
FLUJO EN MEDIOS POROSOS Y OBJETOS FRACTALES

*Paulo Porta**
*Daniel Fortín**

Los objetos fractales han demostrado ser mucho más frecuentes en la naturaleza que lo que su inicial carácter patológico permitía suponer. En este trabajo presentaremos y analizaremos objetos fractales que surgen de experiencias de laboratorio diseñadas para estudiar el flujo de fluidos en medios porosos.

1. Introducción

La amplia disponibilidad de ordenadores digitales de gran capacidad, volcó la atención de ingenieros y científicos hacia el dominio de las aplicaciones no lineales. Asociadas a éstas, tomó impulso una rama de la geometría, ahora conocida como **geometría fractal**. Entre el último cuarto del siglo pasado y el primer cuarto del presente, los geómetras estudiaron una serie de curvas que denominaron **patológicas**, en virtud de sus pro-

* Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Haedo, Grupo CEDI.

iedades (Cf.Refs.[1], [2], [3]). Junto con la creación y descubrimiento de estos especímenes, se desarrolló una teoría de la dimensión, en particular a partir de los trabajos de Hausdorff (Ref.[4]). Todos estos antecedentes desembocaron en el trabajo de Mandelbrot (Ref.[5]), que de algún modo sentó las bases de la antedicha geometría fractal. La geometría fractal provee una metodología que permite la caracterización cuantitativa de estructuras complejas y desordenadas, como las que aparecen en ciencias tan dispares como geofísica, oceanografía, astronomía, cosmología, mecánica de fluidos, elasticidad, mecánica de la fractura, electrónica, teoría de la información, economía, ecología, biología, medicina, etc. (Para una lista de bibliografía extensa, remitirse a Ref. [5] y las referencias allí citadas).

Diremos que la geometría fractal es la geometría de los objetos dotados de algún tipo de simetría de escala: esto significa que si se transforma un objeto fractal mediante una transformación de homotecia de razón apropiada (discutiremos esto más abajo) se obtiene un objeto idéntico al original. Esto se expresa diciendo que los objetos fractales son **autosimilares**; algunos ejemplos arquetípicos son el conjunto triádico de Cantor y el conjunto de Mandelbrot (Fig.1).

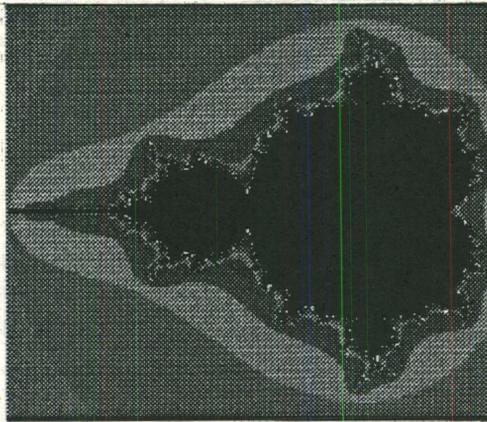


Figura 1: Conjunto de Mandelbrot

2. Dimensión y objetos fractales

Una de las ideas centrales en toda la matemática es la dimensión. Hay varias definiciones de dimensión y nosotros presentaremos algunas que son importantes para intentar una definición de los objetos fractales. Vamos a presentar los conceptos de **dimensión de contenido** o de **Hausdorff-Besicovitch**, de **dimensión de recubrimiento** y de **dimensión de similitud**.

Comencemos por pensar en una superficie; para una superficie simple la

dimensión topológica es dos. Una forma de medir su área es dividir esta superficie en pequeños cuadrados de lado δ y contar cuántos de estos pequeños cuadrados son necesarios para cubrirla y luego tomar el límite para $\delta \rightarrow 0$. Así el área A puede ponerse como:

$$A = N(\delta) \delta^2 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} A_0 \delta^0$$

Si asociáramos un volumen a esa superficie, se calcularía recubriendo la superficie con pequeños cubitos de lado δ . En este caso, el volumen se puede expresar como:

$$V = N(\delta) \delta^3 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} A_0 \delta^1$$

Como era de esperar, este volumen, en el límite de δ pequeños es nulo. Ahora podríamos preguntarnos si podemos asociar una **longitud** a la superficie. Formalmente podríamos poner:

$$L = N(\delta) \delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} A_0 \delta^1$$

la que diverge en el caso de los δ pequeños. Este resultado es razonable, ya que es imposible cubrir una superficie con un número finito de segmentos. De estas observaciones queda claro que la única medida útil del conjunto que define una superficie es el área. Recopilaremos todo lo que dijimos, generalizando el contenido: dado un conjunto de puntos S , definimos una función $h(\delta) = \gamma(d)\delta^d$ con la que recubrimos el conjunto S para construir una medida M_d dada por:

$$M_d = \sum h(d) = \sum \gamma(d)\delta^d$$

(Para no perder el punto, en el caso de elegir cuadraditos o cubitos nuestra función $\gamma(d) = 1$, pero si hubiéramos elegido circulitos y esferitas ¡esto habría sido distinto!). En general, hemos observado que M_d vale, o bien cero o bien infinito, según la elección que hagamos de d . Así, definiremos la dimensión de Hausdorff-Besicovitch D del conjunto S como aquella dimensión crítica para la cual la medida M_d cambia de cero a infinito:

$$M_d = \sum \gamma(d)\delta^d = \gamma(d)N(\delta)\delta^d \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \begin{cases} 0, & d > D \\ \infty, & d < D \end{cases}$$

Para implementar esta definición de dimensión, podemos considerar lo siguiente: recubrimos el conjunto bajo estudio con un grillado o reticulado de longitud característica δ . La cantidad de celdas necesarias para recubrir por completo el conjunto es una función de la longitud característica de la celda, que podemos designar por $N(\delta)$. Ahora, o bien procedemos como indica la definición anterior y calcularemos la medida M_d o bien recalculamos la función para otras longitudes características menores, ya que, como se ve de la definición, en el límite de δ pequeño,

$$N(\delta) \approx \frac{I}{\delta^D}$$

De esta expresión es posible obtener D , siendo la dimensión así definida la dimensión de recubrimiento.

Antes de continuar, es importante hacer algún comentario sobre la propiedad fundamental de los objetos fractales: la autosimilitud. Como dijéramos en la sección anterior, los objetos fractales son aquellos objetos que están dotados de algún tipo de simetría de escala. Para introducir este concepto, pensemos en una recta: este objeto es invariante ante traslaciones y cambios de escala, es decir es autosimilar. En efecto, definiendo el conjunto de los puntos que forman la recta por:

$$S = \{ \vec{x} / \vec{x} = \vec{x}_0 + t \vec{a}, t \in \mathfrak{R} \}$$

y aplicando a este conjunto una transformación de homotecia de razón r :

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x} = r\vec{x} = r(\vec{x}_0 + t \vec{a}) = \vec{x}_0 + t' \vec{a} - \vec{x}_0 + r\vec{x}_0 = \vec{x}_0 + t' \vec{a} - (1 - r) \vec{x}_0$$

y una traslación $T: \vec{x}' \rightarrow \vec{x}'' / \vec{x}'' = \vec{x}' + (1 - r)\vec{x}_0$, reobtenemos el mismo conjunto S . Si en lugar de considerar una recta, consideráramos un segmento, este conjunto no tiene simetría de traslación; sin embargo, si lo transformamos con homotecias de razón menor que la unidad, estamos generando un conjunto que está contenido en el original. Para este nuevo conjunto existen algunas traslaciones que transforman el conjunto transformado en otro que también está contenido en el original; así, eligiendo adecuadamente la razón de la homotecia será posible recubrir el conjunto original exactamente con N conjuntos disjuntos. En este caso, decimos que el conjunto es *r-autosimilar* o autosimilar con respecto a la razón r . El claro el hecho de que no hay una única razón de homotecia respecto de la cual el conjunto es autosimilar y el número de conjuntos disjuntos necesarios para recubrir es función precisamente de esta razón. La relación entre estas cantidades viene dada por:

$$r(N) = \left(\frac{1}{N} \right)^{1/D_s}$$

Este D_s es lo que se denomina dimensión de similitud siendo su expresión explícita:

$$D_s = - \frac{\ln N}{\ln [r(N)]}$$

Para el caso de estar estudiando objetos fractales autosimilares, $D_s = D$.

3. Una aplicación

Una de las aplicaciones de la geometría fractal que ha ganado su propio espacio, es el estudio de las “ramificaciones viscosas” (*viscous fingering*) en el flujo de fluidos en medios porosos. Este es un problema central, ya en la teoría del flujo en medios porosos como en la industria, en los procesos de recuperación del petróleo. Maloy *et al.* (Ref.[8]) y Chen y Wilkinson (Ref.[9]) pusieron de manifiesto el carácter fractal de estos fenómenos, esencialmente descritos en términos de inestabilidades que dan lugar a la formación de estructuras complejas asociadas a fenómenos fuera del equilibrio.

En el Laboratorio de Mecánica de Fluidos de la Facultad Regional Haedo, Universidad Tecnológica Nacional, se han realizado experiencias donde se ha querido estudiar el frente de desplazamiento que aparece cuando un fluido de alta viscosidad es desplazado por otro de baja viscosidad.¹ En particular, se ha utilizado como fluido a ser desplazado un alcohol cetílico, utilizado como espesante en la industria química, y anilina a la grasa disuelta en aguarrás como fluido de baja viscosidad. El dispositivo empleado para la experiencia es una “Caja de Hele-Shaw radial”; ésta consiste en dos placas planas y paralelas, transparentes, separadas por una distancia b , dentro del cual el flujo es potencial (Cf.Ref. [10]). Se han tomado fotografías de la interfase de desplazamiento —véase figura 2—, se las digitalizó con un *scanner* de 4500 dpi con distintas relaciones de contraste.

¹ Si bien este fenómeno tiene más importancia teórica que práctica, la ecuación de gobierno de este es idéntica a la que gobierna el flujo en medios porosos.

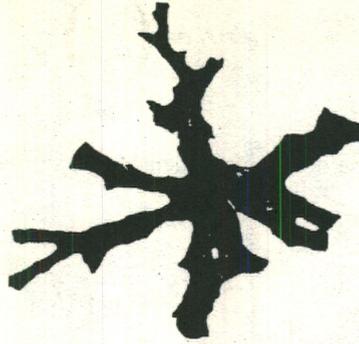


Figura 2: Imagen digitalizada de la interfase fluido-fluido. El fluido de menor viscosidad es anilina a la grasa disuelta en aguarrás y el fluido a desplazar es alcohol cetílico.

Estos archivos de imagen (del tipo PCX comprimido) se procesaron con el programa listado en el anexo Y. Este código bastante sencillo trabaja sobre los archivos PCX, los descompacta y analiza tomando de a un pixel la información de la imagen, luego toma cuatro pixel y luego nueve; así sucesivamente, sumando 1 cuando alguno de los pixel de estas áreas está prendido, lo cual da un número en cada corrida; a estos números, resultado de cada corrida por medio de mínimos cuadrados, se los asocia a una recta. Según se desprende del esquema de cálculo de la sección anterior, la **dimensión de recubrimiento** del fractal analizado es la pendiente de la recta calculada. Los resultados se resumen en la figura 3, de donde se obtuvo $D = 1.86$, en buena correspondencia con los valores presentados en la Ref. [11].

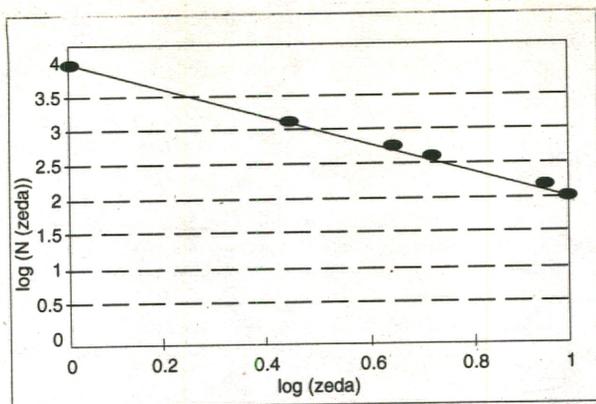


Figura 3: Gráfico de $\log(N(\zeta))$ vs. $\log(\zeta)$, para la experiencia realizada en el L.M.F. La pendiente de la recta de regresión es nuestra estimación de la dimensión de recubrimiento $D = 1.865$.

4. Comentarios finales

1. Estrictamente hablando, los fractales como el conjunto triádico de Cantor que presentamos en las secciones 1 y 2, son prefractales, ya que si se realiza la iteración un número determinado de veces, el objeto deja de ser autosimilar. Esta propiedad sólo se mantiene para un rango de escalar $\epsilon < r < L$.

2. Las estructuras que se encuentran en la naturaleza son cuando mucho prefractales; los límites ϵ y L están en evidente relación con las escalas del sistema bajo análisis y son límites de orden físico. La geometría fractal provee herramienta que "idealizando" las estructuras naturales son plenamente aplicables. En este sentido, los objetos fractales no difieren demasiado de las esferas, planos y líneas que sirven como idealizaciones más o menos útiles de sistemas reales.

3. Aunque parezca sorprendente, algunos objetos fractales son demasiado regulares para representar ciertos procesos naturales. Es por esto que se agrega a los procesos de generación del objeto fractal, una componente de azar para "irregularizarlo"; el objeto obtenido es fractal sólo en un sentido estadístico.

Nota

El presente trabajo se realizó en el marco del Plan de Trabajo del Laboratorio de Mecánica de Fluidos, Facultad Regional Haedo, Universidad Tecnológica Nacional, del Subproyecto de Tecnologías de Control Activo y del Centro de Estudios en Informática-Haedo.

Los autores agradecen a la Jefa del Laboratorio de Mecánica de Fluidos, Facultad Regional Haedo, Universidad Tecnológica Nacional, por su ayuda en la realización de las experiencias y al señor Roberto Gava por su inapreciable ayuda en la construcción del dispositivo de ensayo.

REFERENCIAS

1. Kasner, E. y Newman, J., *Matemáticas e imaginación*, Hyspamérica, 1967.
2. Von Koch, H., "Sur une courbe continue sans tangente, obtenue para une construction géométrique élémentaire", *Arkiv für Matematik Astronomich Fysik 1*, 1904, 681-704.
3. Von Koch, H. "Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes", *Acta Mathematica 30*, 1906. 145-74.
4. Hausdorff, F., "Dimension und usseres mass", *Mathematisches Annalen 79*, 1919, 157-79.
5. Mandelbrot, B., *Los objetos fractales*, Tusquets, 2ª edición, 1984.
6. Baker, G. y Gollub, J., *Chaotic dynamics, an introduction*, Cambridge Un.Press, 1990.
7. Feder, J., *Fractals*, Plenum Press, 1988.
8. Maloy, K.J., Feder, J. and Jossang, T., "Viscous fingering fractals in porous media", *Phys.Rev.Lett.55*, 1985, 2688-91.
9. Chen, J.D. and Wilkinson, D., "Pore-scale viscous fingering in porous media", *Phys.Rev.Lett. 55*, 1985, 1892-5.
10. Schlichting, H., *The Boundary Layer Theory*, 7th. Ed.McGraw-Hill, 1977.
11. Meakin, P., "Fractal aggregates in geophysics", *Geophysics 29*, 3 317-354.

7. Anexo 1
Listado de programa

DEFLNG A-Z

```
*****
*PROGRAMA DE DEMOSTRACION EN QBASIC PARA DESCOMPACTAR PCX HASTA VERSION*
*5.00, MOSTRANDOLO EN PANTALLA. LUEGO HACE UN ANALISIS DE PIXELES ENCEN*
*DIDOS PARA LA DETERMINACION DE LA DIMENSION DE RECUBRIMIENTO DE UN FRAC*
*TAL. ESTA HECHO EN BASIC Y DE MANERA SENCILLA Y PRACTICA. Y SOLO SE TRA*
*TA DE UN EJEMPLO ACADEMICO PARA EL ENTENDIMIENTO DEL PROBLEMA. SOLO SE*
*TIENE QUE SOLUCIONAR LAS PERDIDAS DE ALGUNOS PIXEL EN EL USO DE FOR*
*CON STEP Y REACOMODAR EL ALGORITMO PARA QUE LOS PASOS ENTRE DESCOMPAC*
*TACION, MOSTRAR EN PANTALLA Y ARMADO DE ARCHIVO DE ANALISIS SE REALICE*
*EN UN SOLO PASO.                                     *
*1995 - CE.DI. HAEDO                                  *
```

CLS

'Pregunta por archivo a procesar

```
PRINT "archivo de datos:";
INPUT archivo$
```

'Abre el archivo elegido

```
OPEN archivo$ FOR RANDOM AS 1 LEN = 1
FIELD # 1, 1 AS a$
```

'Abre un archivo auxiliar para guardar la imagen descompactada

```
OPEN "PYRAMID.BLD" FOR OUTPUT AS 2
```

'Analiza el HEADER del archivo imagen .PCX verificando version del
'formato PCX, y dimensiones del archivo

```
GET #1, 2
VERSION = ASC(a$)
GET #1, 4
BITXPIXEL = ASC(a$)
GET 1, 5
B$ = a$
GET 1, 6
xmin = ASC(a$) * 256& + ASC(B$)
GET 1, 7
B$ = a$
GET 1, 8
ymin = ASC(a$) * 256& + ASC(B$)
```

PROPUESTAS

```
GET 1, 9
B$ = a$
GET 1, 10
xmax = ASC(a$) * 256& + ASC(B$)
GET 1, 11
B$ = a$
GET 1, 12
ymax = ASC(a$) * 256& + ASC(B$)
GET 1, 13
B$ = a$
GET 1, 14
RESHOR = ASC(a$) * 256& + ASC(B$)
GET 1, 15
B$ = a$
GET 1, 16
RESVER = ASC(a$) * 256& + ASC(B$)
GET 1, 66
planos = ASC(a$)
GET 1, 67
B$ = a$
GET 1, 68
bytexlinea = ASC(a$) * 256& + ASC(B$)
```

'Ajusta segun version la cantidad de bytes usados en la seccion de datos
'del PCX

```
IF VERSION = 5 THEN
usado = LOF(1) - 769 - 128
ELSE
usado = LOF(1) - 128
END IF
```

'Informa los parametros de la imagen

```
PRINT "VERSION: "; VERSION
PRINT "RESOLUCION: "; RESHOR, RESVER
PRINT "XMIN-YMIN: "; xmin, "-", ymin
PRINT "XMAX-YMAX: "; xmax, "-", ymax
PRINT "BITXPIXEL"; BITXPIXEL
PRINT "BYTEXLÍNEA"; bytexlinea
PRINT "PLANOS"; planos
PRINT "USADO: "; usado
INPUT s$
```

'Comienza la descompactacion de la imagen y guardado en archivo auxiliar

i = 129

```

DO WHILE i <= usado + 129
  GET 1, i
  B$ = a$
  IF ASC(B$) > 192 THEN
    j = ASC(a$) - 192
    GET 1, i + 1
    B$ = a$
    i = i + 2
    FOR K = 1 TO j
      PRINT #2, B$;
    NEXT K
  ELSE
    i = i + 1
    PRINT #2, B$;
  END IF
LOOP
CLOSE

```

'Salida por pantalla y creacion de matriz de ceros y unos

```
SCREEN 9
```

'Abrimos archivo auxiliar de imagen

```

OPEN "PYRAMID.BLD" FOR RANDOM AS 1 LEN = 1
FIELD 1, 1 AS a$

```

'Creamos archivo de ceros y unos para analisis

```

OPEN "imagen.dat" FOR OUTPUT AS 2
i = 0
nro 1 pixelenc = 0 'cantidad de pixel encendidos para areas de un pixel
FOR y = 0 TO ymax
  FOR x = 0 TO xmax STEP 8
    i = i + 1
    GET 1, i
    pix = ASC(a$)
    i = i + 1
    GET 1, i
    pix1 = ASC(a$)
    FORj = 0 TO 7
      IF (pix AND 2 ^ j) = 0 THEN
        PSET (x + 7 - j, y)
        nro1pixelenc = nro1pixelenc + 1
        PRINT #2, "1";
      ELSE
        PRINT #2, "0";
      END IF
    NEXT j
  NEXT x
NEXT y

```

```

        NEXT j

    NEXT x
    PRINT #2,
NEXT
CLOSE

'Análisis para áreas de 2 a 8 pixel de lado

LOCATE 1,40
lado = 1
PRINT "Area Nro Pixel Encendido"
LOCATE 2, 40
PRINT " ..... "
LOCATE 3, 40
PRINT lado ^ 2, nro 1 pixelenc

FOR lado = 2 TO 8

'Abrir archivo de ceros y unos

OPEN "imagen.dat" FOR INPUT AS 1

'Vector donde colocamos una linea de 1 y 0

REDIM linea$(lado)

'Contador de pixel encendido en areas

nropixelenc = 0
i = 0
FOR y = 1 TO ymax STEP lado
    FOR j = 1 TO lado
        linea$(j) = ""
        IF NOT EOF(1) THEN
            LINE INPUT #1, linea$(j)
        END IF
    NEXT j
    tem$ = ""
    FOR x = 1 TO xmax STEP lado
        flag = 0
        FOR j = 1 TO lado
            IF INSTR(MID$(linea$(j), x, lado), "1") > 0 THEN flag = 1
        NEXT j
        IF flag = 1 THEN
            nropixelenc = nropixelenc + 1
        END IF
    NEXT x
NEXT y

```

```
    NEXT x
NEXT y
LOCATE lado + 2, 50
PRINT lado ^ 2, nropixelenc
CLOSE 1
NEXT lado
```

