Fecha de recepción: 20 de mayo de 2014
Fecha de aceptación y versión final: 30 de septiembre de 2014

RINCE

Revista de Investigaciones del Departamento de Ciencias Económicas de La Universidad Nacional de la Matanza

Artículo de investigación

Sistema de amortización áureo con criterios de atenuación fractal

Autor: Luis Alberto Fernández[1]

Resumen

La serie de Fibonacci o serie Áurea, ha dado cuenta de innumerables aplicaciones en diversos ámbitos científicos y también artísticos. La posibilidad que un Sistema de Amortización pueda reducir en sucesivas etapas la deuda, a partir del concepto de Fractales (termino introducido por el matemático Benoît Mandelbrot), permite conformar un conjunto conceptual de aplicación pragmática. Este Sistema permite ser analizado elaborando su cuadro de marcha y reconocer analíticamente sus variables relevantes mediante el empleo de un conjunto de formulas propias. Reúne también, todas las características de Equilibrio Financiero necesarias para transacciones donde ninguna de las partes contratantes se vea beneficiada en detrimento de su contraparte, es decir que constituye un verdadero Sistema sobre Saldos en los cuales los deudores, abonan solo intereses sobre el capital residual, en otras palabras, considerando la deuda original, a la que se le han deducido las amortizaciones periódicamente practicadas conforme un método de calculo.

Palabras claves: Series-Fibonacci-Amortización- Áurea- Fractal

[1]Profesor Asociado a cargo de las cátedras de Matemática Financiera y Cálculo Financiero. Departamento de Ciencias Económicas. Universidad Nacional de La Matanza. Correo electrónico de contacto: cyt.economicas.unlam@gmail.com

Abstract

Fibonacci series or series Aurea, has found numerous applications in various scientific and also artistic fields. The possibility that a system of depreciation can reduce debt, based on the concept of fractals in successive stages (term introduced by mathematician Benoît Mandelbrot), allows you to create a conceptual set of pragmatic application. This system allows be analyzed developing your gear box and analytically recognize their relevant variables through the use of a set of own formulas. Also, brings together all the characteristics of financial equilibrium necessary for transactions where none of the Contracting Parties be benefited at the expense of its counterpart, i.e. which constitutes a true system of balances in which the debtors pay only interest on the residual, in other words capital, whereas the original debt, which have been deducted regularly practiced depreciation as a method of calculation.

Key words: Fibonacci Series- Amortization -Aurea - Fractal

Definición del Problema

Las transacciones crediticias modernas, tienen un marco amplio de cancelaciones, en tal sentido, no obstante la dinámica de las operaciones crediticias en el ámbito de las entidades financieras tanto publicas como privadas, se sustentan básicamente en dos Sistemas de Amortización tradicionales: el Sistema Frances principalmente y en menor medida el Sistema Alemán, ambos denominados **sistemas sobre saldos**. En ambos, el deudor abona solo el interés sobre el capital residual pendiente, disminuyendo la carga financiera con cada cuota de servicio, hasta alcanzar la cancelación del monto prestado.

Una restricción condicionante para adjudicar un determinado monto prestable, impuesta en nuestro Sistema Financiero a través del Banco Central de la Republica Argentina, se manifiesta a través de la **relación cuota/ingreso**. Dada esta norma los bancos, solo pueden otorgar un cierto capital, en función de la capacidad de pago de las cuotas de servicio que no excedan un determinado porcentual de los ingresos mensuales comprobables. Dicha imposición tiene como resultado el otorgar un monto crediticio insuficiente para las aspiraciones del deudor, especialmente en aquellos préstamos destinados a la adquisición de viviendas.

La diversidad de circunstancias particulares de cada tomador, requiere ampliar la oferta crediticia sin resignar utilidades de las entidades bancarias y favoreciendo las opciones de contratación en un marco de equilibrio financiero, por lo que este Sistema, puede aportar sus características propias para una fluida cancelación a partir de una cuota reducida en comparación a otros sistemas de amortización utilizados.

Para potenciar su efectividad, la cancelación puede resolverse en sucesivas etapas decrecientes, conservando la estructura inicial, diluyéndose en el tiempo, mediante la adopción de una “replica fractal”.

Conforme las variables que determinan el monto de las cuotas (plazo de devolución, tasa e ingresos del solicitante) se ven saturadas, el porcentaje de personas capaces de acceder a montos razonables para hacer frente a la compra de estos bienes, se ve notoriamente reducido, quedando posibilitados solo aquellos que disponen de altos ingresos mensuales.

Los plazos de devolución, pueden extenderse en el mejor de los casos, hasta 30 años, por lo que en si, a pesar de su razonabilidad, constituye una restricción adicional, sumada a un sistema donde prevalecen altas tasas de interés.

Toda esta conjunción de factores adversos, hace que muchas operaciones no puedan concretarse, generando frustración en los potenciales tomadores de crédito, una disminución en la calidad de vida de las personas, una merma en la rentabilidad de los bancos, reducción del incentivo a la construcción de inmuebles y producción de bienes y servicios en general, es decir en síntesis, perdida de oportunidades en la economía global.

Un Sistema cancelatorio distinto, que permita respetar las variables aludidas, y además sostenga el equilibrio financiero entre el deudor y el acreedor basándose en el pago de una cuota menor, puede constituirse en un aliado importante de la economía, a partir de un conjunto de premisas matemáticas claras. El presente trabajo, pretende aportar a dichas necesidades sociales, alguna solución en tal sentido.

Como alternativa, el **Sistema de Amortización Áureo con Criterios de Atenuación Fractal** le permite al prestatario metodológicamente, abonar una cuota menor que otros sistemas tradicionales como el Francés o el Alemán, sin

menguar los intereses del prestamista, pudiéndose acordar que el residuo pendiente, pueda transformarse en un nuevo proceso cancelatorio tantas veces como se desee.
Es así como al igual que con estos dos sistemas tradicionales, el deudor abona los intereses, conforme el capital adeudado en cada oportunidad de pago, por lo cual, resulta justo para ambas partes, circunstancia que principalmente se contemplo al momento de elaborar las pautas de este Sistema Áureo, y fuera reconocida en las Jornadas de Profesores Universitarios de Matemática Financiera de San Miguel de Tucumán y Morón (respectivamente, XXXva y XXXIIIra) donde se expusieran sus fundamentos generales.

Justificación del Estudio

Mas allá de un ejercicio académico, aplicando los conceptos matemáticos de la Serie de Fibonacci y los desarrollos fractales, el modelo resulta positivamente aplicable a las estructuras crediticias modernas, por lo que su empleo, puede dar respuestas a las necesidades de los tomadores de créditos, ampliando la oferta de opciones de las entidades financieras.

Limitaciones y alcances del trabajo

La aplicación de dicho Modelo, es absolutamente consistente con toda forma de cancelar deudas a partir de un capital prestable, bien sea a modo de empréstitos negociables u operaciones comerciales crediticias, incluidas opciones de leasing.
Partiendo de conceptos matemáticos, en un marco académico, el Modelo expuesto, adquiere validez empírica en el campo de las finanzas.

Objetivos

Promover a la diversidad de opciones cancelatorias de deudas, tanto en ámbitos públicos como privados, aportando un Método objetivo para medir el avance de la amortización del capital, a lo largo de toda su extensión.

Hipótesis

La propuesta de un Sistema de amortización áureo con criterios de atenuación fractal aporta al sistema crediticio una opción alternativa con ventajas comparativas a los Sistemas de Amortización francés y alemán tan ampliamente difundidos.

Material y Métodos

Para intentar satisfacer el planteamiento de la hipótesis, la estructura de la Serie de Fibonacci y la Teoría de Fractales, junto con los conceptos de Gradientes lineales y diversas herramientas del álgebra, nos permitirá abordar e interpretar el desarrollo propuesto.

Desarrollo

1. Antecedentes matemáticos: La serie Fibonacci

Al preguntarnos por la estructura que habría de adoptar el Sistema Áureo, surge de inmediato la idea de asimilarlo a las proporciones que derivan de las especiales condiciones del número ϕ (Phi) que al mismo tiempo, se encuentra oculto en la Serie de Fibonacci (Viggiani Rocha, s/f). A partir de las particularidades de esta serie matemática universalmente reconocida, la secuencia: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610,..etc. da cuenta de su existencia considerando que cada término, se nutre de la sumatoria de sus dos valores precedentes inmediatos, así 1(+ 0) como primer término, da lugar al término de segundo orden, es decir 1, luego 2+1=3, 3+2=5, 5+3=8, etc.….

La siguiente característica que deriva de esta serie, es la relación que existe al dividir un cierto término, por el valor que le precede; esta relación, se aproxima a un número que tiende a infinito (tal como ocurre con $\pi = 3{,}141592654.......$).

Siendo $1/1 = 1; 2/1 = 0{,}5; 3/2 = 1{,}5; 5/3 = 1{,}\widehat{6}; 8/5 = 1{,}6; 13/8 = 1{,}625; 21/13 = 1{,}6153846; 34/21 = 1{,}6190476....$

A medida que avanzamos en la serie, dicho número se hace evidente en esta relación. El número en cuestión, se denomina $\phi(Phi = 1{,}618033989....)$ reconocido en el mundo de las matemáticas por sus particularidades distintivas.

Dicho número que se obtiene de la siguiente expresión: $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, tiene algunas cualidades intrigantes, como por ejemplo, al calcular su recíproco, obtenemos como resultado $\phi - 1$, siendo que, $\frac{1}{\phi} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \phi - 1 = 0{,}618033989.....$ también, si lo elevamos al cuadrado y le restamos 1, volvemos a obtener el mismo número: $\phi^2 - 1 = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 = \phi$

El Triángulo de Pascal, contiene esta secuencia y en muchas otras relaciones puede verificarse la serie en el ámbito de las matemáticas.

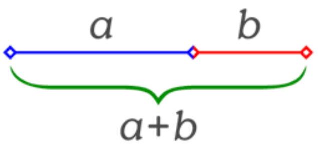
Esta misma serie, se encuentra también presente en muy diversos estados de la naturaleza, por ejemplo, la distribución de las semillas de margarita y la del girasol, indican dos números contiguos Fibonacci (21-34 y 55-89 respectivamente) que permiten representar la conocida **espiral logarítmica** que proviene de esta serie.

Esta serie se ve representada también en el caparazón del molusco conocido como nautilus, donde se mantiene la misma relación, así también el escurrimiento del agua en movimiento como observamos frecuentemente al dejarla correr mediante el grifo abierto del lavatorio, es un ejemplo cotidiano de dicha representación. Por último, y para no hacer inagotable la lista, tengamos presente la imagen que representa la Vía Láctea, que nueva casualidad, dado que analógicamente, responde al patrón de la Relación Áurea.

Estas relaciones, permiten resolver el problema de establecer que proporciones son necesarias para elaborar *ad infinitum*, rectángulos proporcionados contenidos uno dentro del otro, entre los cuales se verifique que el lado menor del inmediato mayor, resulte igual al lado mayor del rectángulo menor.

En la representación siguiente, podemos observar las proporciones aludidas, siendo una *SECCIÓN ÁUREA* la división en dos de un segmento según proporciones dadas por el número áureo. La longitud total ***a+b*** es al segmento más largo ***a*** como ***a*** es al segmento más corto ***b,***

Para $a = \frac{1}{\phi}$ y $b = \frac{\phi - 1}{\phi}$, donde $a + b = 1$



Estas y otras tantas curiosidades, aplicaciones y estados de la naturaleza que reflejan la aparición de esta serie, y en particular este número ϕ, le ha valido el nombre de "**el número de Dios**", "**número de oro**", "**serie dorada**" y otras tantas denominaciones de connotaciones divinas.

2. Desarrollo del Sistema Áureo

A efectos de establecer una adecuada correlación entre las características de la serie de Fibonacci, partiendo de la estructura de sus proporciones, el sistema Áureo, pretende respetar dichas proporciones a lo largo de la secuencia cancelatorias de sus pagos.

Para alcanzar este objetivo, se procederá a cancelar atomizadamente parte de la deuda en el tramo comprendido entre las cuotas de orden 1 a $n-1$, para luego, liquidarse el residual por completo en el periodo n, en relación $1-\frac{1}{\phi}$ de la deuda original, de forma de preservar la "armonía dorada".

Sus Variables: El deudor que contrata un crédito bajo estas condiciones, estaría abonando cuotas de capital durante los n-1 términos iniciales $\frac{V_0}{(n-1)\times\phi}$, por un total $\frac{V_0}{\phi}$ debiendo desembolsar en el periodo n, la suma de: $V_0 \times \left(1-\frac{1}{\phi}\right)$ como capital residual.

En todo momento, el acreedor recibe con cada cuota de capital, esto es $t_h = \frac{V_0}{(n-1)\times\phi}$, los intereses correspondientes al saldo previo de deuda como ocurre en tantos otros sistemas sobre saldos.

Como detalle particular, este sistema mantiene el residuo de capital impago $\left[V_0 \times \left(1-\frac{1}{\phi}\right)\right]$ luego de cancelada la cuota n-1, por lo que, en todo sistema de estas características, deberá cancelarse el saldo en el periodo n, así se verá satisfecha la restitución del capital original hacia el acreedor.

Durante el plazo 1 a $n-1$, el deudor amortizará el capital original como ya fuera expuesto, es decir:

$$t_h = \frac{V_0}{(n-1)\times\phi} \quad [1] \qquad \text{Siendo:} \qquad t_n = V_0 \times \left(1-\frac{1}{\phi}\right)$$

Para reconocer el saldo de Deuda, convenimos que:

$$S - Deuda = V_0 - h \times \frac{V_0}{(n-1)\times\phi}$$

Donde “h” representa el orden de la cuota donde se prevé reconocer dicho Saldo de Deuda.

Aquí se pude observar que se deduce de la deuda original las cuotas de capital (t_1 a t_{n-1}), de donde finalmente:

$$S - Deuda = V_0\left[1-\frac{h}{(n-1)\times\phi}\right] \quad [2]$$

$$\boxed{para : h < n}$$

Como ocurre en la mayoría de los Sistemas de Amortización sobre saldos (no todos), el deudor abona intereses, aplicando la tasa pactada al saldo de deuda inmediatamente anterior al orden de la cuota que cancela:

$$I_1 = V_0 \times i \qquad I_h = SD_{h-1} \times i \qquad I_h = \frac{V_0 \times i}{\phi} \times \left[\left(\frac{n-1-h+1}{n-1} - 1 \right) + \frac{1}{\phi} \right]$$

$$I_h = \frac{V_0 \times i}{\phi} \times \left(\frac{n-h}{n-1} + \frac{1}{\phi} \right) \quad [3]$$

Finalmente, aplicando el concepto de progresiones aritméticas, el total de intereses, surge de la siguiente expresión:

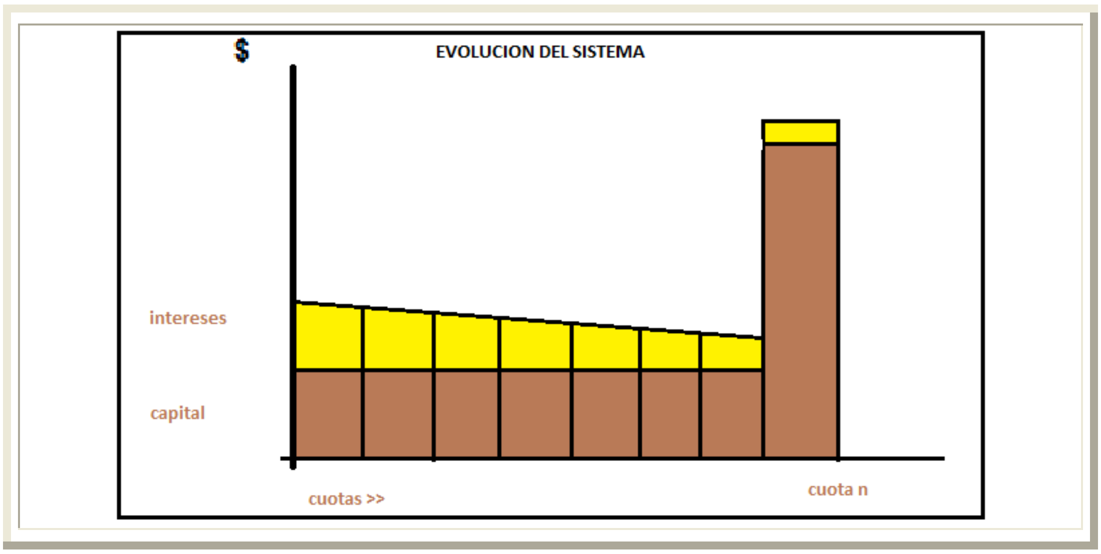
$$TI^{Aureo} = \frac{V_0 \times i + V_0 \times i \times \left(1 - \frac{1}{\phi}\right)}{2} \times n$$

$$TI^{Aureo} = \frac{V_0 \times i \times n \times \left(1 + 1 - \frac{1}{\phi}\right)}{2}$$

$$TI^{Aureo} = \frac{V_0 \times i \times n}{2} \times \left(2 - \frac{1}{\phi}\right) \quad [4]$$

A continuación, en la Figura 1, podemos observar la representación gráfica del Sistema Áureo:

Figura 1: Representación gráfica del Sistema Áureo



Fuente: Elaboración propia

3. La introducción del criterio fractal al Sistema Áureo

Entendiendo la probada validez del concepto de analogía científica que podemos observar frecuentemente entre distintas disciplinas, a modo de ejemplo, recordemos la imagen de la representación de un átomo y sus compuestos moleculares, denominada **Modelo Atómico de Rutherford**,[i] donde los electrones orbitan al núcleo con un espacio vacío entre ellos, tal como ocurre con los planetas orbitando en torno al sol, y a su vez, los satélites al rededor de sus respectivos planetas por mencionar solo un caso.

Del mismo modo, el criterio analógico antes expuesto, se verifica investigando sobre el concepto de fractales matemáticos. Un fractal es un objeto semi-geométrico cuya estructura básica, fragmentada o irregular, se repite a diferentes escalas (Mandelbrot, Hudson, 2006), tales observaciones constituyen una reciente área del conocimiento. Si bien, a la fecha, no hay aún consenso pleno para establecer una definición abarcativa de todos los objetos (físicos y sociales) que presentan semejanzas analógicas según la teoría de fractales, se determinan algunas características comunes en casi todos ellos:

- Es demasiado irregular para su descripción geométrica
- Es autosimilar (exacta, aproximada o estadística)
- Se define mediante un simple algoritmo recursivo

Diversos campos del saber han encontrado analogías aplicadas a este concepto, como la arquitectura, la música, la poesía, las ciencias sociales, la organización gubernamental de un estado (nación, provincias y municipios), las artes graficas, biología, etc. Para su explicación, haré uso del lenguaje técnico-analógico ya existente, procediendo a dar la explicación que resulte conveniente a lo largo de su desarrollo, asimilándolo a los conceptos financieros ya conocidos.

4. Fundamentos teóricos

La Matemática describe distintos tipos de sistemas según los preceptos de la Teoría el Caos como denominación popular de la rama de las matemáticas y la física que trata ciertos tipos de comportamientos impredecibles de los sistemas dinámicos (Posse Carbon, 2001). Los sistemas dinámicos se pueden clasificar básicamente en *estables, inestables y caóticos*. Un sistema estable tiende a lo largo del tiempo a un punto, u órbita, según su dimensión (atractor [ii]o sumidero), en tanto un sistema inestable se escapa de los atractores y un sistema caótico manifiesta los dos comportamientos. Un sistema, es «un conjunto de elementos interdependientes, es decir ligados entre sí por relaciones tales que si una es modificada, las otras también lo son y que, en consecuencia, todo el conjunto es modificado» (Von Bertalanffy, 1986).

Siendo que comprendemos en el ámbito de la Matemática Financiera que los Sistemas de Amortización empleados para cancelar deudas, corresponden al primer subgrupo (subsistemas Dinámicos Estables) puesto que, a lo largo del tiempo, presentan el método que describe la forma en que tales deudas habrán de cancelarse completamente, alcanzando el estado de “reposo” o equilibrio final, al tiempo que la deuda se manifieste completamente extinta. Dicho método, presenta la forma en que habrán de desarrollarse los algoritmos que resolverán la cancelación, constituyéndose ellos mismos, en el propio “atractor”. El desarrollo de los *IFS* (tales su sigla en ingles) como acrónico de *Sistemas de Funciones Iteradas*, (cálculos reiterativos que logran recrear las características particulares del conjunto sistémico) se puede observar en el desarrollo del Sistema de Amortización Áureo, que fue explicado, aunado al concepto de fractales. De la cualidad de autosimilitud o autosemejanza de *K* objeto de estudio fractal, se deriva que estará formado por la unión de *k* copias de sí mismo, posiblemente deformadas, y de menor tamaño (si las aplicaciones son contractivas), que pueden solaparse o no. Dicha cualidad, también se verifica en la modalidad aquí desarrollada, como variante propicia para el Sistema de referencia, sin deformaciones y manteniendo las proporciones originales, pues se trata precisamente de la denominada *Proporción Áurea* que verifica el número ϕ (Phi=1,61803389....) a lo largo de las fases de cancelación del sistema.

Con el propósito de sostener el lenguaje análogo que permita el reconocimiento del Sistema de Amortización en su condición fractal, remito al concepto empleado en mecánica clásica, siendo según esta disciplina, el espacio fásico o espacio de fases, aquel que representa una construcción matemática que permite reflejar el conjunto de posiciones y velocidades de un sistema de partículas. Técnicamente, el espacio de fases es una variedad diferenciable donde cada punto del espacio fásico representa un estado del sistema físico. Ese estado físico vendrá caracterizado por la posición de cada uno de sus elementos y sus respectivos momentos. Usualmente se designa el espacio fásico o una parte de él por Γ (gamma mayúscula). En alusión al presente trabajo, resultara entonces oportuno considerar las Γ "x", como el orden que refleje el estado de evolución en la cancelación del sistema de amortización, así podríamos encontrarnos en la fase x=1, x=2, x=3…., representado por la expresión Γ_1, Γ_2, Γ_3, etc.

Contando ya con el andamiaje técnico y lingüístico derivado de los conceptos expuestos, estamos en condiciones de aplicarlo al modelo propuesto.

5. Modelo sistémico de amortización con criterios de difusión fractal en "x" fases

Recordemos que la proporción aludida en el comportamiento de la serie de Fibonacci, tendiente al número ϕ, determina que el Sistema Áureo, amortiza la serie de pagos periódicos y sobre saldos, en proporción 1:0,61803389….., en donde el deudor, reintegra capital en el tramo comprendido entre los periodos 1 a n-1, en forma proporcional, siendo cada cuota de capital $t_h = \dfrac{V_0}{(n-1)\times\phi}$

relegando al periodo n la cancelación residual: $t_n = V_0 \times \left(1-\dfrac{1}{\phi}\right)$

Bajo esta variante, en lugar de cancelarse como se propone en el Sistema original, este último residuo conformaría el cuerpo de la siguiente fase desarrollada bajo las mismas proporciones descriptas. El residuo que genere esta nueva fase, resultará igualmente distribuida como prevé el sistema, en donde se generará un nuevo residuo. Esta operatoria, podría repetirse indefinidamente de acuerdo a las condiciones pactadas. La analogía que se presenta al desarrollar esta modalidad, determina la condición *fractal* de la operatoria financiera. Igualmente, la característica de autosemejanza o autosimilitud del objeto de estudio (K), en nuestro caso, el propio sistema, determina tanto replicas (k) idénticas en su estructura general de sí mismo pero proporcionadas a menor escala al avanzar en cada espacio fásico.

Esta situación, amerita convenir a priori, la cantidad de fases pactadas para la definitiva cancelación de la deuda, de acuerdo a las condiciones contractuales oportunamente acordadas. No obstante, para su desarrollo mas allá de la primera fase, resulta necesario realizar ajustes de los algoritmos de cálculo (fórmulas) o *IFS*, para identificar elementos tales como el saldo de deuda en algún estadio de su evolución, o el valor de alguna cuota. Una vez identificadas las variables iniciales, podemos necesitar conocer algún elemento que forme parte de una fase posterior, para lo cual razonamos de qué forma se replica el sistema.

Suponiendo que se plantea la cancelación en n cuotas en cada fase, deberemos considerar que las siguientes fases, dispondrán de menos cantidad de cuotas, a medida que se incrementa dicha cantidad de fases. Siendo que para una primera fase en n cuotas, la última de ellas (correspondiente al residuo) resultará contener la réplica siguiente, por lo que existirá en cada sistema fractal de estas características, una cierta cantidad de cuotas según la siguiente relación: $\Gamma x \times n - (x-1)$ de donde, Γx refleja la cantidad de fases en que se prevé cancelar la deuda y n representa la cantidad de cuotas definida para la primera fase (considerado la difusión fractal).

A modo de ejemplo, una deuda pactada en 2 fases de 4 cuotas/fase, contendrá solo 7 cuotas, dado que: $\Gamma 2 \times 4 - (2-1) = 7$

Una deuda de 3 fases para 4 cuotas: $\Gamma 3 \times 4 - (3-1) = 10$

Una deuda de 4 fases para 4 cuotas: $\Gamma 4 \times 4 - (4-1) = 13$

Para conocer la cuota de amortización que habrá de abonarse en una determinada fase, bastará con multiplicar la cuota de amortización original (aquella que corresponda a la primera fase, calculada según los algoritmos previstos), por la constante 0,381966…. (que representa el residuo pendiente), elevado al orden de la fase “x” que se desee conocer menos uno, siendo:

$$t_h(\Gamma_x) = t_h(\Gamma_1) \times \left(1 - \frac{1}{\phi}\right)^{X-1} \quad [5]$$

Finalmente, cabe la necesidad de conocer el Saldo de Deuda para este Sistema cuando se trata de un conjunto de fases, para lo cual, no solo habremos de identificar las cuotas constantes pendientes de la fase que corresponda, sino que también, el “Residuo” final de dicha fase.

$$S - Deuda = \left[V_0 - V_0 \times \frac{1}{\phi}\right]\Gamma_x + (n-h-1)t_h(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3....)$$

De donde: $S - Deuda = V_0\left(1 - \frac{1}{\phi}\right)^x + (n-h-1)t_h(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3,...)$ [6]

Para identificar el total de intereses en este sistema, consideramos los intereses parciales acumulados a partir de la siguiente expresión:

$$TI = i \times \left\langle [x \times n - (x-1)] \times V_0 - \sum_{n-1}^{0}(t_h\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3,...) - (n-1)^2 \times [(x-1)t_h\Gamma_1 + (x-2)t_h\Gamma 2 + (x-3)t_h\Gamma_3 + ...] \right\rangle \quad [7]$$

Caso de ejemplo 1: cancelación de una deuda con Sistema Áureo

Se desea cancelar una deuda de $3600.- por Sistema Áureo, valuada al 2% efectivo mensual, en 18 cuotas mensuales. Confeccionar el cuadro de marcha y resolver analíticamente el interés que se abona en la cuota 8, el total de intereses y el saldo de deuda inmediatamente después de abonada la cuota de orden 12.

Para calcular la cuota de capital (periodos 1 a 17):

$$t_h = \frac{V_0}{(n-1) \times \phi} \qquad t_h = \frac{3600}{(18-1) \times 1{,}618033989} \qquad t_h = \$130{,}88$$

Amortización del Periodo n:

$$\mathrm{Re}\,sidual(n) = V_0 \times \left(1 - \frac{1}{\phi}\right) \qquad \begin{aligned} \mathrm{Re}\,sidual(n) &= 3600 \times 0{,}381966 \\ \mathrm{Re}\,sidual(n) &= \$1375{,}08.- \end{aligned}$$

Para identificar la cuota de interés de orden 8:

$$I_h = \frac{V_0 \times i}{\phi} \times \left(\frac{n-h}{n-1} + \frac{1}{\phi} \right) \qquad I_8 = 3600 \times 0{,}02 \times \left(\frac{18-8}{18-1} + \frac{1}{1{,}618033989} \right)$$

$$I_8 = \$53{,}68$$

Para Reconocer el Total de Intereses:

$$TI^{Aureo} = \frac{V_0 \times i \times n}{2} \times \left(2 - \frac{1}{\phi} \right) \qquad TI^{Aureo} = \frac{3600 \times 0{,}02 \times 18}{2} \times (2 - 0{,}618033989)$$

$$TI^{Aureo} = \$895{,}51$$

$$S - Deuda = 3600 \times \left[1 - \frac{12}{(18-1) \times 1{,}618033989} \right]$$

$$S - Deuda = \$2029{,}47$$

Tabla1: Construcción del Cuadro de Marcha

	Vni	ch	th	Ih	Tasa	K
0	3600,00				0,02	0,618033989
1	3469,12	202,88	130,88	72,00	0,02	0,618033989
2	3338,24	200,26	130,88	69,38	0,02	0,618033989
3	3207,37	197,64	130,88	66,76	0,02	0,618033989
4	3076,49	195,03	130,88	64,15	0,02	0,618033989
5	2945,61	192,41	130,88	61,53	0,02	0,618033989
6	2814,73	189,79	130,88	58,91	0,02	0,618033989
7	2683,86	187,17	130,88	56,29	0,02	0,618033989
8	2552,98	184,55	130,88	53,68	0,02	0,618033989
9	2422,10	181,94	130,88	51,06	0,02	0,618033989
10	2291,22	179,32	130,88	48,44	0,02	0,618033989
11	2160,34	176,70	130,88	45,82	0,02	0,618033989
12	2029,47	174,08	130,88	43,21	0,02	0,618033989
13	1898,59	171,47	130,88	40,59	0,02	0,618033989
14	1767,71	168,85	130,88	37,97	0,02	0,618033989
15	1636,83	166,23	130,88	35,35	0,02	0,618033989
16	1505,96	163,61	130,88	32,74	0,02	0,618033989
17	1375,08	161,00	130,88	30,12	0,02	0,618033989
18	0,00	1402,58	1375,08	27,50	0,02	0,618033989
		4495,51	3600,00	895,51		

Fuente: Elaboración propia

Podemos observar en el Cuadro de Marcha precedente dispuesto en la Tabla 1, que los valores destacados se corresponden con las soluciones encontradas en forma analitica por la aplicación de las formulas desarrolladas.

6. Caso de ejemplo 2: Sistema Áureo con criterio de atenuación fractal en 3 fases

Aplicaremos las formulas enunciadas a un capital de $4000 adeudado bajo estas condiciones, con 5 cuotas iniciales que incluyen el saldo residual a distribuir en 2 fases adicionales (totalizando 3 fases), valuado al 0,05 efectivo periódico:

Siendo:

$$t_h = \frac{V_0}{(n-1)\times\phi} \qquad t_h = \frac{4000}{(5-1)\times 1{,}61803389} \qquad t_h = \frac{1000}{1{,}61803389}$$

$t_h = \$618{,}03$ (cuotas constantes de la primer fase)

El Residuo a distribuir:

$$t_n\Gamma_1 = V_0 \times \left(1-\frac{1}{\phi}\right) \qquad t_h\Gamma_1 = 4000\times(1-0{,}61803389) \qquad t_h\Gamma_1 = \$1527{,}86$$

Cuotas Constantes de la segunda fase:

$$t_h\Gamma_2 = t_h(\Gamma_1)\times\left(1-\frac{1}{\phi}\right)^{X-1} \qquad t_h\Gamma_2 = 618{,}03\times\left(1-\frac{1}{1{,}61803380}\right)^{2-1} \qquad t_h\Gamma_2 = \$236{,}07$$

Cuotas Constantes de la tercera fase:

$$t_h\Gamma_3 = t_h(\Gamma_1)\times\left(1-\frac{1}{\phi}\right)^{X-1} \qquad t_h\Gamma_3 = 618{,}03\times\left(1-\frac{1}{1{,}61803380}\right)^{3-1} \qquad t_h\Gamma_3 = \$90{,}17$$

Supuesto de calcularse el Saldo e Deuda, una vez cancelada la segunda cuota de la tercera fase, procederemos según los siguientes reemplazos:

$$S-Deuda = V_0\left(1-\frac{1}{\phi}\right)^{x} + (n-h-1)t_h(\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3,...)$$

$$S-Deuda = 4000\times\left(1-\frac{1}{1{,}61803389}\right)^{3} + (5-2-1)\times 90{,}17$$

$$S-Deuda = 4000\times 0{,}055728133 + 2\times 90{,}17$$

$$S-Deuda = 222{,}91 + 180{,}34 \qquad S-Deuda = \$403{,}25$$

Para calcular el Total de Intereses, aplicamos la fórmula correspondiente:

$$TI = i \times \left\langle [x \times n - (x-1)] \times V_0 - \sum_{n-1}^{0} (t_h \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots) - (n-1)^2 \times [(x-1) t_h \Gamma_1 + (x-2) t_h \Gamma 2 + (x-3) t_h \Gamma_3 + \ldots] \right\rangle$$

$$TI = 0{,}02 \times \left\langle [3 \times 5 - (3-1)] 4000 - 10 \sum_{n-1}^{0} .(618{,}03 + 236{,}07 + 90{,}17) - (5-1)^2 \times [(3-1) 618{,}03 + (3-2) 236{,}07 + (3-3) 90{,}17] \right\rangle$$

$$TI = 0{,}02 \times \langle 13 \times 4000 - 10 \times 944{,}27 - 16 \times (2 \times 618{,}0236{,}07 + 0) \rangle$$

$$TI = 0{,}02 \times (52000 - 9442{,}70 - 23554{,}08) \quad TI = 0{,}02 \times 19003{,}22 \quad TI = \$380{,}06$$

El Cuadro de Marcha desarrollado a continuación en la Tabla 2, se ajusta a la solución analítica hallada para el ejemplo, destacando las celdas que contienen las respuestas adecuadas:

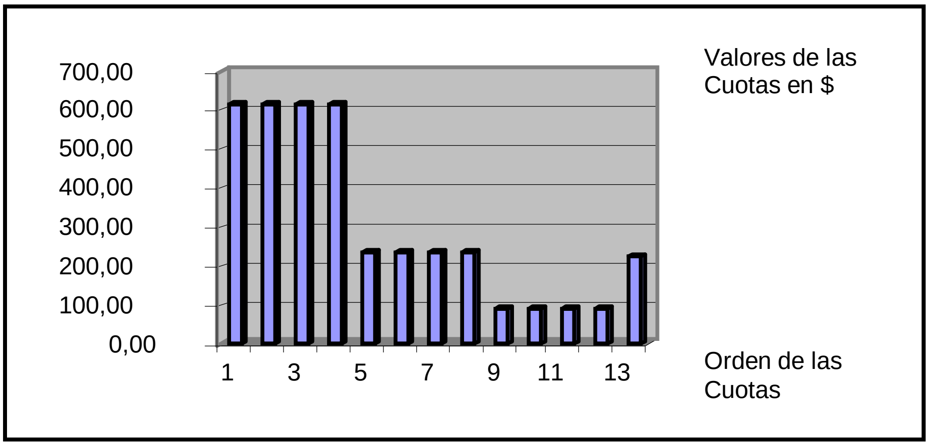
Tabla 2: Construcción del Cuadro de Marcha

n	V	C	T	I	tasa
0	4000,00				
1	3381,97	698,03	618,03	80,00	0,02
2	2763,94	685,67	618,03	67,64	0,02
3	2145,91	673,31	618,03	55,28	0,02
4	**1527,88**	660,95	618,03	42,92	0,02
1'	1291,81	266,63	**236,07**	30,56	0,02
2'	1055,74	261,91	**236,07**	25,84	0,02
3'	819,67	257,18	**236,07**	21,11	0,02
4'	583,60	252,46	**236,07**	16,39	0,02
1"	493,43	101,84	**90,17**	11,67	0,02
2"	**403,26**	100,04	**90,17**	9,87	0,02
3"	313,09	98,24	**90,17**	8,07	0,02
4"	222,92	96,43	**90,17**	6,26	0,02
residuo	0,0	227,37	**222,91**	4,46	0,02
		4380,05	4000,0	**380,06**	

Fuente: Elaboración propia

Finalmente se dispone a continuación en la Figura 2 la representación gráfica de la serie de pagos desarrollada con 3 fases de conformación fractal en proporción áurea.

Figura 2 Representación grafica de la serie de pagos desarrollada con 3 Fases de conformación Fractal en Proporción Áurea



Fuente: Elaboración propia

7. Discusión

El esquema del Modelo, fue oportunamente expuesto ante pares académicos, en las XXXvas Jornadas Nacionales de Profesores Universitarios de Matemática Financiera en San Miguel de Tucumán (Argentina) y XXXIIIras de Morón. En el primer encuentro referenciado, se manifestó verbalmente, la previsible opción de incluir este modelo como herramienta, a los esquemas crediticios del sector financiero en una empresa automotriz.

Un aspecto que podría considerarse como negativo, representa una falta de conocimiento del público en general para estimar su evolución. En comparación con las formulas muy difundidas tanto del Sistema Alemán como del Sistema Francés, las formulas del Sistema Áureo, resultan inicialmente desconocidas. Dicha situación, se vería ciertamente minimizada cuando el potencial usuario, contare con su propio Cuadro de Marcha provisto por la institución crediticia, tal como sucede habitualmente con los demás sistemas. Asimismo, un esquema de barras al estilo del representado en la figura 2, o de puntos, bien podría crear una imagen gráfica que facilite la comprensión al tomador.

8. Conclusiones

La creciente e incesante evolución de las prácticas financieras, en particular las modalidades de cancelación de deudas, deben ser suficientemente versátiles al tiempo de satisfacer los criterios de equidad entre deudores y acreedores. Asimismo, pudimos observar que la estructura cancelatoria de los Sistemas francés y alemán, limitan las posibilidades de acceso al crédito de muchos usuarios potenciales que encuentran un obstáculo al momento de hacer frente a una cuota que les permita acceder a una línea de créditos suficiente para acceder a un significativo monto prestable, especialmente acorde a la adquisición de viviendas.

Este Sistema, y su variante Fractal, cumple con dichos requisitos para ajustarse a aquellas necesidades donde un capital y su carga financiera, pueda ser diluida en el tiempo, de forma que permita una cómoda financiación para el deudor, sin menoscabar los derechos que deben atribuírsele al acreedor. Podemos en consecuencia, confirmar la validez de la Hipótesis, en la medida que el Sistema Áureo posibilita el acceso al crédito, a partir de una cuota menor a la que se debe hacer frente en los Sistemas tradicionales. La contrapartida de una última cuota abultada como sucede por aplicación de este sistema, se ve atemperada, aplicando los criterios de Atenuación Fractal, lo que posibilita conformar nuevas fases que progresivamente, vayan diluyendo el impacto de tal desembolso. En concreto, los créditos destinados a viviendas que resultan ser los más onerosos, así como ciertas operaciones de *Leasing*, podrían acomodarse a dicho Sistema, sacando provecho de su estructura de pagos. Son a partir de este trabajo, las entidades financieras quienes pueden contar con esta herramienta de cancelación, para adecuarlas a sus ofertas crediticias.

9. Referencias

Mandelbrot, B. (1997) *La geometría fractal en la naturaleza*. España: Tusquests Editores. Colección Metatemas 49.

Mandelbrot, B.; Hudson, R.L. (2006). *Fractales y finanzas. Una aproximación matemática a los mercados: arriesgar, perder y ganar*. España: Tusquests Editores. Colección Metatemas 93.

Posse Carbon, E. (2001) *La Teoría del Caos*. Bs. As.: Editorial Longseller.

Viggiani Rocha, M. I.(s/f). *La sucesión de Fibonacci*. Facultad de Ciencias Exactas y Tecnológicas Universidad Nacional de Tucumán. Disponible en: http://www2.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/documents/vol_21/21_3_FibonacciFinal2.pdf [Fecha de acceso: 30/7/2014]

Von Bertalanffy, L. (1986) *Teoría General de los Sistemas*. México: Fondo de Cultura Económica.

10. Bibliografía de consulta

Buzzi, A. M. (2010) *Decisiones Empresarias*. Buenos Aires: Editorial Buyatti I

Fernández, L. A. (2010) *Cálculo Financiero de las Operaciones Simples y Complejas.* Buenos Aires: Prometeo Libros.

García, J. A. (2008) *Matemáticas Financieras con Ecuaciones de Diferencia finita* Bogotá: Pearson Educación de Colombia.

Mandelbrot, B.(1987) *Los Objetos Fractales.* España: Editorial Tusquests Colección Metatemas 13. ISBN: 978-84-7223-58-1

Spinadel, V. (2007) *Geometría Fractal.* Bs.As.: Editorial Nueva Librería

The Fibonacci Quarterly. Official publication of the Fibonacci Association http://www.fq.math.ca/list-of-issues.html [Fecha de acceso: 30/7/2014]

11. Notas finales

[i] Ernest Rutherford, barón Rutherford de Nelson, conocido también como Lord Rutherford (Brightwater, Nueva Zelanda, 30 de agosto de 1871 – Cambridge, Reino Unido, 19 de octubre de 1937), fue un físico y químico británico. Se le considera el padre de la física nuclear.

[ii] Atractor: Región del espacio de las fases de los sistemas disipativos hacia la cual convergen las trayectorias que parten de una determinada región, llamada cuenca del atractor. Disponible en: http://www.mathworld.wolfram.com/Attractor.html [Fecha de acceso: 30/7/2014]