad “a posteriori” de cada futuro dada por la Tabla 11.

De acuerdo a lo expuesto la ganancia media producida por la regla d, que tiene en cuenta la información adicional, resulta

$$GIA(d) = 770 \times P(H_1) + 900 \times P(H_2) + 2110.5 \times P(H_3)$$

Las probabilidades de cada uno de los hechos H_k pueden calcularse a partir de las obtenidas en la Tabla 10 al tener en cuenta que por definición de probabilidad condicional

$$P(H_k|F_j) = \frac{P(H_k \cap F_j)}{P(F_j)} \quad \text{y luego} \quad P(H_k|F_j)P(F_j) = P(H_k \cap F_j)$$

Entonces la probabilidad de cada hecho H_k se obtendrá como la suma de las probabilidades conjuntas con cada futuro F_j

$$P(H_k) = \sum_j P(H_k \cap F_j)$$

En el ejemplo que estamos analizando se tienen las probabilidades "a priori" $P(F_j)$ de cada futuro dadas en la Tabla 2 y las probabilidades $P\left(H_k \middle| F_j\right)$ de cada hecho condicionado a cada futuro en la Tabla 10. Entonces

$$P(H_1) = 0 \times 0.3 + \frac{1}{6} \times 0.5 + \frac{2}{6} \times 0.2 = 0.15$$

$$P(H_2) = \frac{1}{6} \times 0.3 + \frac{2}{6} \times 0.5 + \frac{3}{6} \times 0.2 = 0..317$$

$$P(H_3) = \frac{5}{6} \times 0.3 + \frac{3}{6} \times 0.5 + \frac{1}{6} \times 0.2 = 0.533$$

Luego calculamos la ganancia media con información adicional

$$GIA(d) = 770 \times 0.15 + 900 \times 0.317 + 2110.5 \times 0.533 = 1525.70\$/ha$$

Como la decisión en condiciones de riesgo, tomada al conocer solo las probabilidades "a priori" de cada futuro, tenía una ganancia esperada de 1425\$/ha que se obtenía como resultado de elegir la acción A_2, se ve que el efecto de la información adicional permite una ganancia esperada mayor. En general, lo que se podría llegar a pagar por la información adicional sería la resta entre la ganancia esperada con ella y la ganancia esperada si no se la considera. En nuestro caso el valor de la información adicional es entonces

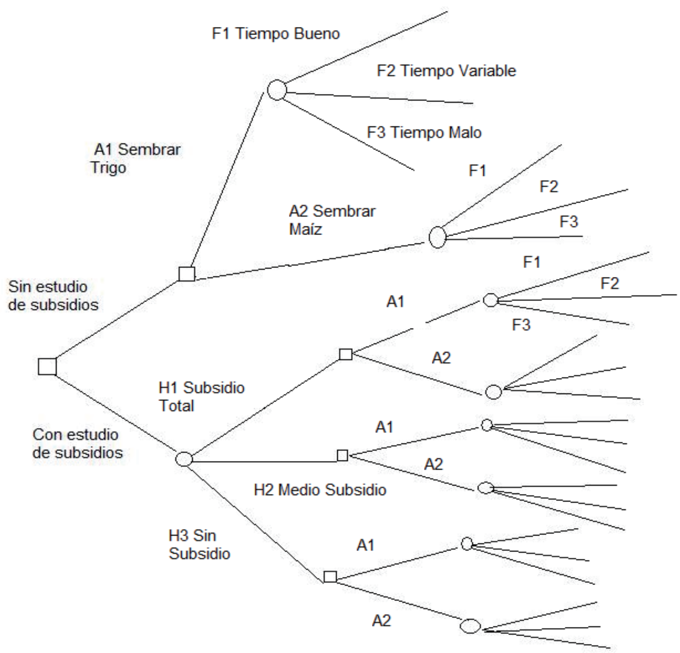
$$VIA = 1525.7 - 1425 = 100.7\$/ha$$

con lo cual el precio pagado efectivamente, de \$100 por hectárea, es casi el máximo que tenía sentido pagar.

VII.6 Árboles de Decisión

El enfoque bayesiano de la decisión puede expresarse en forma gráfica a través de un *árbol de decisión*. Este consiste en un esquema que ordena cronológicamente las alternativas posibles basándose en nodos que pueden simbolizar puntos de decisión o puntos de bifurcación de acuerdo a probabilidades. Es de práctica señalar los nodos de decisión con cuadrados y los de probabilidad con círculos. Al unir los nodos por ramas se despliega el árbol que tiene en cuenta la precedencia de los eventos. Para nuestro ejemplo del agricultor el árbol es el de la Gráfica 4

Gráfica 4



La cuestión es que mientras en los nodos de decisión la elección de la rama a seguir la realiza quien decide, en los nodos de probabilidad esa elección está librada al azar que marca la respectiva distribución. Tomar la decisión óptima involucra entonces realizar las cuentas que se efectuaron en VII.4 considerando las esperanzas matemáticas necesarias. Por ejemplo, la ganancia esperada al decidir la acción A_1 cuando se ha presentado el hecho H_1 es, como vimos antes,

$$VE(A_1) = 2000 \times 0 + 1000 \times 0.56 + 500 \times 0.44 = 770\$ / ha$$

Para calcular esta ganancia media se han utilizado las probabilidades "a posteriori" de cada futuro. Por otra parte la ganancia esperada al decidir la acción A_2 luego del mismo hecho H_1 es:

$$VE(A_2) = 4000 \times 0 + 500 \times 0.56 + 0 \times 0.44 = 275\$ / ha$$

Esto implica que situado en el nodo de decisión correspondiente la rama del árbol que representa la acción A_2 debe descartarse. Al ir desde ese nodo, de color negro en la Gráfica 5, hacia la raíz, se llega al nodo anterior que es de probabilidad lo que implica que allí no hay decisión posible. Esto lleva a considerar las ramas que, saliendo de tal nodo, representan el otorgamiento de medio subsidio H_2 o la inexistencia del mismo H_3 y luego, en cada una de ellas las ganancias esperadas respectivas. Así podrán eliminarse otras ramas del árbol por no resultar óptimas.

Cuando se explora hacia atrás el árbol desde el nodo de probabilidad de los hechos posibles, se llega a la raíz que es un nodo de decisión. La ganancia esperada cuando se cuenta con la información adicional sobre las probabilidades de subsidios ya fue calculada y resultó:

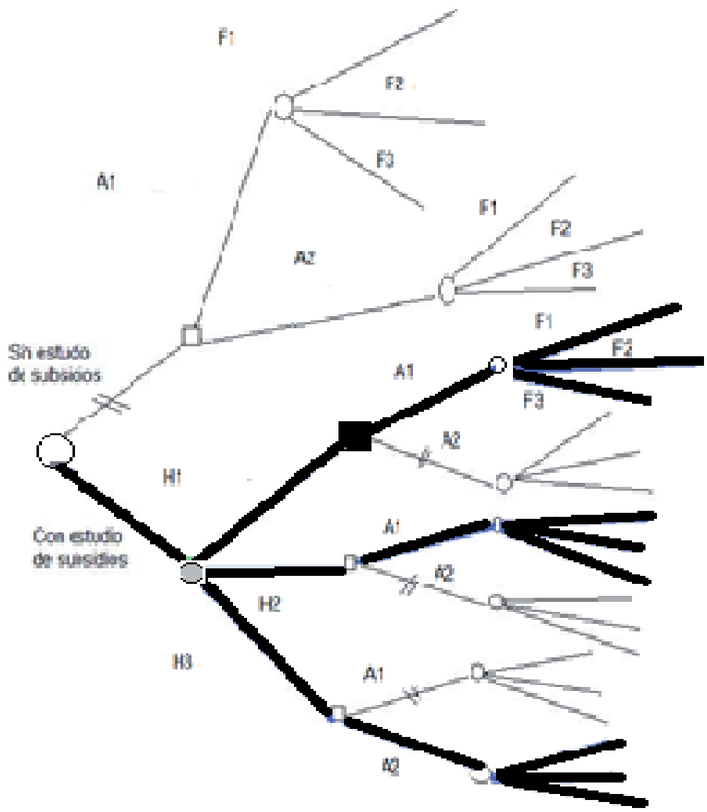
$$GIA(d) = 770 \times 0.15 + 900 \times 0.317 + 2110.5 \times 0.533 = 1525.70\$/ha$$

Como en el presente nodo hay que decidir, ya que es precisamente un nodo de decisión, es necesario comparar esta cantidad con la que debiera esperarse si no se contara con información sobre los subsidios. Como ya se vio en 2-, tal ganancia esperada es consecuencia de tomar la acción A_2 y resulta:

$$VE(A_2) = 4000x0.3 + 500x0.5 + 0x0.2 = 1425\$/ha$$

La comparación indica que en el árbol de decisión debe descartarse la rama que no incorpora información adicional. Finalmente, entonces quedan en pie, como regla de decisión óptima, todas las ramas que, partiendo de la raíz, señalada en negro en la Gráfica 5, proporcionan la mejor ganancia esperada.

Gráfica 5



En realidad, la identificación de tales trayectorias requiere los cálculos para cada rama, desde la raíz a las hojas, lo que aquí ha podido simplificarse en base a las cuentas desarrolladas en los anteriores apartados, que permitieron ilustrar el método gráfico, conociendo de antemano la solución.

VII.7 Decisión en Condiciones de Certidumbre

Cuando existe certidumbre sobre el futuro, es decir cuando un determinado futuro tiene probabilidad 1, solo hay que considerar la decisión óptima en ese caso. Para esto se pueden aplicar distintos modelos según las propiedades del sistema que se desee optimizar.

El modelo de programación lineal ya considerado o los diferentes modelos de inventario analizados son ejemplos de ello.

Ejercicios resueltos

Ejercicio N° 1- Los directivos de una empresa deben escoger entre 3 fondos de inversión para colocar un millón de pesos. El departamento de evaluación ha estimado la recuperación esperada en 1 año basándose en tres opciones: un desempeño pobre, moderado o excelente del índice Merval lo que se refleja en la siguiente tabla:

Inversión / Desempeño del Merval	Pobre	Moderada	Excelente
Fondo 1	$50.000	$75.000	$100.000
Fondo 2	$25.000	$50.000	$150.000
Fondo 3	$40.000	$60.000	$175.000
Probabilidad	0,2	0,6	0,2

$$VE(F1) = \$50.000 * 0{,}2 + \$75.000 * 0{,}6 + \$100.000 * 0{,}2 = \$75.000$$

$$VE(F2) = \$25.000 * 0{,}2 + \$50.000 * 0{,}6 + \$150.000 * 0{,}2 = \$65.000$$

$$VE(F3) = \$40.000 * 0{,}2 + \$60.000 * 0{,}6 + \$175.000 * 0{,}2 = \$79.000$$

Se debe elegir el Fondo 3 ya que es el que obtiene mayor valor esperado ($79.000)

Ejercicio N° 2- . Dados los datos del Ejercicio N° 1 se ha ordenado un estudio sobre las probabilidades de dos escenarios económicos distintos cuando se produjeran los desempeños indicados. Esa información se dispuso en la siguiente tabla:

	Pobre	Moderada	Excelente
Baja Inflación	1/2	1/4	1/4
Alta Inflación	1/2	3/4	3/4

Se pretende establecer una regla de decisión que tenga en cuenta esta información.

La información que aporta la tabla se refiere a la probabilidad de un escenario, baja o alta inflación, condicionada a la ocurrencia de uno de los tres futuros posibles: rendimiento pobre, moderado o excelente. Con ella podemos calcular entonces la probabilidad de cada futuro según el escenario que se dé. Es decir:

$$P((BI|Pobre) = \frac{P(BI \cap Pobre)}{P(Pobre)}$$
$$P((BI|Pobre)P(Pobre) = P(BI \cap Pobre)$$
$$P(BI \cap Pobre) = \frac{1}{2} \times 0.2 = 0.1$$
Así también:
$P(BI \cap Moderada) = \frac{1}{4} \times 0.6 = 0.15$ y $P(BI \cap Excelente) = \frac{1}{4} \times 0.2 = 0.05$
Entonces $P(BI) = 0.1 + 0.15 + 0.05 = 0.30$ y luego:
$$P(Pobre|BI) = \frac{0.1}{0.3} = 0.33$$
$$P(Moderada|BI) = \frac{0.15}{0.3} = 0.5$$
$$P(Excelente|BI) = \frac{0.05}{0.3} = 0.17$$
De similar forma se calcula
$$P((Pobre|AI) = \frac{\frac{1}{2} \times 0,2}{\frac{1}{2} \times 0,2 + \frac{3}{4} \times 0,6 + \frac{3}{4} \times 0,2} = 0.14$$
$$P((Moderada|AI) = \frac{\frac{3}{4} \times 0,6}{\frac{1}{2} \times 0,2 + \frac{3}{4} \times 0,6 + \frac{3}{4} \times 0,2} = 0.64$$
$$P((Excelente|AI) = \frac{\frac{3}{4} \times 0,2}{\frac{1}{2} \times 0,2 + \frac{3}{4} \times 0,6 + \frac{3}{4} \times 0,2} = 0.21$$

	Pobre	Moderada	Excelente
Baja Inflación	0.33	0.5	0.17
Alta Inflación	0.14	0.64	0.21

Escenario de Baja Inflación:
$$VE(F1) = \$50.000 * \frac{1}{3} + \$75.000 * \frac{1}{2} + \$100.000 * \frac{1}{6} = \$70.833,33$$
$$VE(F2) = \$25.000 * \frac{1}{3} + \$50.000 * \frac{1}{2} + \$150.000 * \frac{1}{6} = \$58.833,33$$
$$VE(F3) = \$40.000 * \frac{1}{3} + \$60.000 * \frac{1}{2} + \$175.000 * \frac{1}{6} = \$72.500$$

Escenario de Alta Inflación:
$$VE(F1) = \$50.000 * \frac{1}{7} + \$75.000 * \frac{9}{14} + \$100.000 * \frac{3}{14} = \$76.785,71$$

$$VE(F2) = \$25.000 * \frac{1}{7} + \$50.000 * \frac{9}{14} + \$150.000 * \frac{3}{14} = \$67.857,14$$
$$VE(F3) = \$40.000 * \frac{1}{7} + \$60.000 * \frac{9}{14} + \$175.000 * \frac{3}{14} = \$81.785,71$$

En ambos escenarios de baja o alta inflación, se deberá elegir el Fondo 3 ya que el mismo obtendrá el mayor valor esperado.

Ejercicio N° 3- Una empresa de comidas rápidas va a decidir la construcción de una nueva sucursal en un centro comercial abierto, en un centro comercial cerrado o en un lugar alejado en el que los analistas opinan existe un gran potencial de crecimiento. El costo de construcción, independientemente del lugar escogido es de \$100.000, el alquiler anual (x 5 años) en el centro al aire libre es de \$30.000, en el centro comercial cerrado \$50.000 y en el lugar alejado \$10.000. La situación es de incertidumbre respecto de las probabilidades de ventas. Se han realizado las siguientes proyecciones de recuperación en 5 años para cada resultado.

	Ventas por debajo del promedio	Ventas promedio	Ventas por encima del promedio
Centro al aire libre	\$100.000	\$200.000	\$400.000
Centro Cerrado	\$200.000	\$400.000	\$600.000
Lugar alejado	\$50.000	\$100.000	\$300.000

Determinar la decisión óptima y la ganancia asociada, ignorando el flujo por encima de 5 años, utilizando los criterios de Wald (Minimax), Laplace, Hurwicz con α= 0,6 y el de Savage.

$\text{CAAL} = \text{Centro al aire libre}$
$\text{CC} = \text{Centro cerrado}$
$\text{LA} = \text{Lugar alejado}$

Ventas – Costo de construcción – Costo del alquiler = Ganancia
Por ejemplo, la ganancia en el centro al aire libre si las ventas están debajo del promedio resultan:
$\$100.000 - \$100.000 - \$30.000 = -\$30.000$
Calculando para cada caso se obtiene la tabla de ganancia:

	Ganancia con ventas por debajo del promedio	Ganancia con ventas promedio	Ganancia con ventas por encima del promedio
$A_1: CAAL$	-\$30.000	\$70.000	\$270.000
$A_2: CC$	\$50.000	\$250.000	\$450.000
$A_3: LA$	-\$60.000	\$-10.000	\$190.000

Para determinar la decisión óptima y la ganancia asociada utilizan los distintos criterios:
Wald:

A_1: CAAL	\$100.000
A_2: CC	\$200.000
A_3: LA	\$50.000

Hay que optar por el centro cerrado ya que se obtiene la mejor ganancia en el peor caso.

Savage:

Se elige el máximo resultado de cada futuro y se calculan los costos de oportunidad

	F1	F2	F3	Savage
A_1: CAAL	\$100.000	\$200.000	\$200.000	\$200.000
A_2: CC	\$0	\$0	\$0	\$0
A_3: LA	\$150.000	\$300.000	\$300.000	\$300.000

Considerando los costos de construcción y alquiler (5 períodos) se tiene que:

	F1	F2	F3
Centro al aire libre	100-100-30x5	200-100-30x5	400-100-30x5
Centro cerrado	200-100+50x5	400-100-50x5	600-100-50x5
Lugar alejado	50-100-10x5	100-100-10x5	300-100-10x5

	F1	F2	F3
Centro al aire libre	-\$ 150.000	-\$ 50.000	\$ 150.000
Centro cerrado	-\$ 150.000	\$ 50.000	\$ 250.000
Lugar alejado	-\$ 100.000	-\$ 50.000	\$ 150.000

Para aplicar el criterio de Savage se obtiene la matriz:

	F1	F2	F3
Centro al aire libre	$ 50.000	$ 100.000	$ 100.000
Centro cerrado	$ 50.000	$ -	$ -
Lugar alejado	$ -	$ 100.000	$ 100.000

Esto significa que construir el centro cerrado es la acción de menor costo de oportunidad ($50.000) y por eso hay que elegirla.

Hurwicz (alfa: 0,6):

A_1: CAAL : $\$400.000 * 0{,}6 - \$100.000 * 0{,}4 = \$280.000$
A_2: CC: $\$600.000 * 0{,}6 + \$200.000 * 0{,}4 = \$440.000$
A_3: LA: $\$300.000 * 0{,}6 - \$50.000 * 0{,}4 = \$200.000$

Vemos como la mayor ganancia la obtengo en la elección del centro cerrado.

Laplace:

$$V_{esperado}(CAAL) = \$100.000 * \frac{1}{3} + \$200.000 * \frac{1}{3} + \$400.000 * \frac{1}{3} = \$233.333{,}33$$
$$V_{esperado}(CC) = \$200.000 * \frac{1}{3} + \$400.000 * \frac{1}{3} + \$600.000 * \frac{1}{3} = \$400.000$$
$$V_{esperado}(LA) = \$50.000 * \frac{1}{3} + \$100.000 * \frac{1}{3} + \$300.000 * \frac{1}{3} = \$150.000$$

La mejor recuperación se da en el caso de la construcción del centro cerrado.

Vemos como a pesar de utilizar distintos métodos para hallar la decisión óptima, la opción elegida es siempre la de construir un centro cerrado.

Ejercicios propuestos

Ejercicio N° 4- La Fuerza Aérea comprará un nuevo tipo de avión y debe determinarse el número de motores de repuesto que se van a comprar. Es posible comprar 15, 20 0 25 motores que el proveedor fabricará en dos plantas. Se sabe, por experiencia anterior, que si los motores son fabricados en la primera planta el número de motores de repuesto requeridos sigue una distribución de Poisson cuyo parámetro es θ_1=21, mientras que si se fabrican en la segunda planta la distribución del número de motores de repuesto requeridos será también Poisson pero con θ_2=24. El costo de cada motor de repuesto comprado ahora, es decir con la compra de los aviones, es de 400000 $ por motor. En cambio, si se los compra más adelante, cuando sea necesario reemplazar los motores originales, el costo será de 900000 $ por motor.

En cualquier caso, se piensa que prácticamente no hay costo de llevar el inventario y que los motores se harán obsoletos cuando lo sean los aviones. Se calcula entonces una función de pérdida dada por la siguiente tabla:

Acción/Estado de la Naturaleza	θ_1=21	θ_2=24
a_1: comprar 15	1.155	1.414
a_2: comprar 20	1.012	1.207
a_3: comprar 25	1.047	1.135

Las pérdidas están expresadas en decenas de millones de pesos (Por ejemplo $1.155x10^7$= 11550000). La experiencia también indica que el proveedor fabrica los dos tercios de toda su maquinaria en la primera planta y el resto en la segunda. Se desea saber entonces:
a) ¿Que acción se recomienda realizar?
b) ¿Cuánto dinero valdrá la pena pagar por la información perfecta?
c) Suponiendo que los datos correspondientes al modelo de avión anterior pueden obtenerse sin costo y que se requirieron en esa oportunidad 30 repuestos ¿cual es la decisión a tomar ahora?

Ejercicio N° 5- Una empresa que se dedica a la venta de un producto de consumo masivo está considerando si conviene o no enviar vendedores a domicilio, y estima que si se sigue la estrategia de enviarlos y el individuo visitado no resulta ser cliente, se incurre en un costo de oportunidad de $ 1000 con respecto a la estrategia alternativa de no enviar al vendedor, mientras que si resulta ser cliente, el costo de oportunidad es nulo. En base a la experiencia acumulada, la empresa había podido determinar las probabilidades “a priori” de que un individuo sea cliente (0.7) o no cliente (0.3); pero a fin de decidir entre seguir o no esa nueva estrategia de comercialización se consideró conveniente realizar un estudio de mercado. De acuerdo a dicho estudio, tomando como variable de segmentación del mercado la edad, al dividir a la población en dos grupos: menores de 30 años y mayores de 30 años, se encontró que el 75% de los clientes pertenecía al primer grupo, mientras que sólo el 10% de los no clientes pertenecía a dicho grupo. Si el costo de la investigación de mercado fue de $ 100, determinar si a la empresa le ha resultado o no conveniente realizarla.

Ejercicio N° 6- Un empresario está considerando la compra de uno de los siguientes negocios: Un local de venta de cámaras, uno de venta de computadoras, uno de venta de artefactos electrónicos. Las 3 con la misma inversión inicial. Ha estimado las probabilidades del desempeño de ventas y las correspondientes ganancias que se presentan en las siguientes tablas.

Tabla de probabilidades del desempeño de ventas

	Promedio	Bueno	Excelente
Local de cámaras	0,20	0,60	0,20
Local de computadoras	0,15	0,70	0,15
Local de productos electrónicos	0,05	0,60	0,35

Tabla de ganancias

	Promedio	Bueno	Excelente
Local de cámaras	\$20.000	\$75.000	\$100.000
Local de Computadoras	\$30.000	\$60.000	\$100.000
Local de productos electrónicos	\$25.000	\$75.000	\$150.000

Haga un árbol de decisiones identificando los nodos aleatorios y de decisión. Calcule la ganancia esperada para cada nodo aleatorio. Identifique la decisión óptima.

Ejercicio N° 7- Una empresa estudia la factibilidad de instalar una nueva planta que podrá ser grande o pequeña. También está dispuesta a no construirla si los análisis de la decisión así lo aconsejaran. Hacia el futuro evalúa dos escenarios posibles: mercado favorable a sus productos ó mercado desfavorable. Para cada caso ha cuantificado en base a análisis prospectivos las ganancias o pérdidas que en cada situación obtendría y, por otra parte, no está en condiciones de evaluar la probabilidad de que ocurra cada uno de los dos futuros posibles. Con la información volcada en la Tabla, ¿qué decisión debiera tomar?

	Mercado Favorable	Mercado No Favorable
Planta Grande	200000	-180000
Planta Pequeña	100000	-20000
No hacer nada	0	0

Ejercicio N° 8- Se debe seleccionar una de 4 máquinas para fabricar Q unidades de un producto. Se denomina Qmax y Qmin a las demandas máxima y mínima de dicho producto y se sabe que el costo fijo y el variable por unidad para cada una de las máquinas viene dado por la tabla.

Maquina	K- costo fijo	C- costo variable por unidad
1	100	5
2	40	12
3	150	3
4	90	8

Sabiendo que el costo total de producir Q artículos es $CT = K + C \times Q$ seleccionar la máquina adecuada.