IV- Teoría de Inventarios

IV.1 Introducción

La acumulación de distinto tipo de mercadería a efecto de satisfacer una ulterior demanda es una práctica habitual en la industria y el comercio. En el caso de la fabricación de un bien, por ejemplo, un automóvil, es posible establecer políticas de abastecimiento de sus elementos constituyentes que aseguren la disponibilidad en el tiempo y la forma en que el proceso lo requiera. Similar cosa ocurre en el comercio cuando, por ejemplo, un supermercado, desea ofrecer a sus clientes un determinado artículo garantizando su existencia en la cantidad y el momento en que lo demanden. En ambos casos el objetivo de cubrir la demanda de manera adecuada genera la necesidad de tener un stock.

Toda política de stock o inventario requiere como paso inicial un análisis de la demanda del artículo que ha de acumularse. En oportunidades, la cantidad de artículos que van a ser demandados en un período de tiempo se conoce de antemano con cierta certeza. Por ejemplo, si van a fabricarse 500 automóviles en el mes, se harán necesarias 500 palancas de cambio en ese período. Otras veces ocurre que solo puede establecerse una distribución de probabilidades para el número de artículos que serán requeridos en un lapso de tiempo. Aquí puede pensarse, por ejemplo, en un kiosco de revistas que estima que, durante el mes, con distinta probabilidad, puede vender 10, 12 o 18 ejemplares de una publicación. Desde el punto de vista de la representación matemática del sistema de inventario se emplean dos tipos de modelos; determinísticos, cuando hay una demanda conocida fija, o estocásticos, si solo se tiene una idea probabilística de la demanda o directamente no se la conoce. En cualquier caso, el modelo que se utilice debe ayudar a tomar una decisión sobre con que cantidad de artículos formar el stock y cada cuanto renovarlo. Tal decisión suele basarse en el criterio de minimizar el total de los costos que están implicados en la formación, mantenimiento y disponibilidad del inventario necesario para satisfacer la demanda. Para ello hace falta entonces, además del análisis de la demanda, un estudio sobre los costos de toda la operatoria.

Los costos a considerar se detallan en forma sucinta a continuación:

a) *Costo de pedido y organización*

Puede involucrar los costos de preparación de máquinas, las tareas administrativas y de facturación necesarias para integrar la partida de artículos que se pida para formar el stock. Este costo no depende de la cantidad de artículos que integren el lote a pedir.

b) *Costo de compra unitario*

Incluye el costo de la mano de obra, los costos fijos, el costo de la materia prima y el de envío, todos prorrateados por cada unidad o artículo.

c) *Costo de retención o posesión*

A veces denominado *costo de mantenimiento* en stock comprende, por cada unidad en un período de tiempo, los costos de almacenamiento, seguros, impuestos, descomposición y obsolescencia. Además, incluye el costo de oportunidad calculado sobre el capital invertido en la mercadería que se obtiene de acuerdo al interés financiero que se sumaría a ese capital si no estuviera retenido en cada artículo.

d) *Costo de escasez o agotamiento*

También llamado *costo del déficit*, aparece cuando se pospone la satisfacción inmediata de pedidos sobre el stock. En un extremo podría ocurrir que cada pedido de un artículo que quedara pendiente no involucrara pérdida alguna; en el otro podría darse que cada demanda de un artículo que no fuese satisfecha conllevara una pérdida. Esto se trata de resolver estimando un costo por artículo para una situación intermedia. Por ejemplo; por la mañana 5 personas solicitan una caja de un remedio en la farmacia cuyo stock se ha agotado. El vendedor promete tener cada caja esa tarde. Pero a la tarde sólo regresan 3 clientes para comprar efectivamente el medicamento, por lo que se han perdido dos ventas. Estas pérdidas se pueden prorratear por artículo en la unidad de tiempo para establecer el costo del déficit surgido al agotarse el medicamento si bien no es siempre sencillo calcular tal cantidad.

Un análisis más pormenorizado de los costos cae fuera del contenido y objetivos de esta exposición que, a efecto del modelado, partirá de la base de considerar ya adecuadamente calculados los costos de *pedido*, *unitario*, *mantenimiento* y *déficit*.

La idea general es construir una función que relacione adecuadamente el costo total con el lote que forma el stock, para hallar entonces el tamaño del lote que garantice el costo mínimo y el tiempo óptimo que debe transcurrir hasta el próximo pedido. Tal función habrá de establecerse con arreglo a ciertos supuestos iniciales sobre la demanda, y algunos otros aspectos, que variarán según el modelo considerado. En suma, se trata de contestar dos preguntas ¿Cuánta mercadería incorporar al inventario? y ¿cada cuánto hacerlo? para que el costo total sea mínimo.

IV.2 Modelos con demanda conocida

Supongamos que se conoce la cantidad de artículos que habrá de solicitarse al stock en una cierta unidad de tiempo. Por ejemplo; la fábrica de automóviles requerirá 500 palancas de cambio en el mes. Más allá de que esta demanda mensual se mantenga constante a través del año, se puede suponer que la extracción diaria de palancas de cambio es proporcional a la demanda del mes. Así, si el stock de palancas de cambio tiene un determinado tamaño inicial, habrá de disminuir siguiendo una pendiente lineal en forma diaria. En tal caso se dirá que la demanda es *uniforme*.

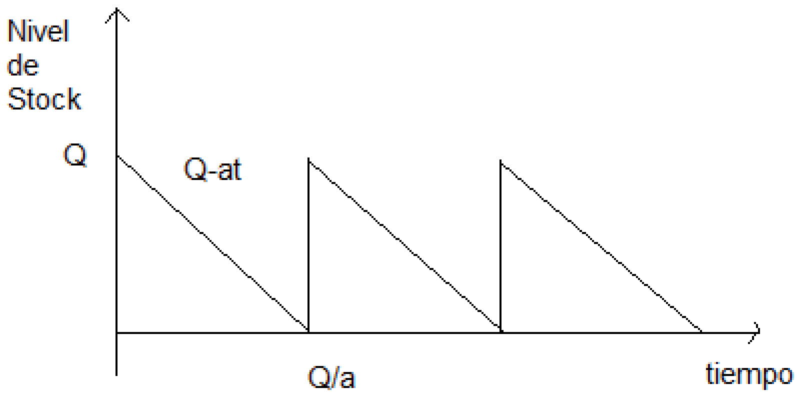
Otro aspecto a tener en cuenta es la forma en que se revisa el stock a fin de actualizarlo. Existen dos posibilidades: la cantidad de artículos existentes se actualiza cada vez que se extrae un artículo del stock o la actualización se produce a intervalos fijos de tiempo, en el caso de la fábrica de automóviles, por ejemplo, semanalmente. Si la actualización se realiza según la primera alternativa, se dice que el inventario es *revisado* en forma *continua*.

Los modelos que presentaremos en forma general dentro de este apartado responden a los supuestos de *demanda uniforme* y *revisión continua*.

IV.2.1 Modelo de Stock Simple sin Déficit

La *demanda uniforme* puede expresarse por una tasa de extracción que informa cuantas unidades se retiran del stock en cada unidad de tiempo. Llamaremos a a dicha tasa que está expresada en $\frac{unidades}{unidad\ de\ tiempo}$. La caída lineal del stock y la *revisión continua*, se acompañan aquí con la suposición de que no puede existir agotamiento o déficit sobre el stock. Es decir; no puede haber pedidos pendientes y por ende cuando el stock se agota debe contarse inmediatamente con una nueva partida para satisfacer la demanda. La Gráfico 1 ilustra tal operatoria del inventario a través del tiempo.

Gráfica 1



Al comenzar la actividad del sistema se tienen en stock Q unidades que conforman el lote de inicio. Este nivel baja a razón de a unidades por cada unidad de tiempo transcurrida. Los distintos niveles del stock quedan entonces graficados por el segmento de recta que representa la ecuación:

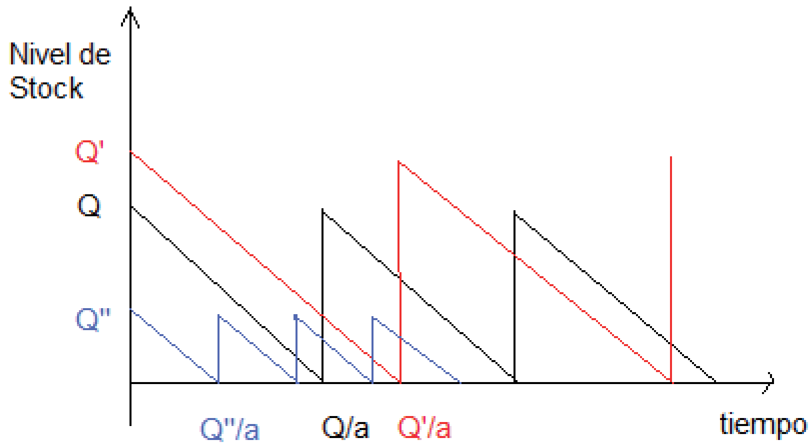
$Nivel\ de\ Stock = Q - a \times t$

La variable t indica el tiempo transcurrido desde el inicio de la operatoria. Es decir; en el instante inicial $t = 0$ se tiene, como se ve en la Gráfica 1,

$Nivel\ de\ Stock = Q - a \times t = Q$. Al continuar la operatoria cuándo el nivel de stock llega a 0, se tiene $Nivel\ de\ Stock = Q - a \times t = 0$ y al despejar resulta $t = \frac{Q}{a}$. Llegado este momento se debe pedir un nuevo lote de tamaño Q que disminuirá de la misma forma hasta 0 y así. Hay que advertir que la magnitud $\frac{Q}{a}$ queda efectivamente expresada en tiempo lo que resulta del cociente $\frac{\frac{unidades}{1}}{\frac{unidades}{unidades\ de\ tiempo}} = unidades\ de\ tiempo$. Por otra parte el tiempo transcurrido desde el instante inicial $t = 0$ hasta $t = \frac{Q}{a}$ es el llamado ciclo del stock.

Todo el análisis anterior ha comenzado al suponer que el tamaño inicial del lote es Q. ¿Es éste un valor fijo?, y si no lo es ¿de que depende su elección? Distintos valores iniciales de Q conducirían a distintas gráficas para la operatoria del inventario con diferentes longitudes para los ciclos aunque con la misma pendiente de los segmentos proporcionada por la tasa de extracción a. La Gráfica 2 muestra esta situación.

Gráfica 2



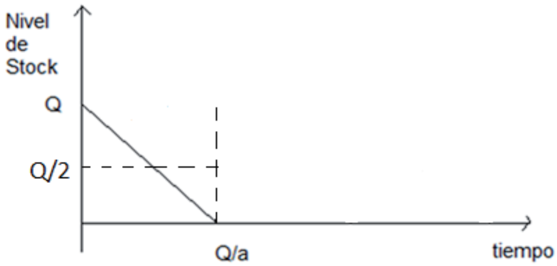
Como apuntamos en la introducción, se busca llevar el stock con el mínimo costo de manera que podemos preguntarnos acerca del tamaño de lote nos conducirá a él. En otras palabras, cada uno de los “serruchos” dibujados superpuestamente en la Gráfica 2 está asociado a un costo de la operatoria y estamos interesados en hallar al menos un valor de Q que haga ese costo mínimo. Tal valor permitirá también calcular la duración $\frac{Q}{a}$ del ciclo correspondiente. Si así hacemos habremos contestado las preguntas sobre que tamaño debe tener el lote y cada cuanto debe renovarse el stock para que el costo de la operatoria sea mínimo.

Un enfoque en general nos llevaría a considerar primero el costo que asumimos en un ciclo. Así resulta:

$$C(Q) = k + cQ + h\frac{Q}{a}\frac{Q}{2} = k + cQ + h\frac{Q^2}{2a}$$

Este costo por ciclo considera que para integrar la cantidad Q en el stock al principio se ha tenido que pagar, por una única vez en el ciclo, el costo *k de pedido o preparación* que fue detallado más arriba. A este se suma el costo de adquirir Q artículos cada uno de los cuales tiene un costo *unitario c* estableciéndose entonces la cantidad cQ por los Q artículos a precio individual c. Finalmente se adiciona también el costo de *mantenimiento*. Para calcularlo se observa que, al principio del ciclo, digamos en el instante 0, el nivel del stock es Q mientras que al final del ciclo el nivel de stock es 0. La disminución de este nivel de stock desde Q hasta 0 se ha producido en forma directamente proporcional al tiempo transcurrido de modo que para simplificar la cuenta podríamos considerar que el stock se mantiene en forma constante durante todo el lapso de tiempo $\frac{Q}{a}$ en una cantidad promedio $(Q + 0)/2 = Q/2$ como se muestra en la Gráfica 3 .

Gráfica 3



Con esto tendríamos que considerar en cada unidad de tiempo el costo $h\,Q/2$ y como la cantidad de unidades de tiempo del ciclo es $\frac{Q}{a}$ resulta que el costo de mantenimiento en el ciclo es $h\frac{Q}{2}\frac{Q}{a} = h\frac{Q^2}{2a}$ Así el costo total del ciclo queda $C(Q) = k + cQ + h\frac{Q^2}{2a}$

Sin embargo, esta fórmula hallada para el costo por ciclo no revela aún como decrece el stock en la unidad de tiempo que se considere, ya sean días, semanas o años. Para considerar el costo en la unidad de tiempo hace falta dividirla por la duración en unidades de tiempo del ciclo. Así obtendremos la expresión del costo por unidad de tiempo en función del nivel que en cada momento tenga el stock.

$$T(Q) = \frac{C(Q)}{\frac{Q}{a}} = \frac{k + cQ + h\frac{Q^2}{2a}}{\frac{Q}{a}} = \frac{ka}{Q} + ca + h\frac{Q}{2}$$

Es decir $T(Q) = \frac{ka}{Q} + ca + h\frac{Q}{2}$ resulta la fórmula del costo por unidad de tiempo.
Este costo resultará mínimo para un cierto valor de Q que denotaremos como Q^*.
Utilizamos el cálculo diferencial de una variable haciendo 0 la derivada de la función de costo por unidad:

$$\frac{dT}{dQ} = -\frac{ka}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0$$

Obtenemos $-\frac{ka}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0$ y despejando $Q^2 = \frac{2ak}{h}$. Para hallar Q^* debemos considerar solo la raíz cuadrada positiva de Q pues una cantidad negativa no tendría sentido como respuesta. Al ser positivas todas las cantidades involucradas en el cálculo, la derivada segunda resulta

$$\frac{d^2T}{dQ^2}\Big|_{Q=\sqrt{\frac{2ak}{h}}} = 2\frac{ka}{(\sqrt{\frac{2ak}{h}})^3} > 0$$

Se tiene entonces que $Q^* = +\sqrt{\frac{2ak}{h}}$ realiza el mínimo costo $T(Q^*)$. El ciclo que produce el costo mínimo dura entonces un tiempo $t^* = \frac{Q^*}{a}$ Obsérvese que hemos contestado las dos preguntas que propusimos: Q^* es el tamaño óptimo del lote a pedir y t^* la duración óptima del ciclo pues ambas aseguran el costo mínimo.

Ejemplo 1: La Librería Universitaria tiene una demanda constante de 18000 ejemplares de un manual de economía por año. Esta demanda se satisface sin acumulación de atrasos. Cada pedido a la editorial proveedora cuesta 30 pesos y el mantenimiento en existencia de cada ejemplar es de 50 centavos mensuales. Suponiendo un año de 300 días laborables:

a- ¿Cuál es el nivel de inventario y el tiempo óptimo entre pedidos?
b- ¿Cuántos pedidos anuales deben hacerse?
c- Si el costo de cada libro es de 5 pesos ¿Cuál es el costo total anual?

a- El primer asunto con el que nos topamos es la necesidad de trabajar todas las cantidades en un mismo sistema de unidades. No es posible considerar algunas variables en pesos y otras en centavos o algunas en años y otras en meses, por ejemplo, así que debemos unificar nuestras medidas. La elección de las unidades debe entonces hacerse con el arte necesario para simplificar todas las cuentas en lo más que se pueda y no para complicarlas de modo que, en este problema en concreto, ese arte, que se aprende con la práctica solamente, nos indica que debemos trabajar en pesos y años. Interpretando las cantidades del enunciado quedan entonces:

k=30$
c=5$/libro
h=(0,5$/libroxmes)x12 meses=6$/libroxaño

Es importante entender que en la práctica comercial la notación $/libro expresa una división, aunque se "lea" como "pesos **por** libro" induciendo al error de considerarla una multiplicación.

Para calcular el nivel de inventario óptimo al comienzo del ciclo hacemos:

$$Q^* = +\sqrt{\frac{2ak}{h}} = \sqrt{\frac{2x18000\,\frac{libros}{año}\,x30\$}{6\,\frac{\$}{libroxaño}}} = \sqrt{\frac{180000\ librosxlibrosx\cancel{añox\$}}{\cancel{añox\$}}}$$

$$Q^* = \sqrt{180000\ libros^2} = 424{,}26\ libros$$

Esta claramente es una respuesta teórica pues en la práctica la cantidad deberá redondearse correctamente por exceso o defecto al valor entero más próximo. En este caso $Q^* \approx 424\ libros$. Hay que aclarar que el redondeo debe hacerse con buen criterio observando en cada caso las unidades. Si por ejemplo se tratara de pesos quizás pudiera convenir observar hasta el centavo, sobre todo si el costo o beneficio que represente la cantidad en cuestión fuera a darse repetidas veces.

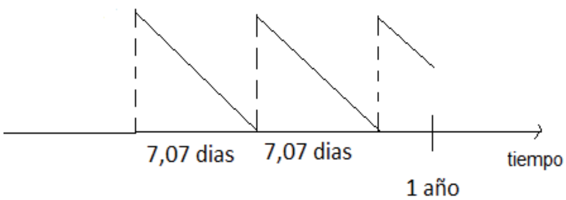
El tiempo óptimo entre pedidos no es otra cosa que la duración del ciclo de modo que calculamos $t^* = \frac{Q^*}{a} = \frac{424{,}26 libros}{18000\frac{libros}{año}} = 0.02357\ \frac{\cancel{libros}xaño}{\cancel{libros}} = 0{,}02357 años$

Se ha indicado que el año laboral es de 300 días lo que se corresponde con meses de 25 días ($\frac{300}{12} = 25$). Entonces: $t^* = 0{,}02357 años = 0.02357x12\ meses = 0.28284\ x25\ dias = 7{,}07\ días$ y redondeando $t^* \approx 7\ dias$

Este último cambio de unidades permite interpretar mejor la duración del ciclo y por eso se lo ha realizado, aunque en términos de cálculo no fuese necesario.

b- Si deben pedirse a la editorial 424,26 libros cada 7,07 días (aquí se toman las cantidades sin redondear para que al final resulten más exactos los cálculos) la cantidad de pedidos anuales se puede calcular por medio del cociente $\frac{300}{7{,}07} = 42{,}43\ pedidos$. Esta cifra requiere también una interpretación como se ve en la Gráfica 4

Gráfica 4



En un año exacto se consumen 18000 libros. En efecto si hacemos el producto $424{,}26\ libros\ x\ 42{,}43 = 18001.35 \approx 18000$ atribuyendo la imprecisión a las aproximaciones por redondeo realizadas. Ahora bien; si se hicieran 42 pedidos no se cubriría la demanda del año pues se llegaría hasta el día 297 con stock solamente. Pero ese día se realiza el pedido 43 que por la revisión continua supuesta llega en el acto. De este pedido se consume solo una parte hasta completar los 300 días del año. De modo que aquí el redondeo correcto sobre el número de pedidos es 43.

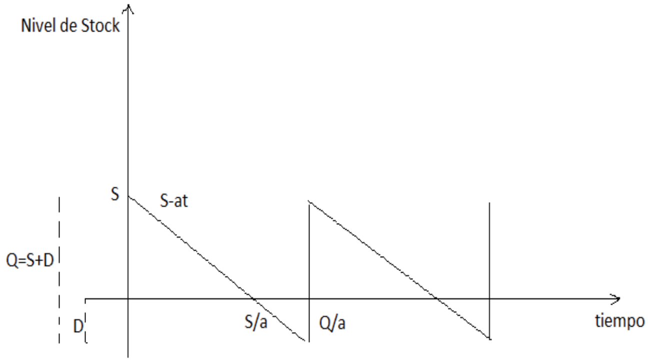
c- La unidad de tiempo que utilizamos inicialmente fue el año. De tal modo si empleamos ahora la fórmula para el costo por unidad de tiempo podremos conocer el costo total anual.

$$T(Q) = \frac{ka}{Q} + ca + h\frac{Q}{2} = \frac{30\$x18000\frac{libros}{año}}{424{,}26\ libros} + 5\frac{\$}{libro}x18000\frac{libros}{año} + 6\frac{\$}{libroxaño}x\frac{424{,}26\ libros}{2}$$
$$= 92545{,}58\frac{\$}{año}$$

IV.2.2 Modelo de Stock Simple con Déficit

Aún bajo los supuestos de demanda uniforme y revisión continua una situación que puede presentarse es que se admita déficit al llevar el inventario. Esto quiere decir que se reciba demanda sobre el stock y que ésta no sea satisfecha en forma inmediata, sino que se deje incrementar el faltante hasta que un nuevo lote cubra el mismo y lleve el nivel de stock otra vez al valor óptimo. Es decir; el tamaño Q del lote a pedir deberá llevar el stock a un nivel óptimo S cubriendo primero un déficit D que se ha permitido. La Gráfica 5 esquematiza la cuestión.

Gráfica 5

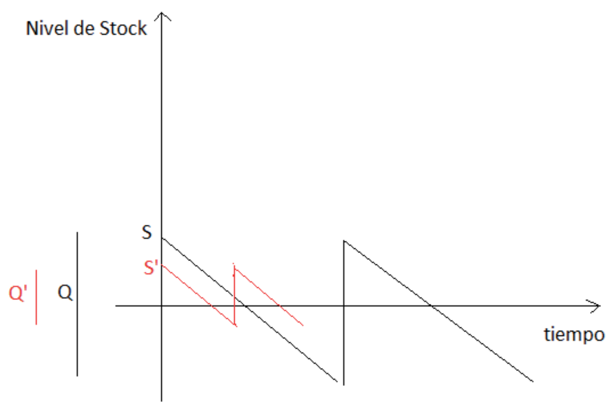


La tasa de extracción del stock es a y por lo tanto al ser la demanda uniforme el inventario cae con esa pendiente desde un nivel original S. El déficit resulta la diferencia entre el tamaño Q del lote pedido y el nivel de stock S, D=Q-S. Si el nivel de stock esta en 0 resulta:
$S - at = 0$ lo que ocurre a un tiempo $t = \frac{S}{a}$ que surge directamente al despejar. Por otra parte, si se ha alcanzado el total del déficit D, la ecuación de la recta revela que
$S - at = -D$ es decir;
$S - at = -(Q - S) = S - Q$ y entonces: $-at = -Q$.
Por lo tanto $t = \frac{Q}{a}$ resulta la duración del total del ciclo desde que el inventario estaba en nivel S hasta que alcanzó el déficit D.

Por supuesto permitir un déficit tendrá un costo. En el presente modelo ese costo se estipula según cada unidad faltante en cada unidad de tiempo. Se considera entonces una cantidad p, costo del déficit, de tal forma que sus unidades son
$/unidad x unidad de tiempo

Obsérvese ahora que D=Q-S puede variar según los valores que adopten las variables Q y S, por lo tanto, el costo total al llevar el stock dependerá de ambas. La Gráfica 6 muestra alternativas distintas para valores de Q y S para una misma tasa de extracción a.

Gráfica 6



Al adicionar a las cantidades ya incorporadas en el modelo anterior los valores de S, nivel de stock, y p, costo del déficit, surge el costo por ciclo que depende ahora de las dos variables Q y S:

$C(S,Q) = k + cQ + h\frac{S^2}{2a} + p\frac{(Q-S)^2}{2a}$

Hay que observar que para llegar al nivel de stock S deben adquirirse Q artículos, cada uno a precio c, por lo que cQ es el costo asociado con esto, al que debe sumarse el costo de preparación k. Además hay que considerar que desde el inicio del ciclo hasta que transcurre el tiempo S/a hay mantenimiento del stock que se calcula en promedio S/2 por lo tanto el costo de mantenimiento en el ciclo es $h\frac{S}{2}\frac{S}{a} = h\frac{S^2}{2a}$. A su vez el déficit que comienza en 0 a tiempo S/a alcanza el valor D al llegar al instante Q/a siendo en promedio $\frac{0+D}{2} = \frac{D}{2} = \frac{(Q-S)}{2}$ por lo que el costo del déficit en el ciclo es $p\frac{(Q-S)}{2}\left(\frac{Q}{a} - \frac{S}{a}\right) = p\frac{(Q-S)^2}{2a}$. Así al sumar todos los costos considerados resulta C(S,Q) el costo por ciclo.

Para hallar la fórmula del costo por unidad de tiempo hay que tener en cuenta que el ciclo dura en total Q/a unidades de tiempo. Por lo tanto, se obtiene:

$$T(S,Q) = \frac{C(S,Q)}{\frac{Q}{a}} = \frac{ka}{Q} + ca + h\frac{S^2}{2Q} + p\frac{(Q-S)^2}{2Q}$$

La expresión resultante es función del tamaño del lote a pedir Q y del nivel óptimo de stock inicial S. Se trata entonces de encontrar valores Q^* y S^*que realicen su mínimo. Para ello se plantea el par de ecuaciones en derivada parciales $\frac{\partial T}{\partial Q} = 0$ y $\frac{\partial T}{\partial S} = 0$ de donde se obtiene el punto crítico $(Q^* = \sqrt{\frac{2ak}{h}}\sqrt{\frac{h+p}{p}}$, $S^* = \sqrt{\frac{2ak}{h}}\sqrt{\frac{p}{p+h}})$. Al reemplazar ambos valores en la expresión del determinante Hessiano, resulta $H(Q^*, S^*) > 0$ lo que indica la existencia de un extremo que se comprueba mínimo de la función al notar que $\frac{\partial^2 T}{\partial Q^2}|_{Q,S=Q^*,S^*} > 0$. Hemos obviado aquí el detalle de los cálculos para hacer más ágil la exposición. En suma, hemos obtenido fórmulas para el tamaño del lote Q^* y el nivel de stock inicial S^* que hacen de $T(Q^*, S^*)$ el mínimo de la función de costo por unidad de tiempo del stock.

Ejemplo 2: Una farmacia tiene una demanda de 100 cajas semanales de un analgésico cuyo mantenimiento insume 10 centavos diarios por caja. El costo de la orden de pedido al proveedor es de 50$, el de cada caja de 10 $ y la empresa prefiere admitir déficit en su stock con un costo calculado de 1$ por caja y por día. La farmacia atiende al público de Lunes a Domingo inclusive y se desea estimar:

a- La política óptima para llevar el inventario bajo estas premisas.
b- Costo mensual de la misma.
c- ¿Le convendría más a la farmacia operar sin permitir déficit?

a- Una vez que se pasan los costos de mantenimiento y déficit a semana haciendo $h = 0.10\frac{\$}{caja \times dia} \times 7días = 0.70\frac{\$}{caja \times semana}$ y $p = 1\frac{\$}{caja \times dia} \times 7días = 7\frac{\$}{caja \times semana}$, se puede calcular $Q^* = \sqrt{\frac{2 \times 100 \times 50}{0.7}}\sqrt{\frac{0.7+7}{7}} = 119.52 \times 1.05 = 125.49 \approx 125\ cajas$ que es el tamaño óptimo del lote a pedir. Obsérvese que el factor 119.52 representaría el tamaño óptimo del lote si no se admitiera déficit. Por otra parte el ciclo de repedido estaría en $\frac{Q^*}{a} = \frac{125.49}{100} = 1.25\ semanas.$

b- Para calcular el costo mensual conviene suponer que la operatoria de la farmacia se realiza en un año comercial de 360 días y que por lo tanto consideraremos un mes de 30 días. Así un ciclo de 1.25 semanas de duración equivale a uno de $1.25 \times 7\ días = 8.75\ días$. De tal forma en el mes de 30 días entrarían $\frac{30\ dias}{8.75 dias} = 3.43\ ciclos.$

Al tener en cuenta que el nivel óptimo de stock es $S^* = 119.52 \times \sqrt{\frac{7}{0.7+7}} = 119.52 \times 0.95 = 113.54 \approx 114\ cajas$ se calcula el costo por ciclo como:

$$C(114{,}125) = 50 + 10 \times 125 + \frac{0.7 \times 114^2}{2 \times 100} + \frac{7 \times (125 - 114)^2}{2 \times 100} = 1348.32\$$$

Finalmente, el costo mensual resultará de multiplicar el costo del ciclo por la cantidad de ciclos que caben en un mes. $Costo\ Mensual = 1348.32 \times 3.43 ciclos = 4624.74\$$

c- Si no se admitiera déficit el lote óptimo sería, como se apuntó en a-, $Q^* = 119.52$. Por lo tanto, el ciclo de repedido sería de $\frac{Q^*}{a} = \frac{119.52}{100} = 1.20\ semanas$, lo cual es equivalente a $1.20 \times 7 = 8.40\ días$. De esto se desprende que la cantidad de ciclos en el mes sería $\frac{30}{8.40} = 3.57\ ciclos$

Calculando ahora el costo por ciclo sin déficit se tiene $C(119.52) = 50 + 10 \times 119.52 + \frac{0.7 \times 119.52^2}{2 \times 100} = 1295.2\$$. El costo mensual sin que se permita déficit es entonces: $1295.2 \times 3.57 = 4623.86.$

Resulta entonces que el costo mensual de la operatoria con déficit, calculado en b-, de 4624.74 $ es muy parecido al de la modalidad de no admitir déficit alguno, 4623.86. Por lo tanto, a la farmacia no le convendría modificar su forma de venta si ello implicara algún costo adicional en la adaptación al nuevo sistema.

IV.3 Un modelo con restricciones de almacenamiento

Vamos a analizar ahora un interesante caso. Se trata de la situación en la que se acumulan varios tipos de artículos para satisfacer, sin permitir déficit, la distinta demanda que cada uno pueda tener a la vez que se cuenta con una cantidad limitada de espacio total para almacenarlos.

Para ilustrar el razonamiento comenzamos suponiendo que deseamos acumular un solo tipo de artículo. En tal caso, a las cantidades involucradas en el modelo de stock simple desarrollado en IV.2 1- habrá que agregar que el espacio total disponible, medido en unidades de volumen o de superficie, es l y que l es la cantidad de espacio ocupada por cada artículo en cuestión. Resulta entonces que la restricción de lugar físico quedará expresada por la desigualdad $lQ \leq L$ donde Q es la cantidad óptima a pedir y también, en este caso, el nivel máximo que alcanzará el stock.

Ahora bien; Q se calcula minimizando el costo por unidad de tiempo $T(Q)$. Por lo tanto, la restricción adicional incorporada fuerza a la construcción de una función que la tenga en cuenta, según el método del multiplicador de Lagrange. Así resulta:

$$MT(Q,\lambda) = T(Q) - \lambda(lQ - L) = \frac{ka}{Q} + ca + \frac{hQ}{2} - \lambda(lQ - L)$$

Basta ahora con derivar respecto de las respectivas variables e igualar a 0 para encontrar los puntos críticos de esta función bivariada:

$$\frac{\partial MT}{\partial Q} = \frac{-ka}{Q^2} + \frac{h}{2} - \lambda l = 0$$

$$\frac{\partial MT}{\partial \lambda} = -lQ + L = 0$$

Entonces despejando de la primera ecuación obtenemos: $Q^* = \sqrt{\frac{2ak}{h-2\lambda l}}$

Haciendo las cuentas se comprueba que el determinante Hessiano es constantemente negativo, pues *l* es una constante, y por lo tanto no hay un extremo (máximo o mínimo) que quede definido claramente para tal punto. En efecto, no se cumple la condición de suficiencia para la existencia de extremo en ese punto pues:

$$\begin{vmatrix} \frac{2ak}{Q^3} & -l \\ -l & 0 \end{vmatrix} = -l^2 < 0$$

Sin embargo, como la condición del determinante Hessiano positivo no es necesaria, basta determinar un valor del multiplicador que, junto con la cantidad Q^* realice un mínimo de la función $MT(Q,\lambda)$ para resolver el problema. Hay que observar que con $\lambda < 0$, cuanto más grande sea su valor absoluto más chico se hará Q, aunque siempre positivo. Resulta entonces que el valor de Q^* podrá calcularse variando heurísticamente λ hasta que se cumpla con la restricción de lugar $lQ^* \leq L$

En el caso expuesto hasta aquí Q^* pudo determinarse directamente utilizando la fórmula de la restricción. Sin embargo, esto no sería tan sencillo si hubiese que pedir cantidades diferentes de distintos tipos de artículo y el lugar para almacenarlos siguiera estando restringido a L. Suponiendo que l_i es el espacio que ocupa cada artículo de tipo i, y que Q_i es el tamaño óptimo del stock para ese tipo de artículo, siendo n el número de tipos de artículos a inventariar, la restricción de espacio queda: $\sum_{i=1}^{n} l_i Q_i \leq L$

Para cada tipo de artículo i podría hacerse una deducción similar a la anterior y llegar a que: $Q_i = \sqrt{\frac{2k_i a_i}{h_i - 2\lambda l_i}}$ dónde k_i, a_i, h_i y l_i son, respectivamente, el costo de la orden de pedido, la tasa de extracción, el costo de mantenimiento y el lugar que ocupa cada artículo, para el tipo i.

En este caso se busca heurísticamente el valor de λ para determinar una combinación adecuada de artículos de cada tipo $(Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n)$ que satisfaga la restricción $\sum_{i=1}^{n} l_i Q_i \leq L$

Ejemplo 3: En una industria se fabrican dos productos a los que corresponden los siguientes datos:

		P1	P2
Costo de fabricación	\$/unidad	5	8
Costo de emisión del lote:	\$	6000	8000
Demanda mensual constante:	unidades/mes	12000	18000
Espacio ocupado por unidad:	m3/unidad	0,05	0,06
Costo de almacenamiento:	\$/unidad mes	0,04	0,08

Determinar los lotes óptimos:
-a Si no hay restricción de espacio
-b Si el espacio disponible es igual al 70% del volumen total medio ocupado en el caso –a

a- Para cada producto puede calcularse el lote óptimo mediante la fórmula $Q_i = \sqrt{\frac{2k_i a_i}{h_i - 2\lambda l_i}}$. De tal forma, teniendo en cuenta que en este caso no hay restricciones de espacio para el Producto 1, el lote óptimo es $Q_1 = \sqrt{\frac{2\times 6000\times 12000}{0.04}} = 60000$

Similarmente para el Producto 2

$$Q_2 = \sqrt{\frac{2\times 8000\times 18000}{0.08}} = 60000$$

b- El volumen ocupado por las $Q_1 = 60000$ unidades del Producto 1 es $v_{Q1} = 60000 \times 0.05 = 3000$ m³

El volumen ocupado por las $Q_2 = 60000$ unidades de Producto 2 es $v_{Q2} = 60000 \times 0.06 = 3600$ m³

Resulta entonces que el 70% del volumen promedio es $L = 0.7 \times \frac{3000+3600}{2} = 2310$ m³ Por lo tanto hay que encontrar las cantidades Q_1 y Q_2 que a la vez que satisfacen $(0.05 \times Q_1 + 0.06 \times Q_2)/2 \leq 2310$ realicen el mínimo del costo por unidad de tiempo.

Para empezar, observemos que ese costo resultará de:

$MT(Q_1, Q_2, \lambda) = \frac{6000\times 12000}{Q_1} + 5 \times 12000 + \frac{0.04}{2} Q_1 + \frac{8000\times 18000}{Q_2} + 8 \times 18000 + \frac{0.08}{2} Q_2 - \lambda((0.05Q_1 + 0.06Q_2)/2 - 2310)$

Si λ va disminuyendo, es decir creciendo en valor absoluto, las cantidades $Q_1 = \sqrt{\frac{2\times 6000\times 12000}{0.04 - 2\times\lambda\times 0.05}}$ y $Q_2 = \sqrt{\frac{2\times 8000\times 18000}{0.08 - 2\times\lambda\times 0.06}}$ irán disminuyendo hasta que en algún momento se cumpla que:

$(0.05 \times Q_1 + 0.06 \times Q_2)/2 \leq 2310$

La búsqueda de estas cantidades se denomina heurística pues se va acercando por aproximación a los valores adecuados.

λ	Q_1	Q_2	$(0.05 \times Q_1 + 0.06 \times Q_2)/2$
0	60000	60000	3300
-0.2	48990	52623	2803
-0.3	45356	49827	2629
-0.4	42426	47434	2484
-0.5	40000	45356	2361
-0.52	39563	44972	2338
-0.53	39350	44784	2327
-0.55	38933	44414	2306
-0.547	38995	44469	2309

Así adoptamos como respuesta aproximada $Q_1 = \sqrt{\frac{2\times6000\times12000}{0.04-2\times(-0.547)\times0.05}} = 38995$ y $Q_2 = \sqrt{\frac{2\times8000\times18000}{0.08-2\times(-0.547)\times0.06}} = 44469$

Ejercicios resueltos

Ejercicio N° 1- La demanda de cajas (estuches) de una casa de regalos es de 8000 por año. El costo de almacenamiento por unidad y por año es de $1,20 y el costo de ordenar una compra es de$400. No se permite déficit; el reemplazo es instantáneo. Determinar:

a) Lote óptimo
b) Número de pedidos por año
c) Tiempo óptimo entre pedidos
d) Si el costo de cada estuche es $5. ¿cuál es el costo total anual de los estuches?
e) Si todos los demás valores permanecen constantes y varía el costo de almacenamiento, calcular este último sabiendo que Q^* resulta ser igual a 3000 unidades.

Datos:
Demanda a = 8000 unidades/ año
Costo de almacenamiento h= $1,20/unidad x año
Costo de orden de compra k= $400

a) $Q^* = \sqrt{\frac{2ak}{h}} = \sqrt{\frac{2\times8000u/año\times\$400}{1{,}20año}} = 2309\,unidades$

b) $t^* = \frac{Q}{a} = \frac{2309u}{8000u/anuales} = 0{,}2886\ años \approx 86{,}59\ días\ \approx 3,46\ meses$

c) Pedidos anuales: $\frac{300\ dias}{86{,}59\ días} = 3{,}46\ \approx 4\ pedidos$

d) $T(Q) = \frac{ka}{Q} + ca + h\frac{Q}{2}$

$$T(Q) = \frac{\$400\times8000u}{2309u} + \$5\times8000u + \frac{1{,}20\$}{u}\times\frac{2309u}{2} = \$42771{,}28\ anual$$

e) $Q^* = \sqrt{\frac{2ak}{h}} \rightarrow (3000\ unidades)^2 = \frac{2ak}{h}$

$$h = \frac{2\times8000\ unidades\ \times\$400}{(3000unidades)^2}$$
$$h = 0{,}71\$/unidades\times año$$

Ejercicio N° 2- La sección de compras de una empresa industrial de válvulas de bronce de ½ pulgada ha determinado que el consumo mensual es de 40 unidades. Su precio unitario es de $500. Si se establece que el ciclo del stock debe durar 60 $días$ y que se paga $5 por válvula por día de almacenamiento y $50 por válvula por día de atraso en las entregas se pide calcular:

a) El tamaño del lote

b) Cuantas válvulas se venden sin entrega inmediata
c) Costo en un ciclo

Datos:
Tasa de extracción: a=40unidades/mes
Costo unitario: c= \$500/u
Longitud del ciclo: $t^* = 60\ días$
Costo de mantenimiento: h= \$5/unidadxdía
Costo del déficit: p= \$50/unidadxdía

a) $t^* = 60\ días = \frac{Q^*}{a} \quad t^* \times a = Q^*$

$$Q^* = 2\ meses \times 40\frac{u}{mes}$$

$$Q^* = 80\ unidades$$

b) D= $Q^* - S^*$ $a = \frac{40unidades}{mes} = \frac{\frac{40}{30}unidades}{dia} = 1.33\ unidades/dia$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2ak}{h}} \times \sqrt{\frac{P+h}{P}}$$

$$(80)^2 = \frac{2ak}{h} \times \frac{P+h}{P}$$

$$(80)^2 = 2 \times \frac{1.33k}{5} \times \frac{50+5}{50}$$

$$(80)^2 = \frac{2.66}{5}k \times \frac{55}{50}$$

$$k = \$10936.46$$

$$S^* = \sqrt{\frac{2ak}{h}} \times \sqrt{\frac{P}{P+h}}$$

$$S^* = \sqrt{\frac{2 \times 4/3 \times 10936.46}{5}} \times \sqrt{\frac{50}{55}}$$

$$S^* = 72{,}73 \approx 73\ unidades$$

D= $Q^* - S^*$= 80-73= 7 unidades

c) $C(S,Q) = k + cQ + h\frac{S^2}{2a} + p\frac{(Q-S)^2}{2a}$

$$C(73,80) = 10936.46 + 500 \times 80 + 5 \times \frac{73^2}{2\times1.33} + 50 \times \frac{(80-73)^2}{2\times1.33} = 61874.43$$

Ejercicios propuestos

Ejercicio N° 3- Un fabricante de accesorios para automóviles recibe un pedido de 20.000 paragolpes que tienen que entregar uniformemente en el curso del año (300 días hábiles). Mantener una unidad almacenada le cuesta $500/año y el costo de puesta en marcha para producir cada lote de paragolpes es de $60.000.

a) ¿Cuál es el lote óptimo que debe producirse?

b) ¿Cuál es el lapso en días entre tandas de producción?

c) Si por razones técnicas el fabricante debiera fabricar el 20% mas por lote (20% menos) ¿sería significativa la variación del costo total?

Ejercicio N° 4- Un comerciante debe atender la demanda de un artículo de gran consumo (200.000 unidades por año) cuyo costo unitario es de $ 50 y desea determinar la política de reposición de stocks que le asegure el mínimo costo, sabiendo que el costo administrativo de cada pedido de compra que emita es de $ 15.000 y que el costo de mantenimiento en stock es del orden del 30% anual. Calcular Q^*, t^*, número de pedidos por año (300 días hábiles) y costo total anual.

Ejercicio N° 5- Un comerciante compra un producto a $ 100 por unidad, debiendo pagar por almacenamiento $ 5. Por unidad por día. La orden de compra del producto insume un costo de $ 3.000 y la demanda del mismo es de 50 unidades diarias durante los 20 primeros días del mes y de 20 unidades diarias durante los últimos 10 días del mes. Sabiendo que no hay retraso en las entregas calcular:

a) Nivel de stock transcurridos los 20 primeros días del mes.

b) Nivel de stock para cubrir la demanda de un mes.

c) Costo mensual de almacenamiento.

d) Costo mensual del modelo.

Ejercicio N° 6- Una empresa adquiere un producto cuya demanda se considera constante en lotes óptimos de 5000 unidades. Si el costo de la orden aumenta al doble ¿Cuál será el lote óptimo de reposición? Si el costo de la orden y el costo de almacenamiento por unidad de producto y por unidad de tiempo aumenta en la misma proporción. ¿Qué puede decirse de Q^*?

Ejercicio N° 7- Retomar el ejercicio 3, ahora sabiendo que ese comerciante estima un costo mensual de $ 45 por cada unidad que no se disponga en stock. Calcular lote óptimo, stock óptimo y período de reorden óptimo. Computar costos máximos totales.

Ejercicio N° 8- Un fabricante de camisas tiene un pedido de 135.000 camisas anuales. El costo inicial de producción es de $ 4.000. Cada camisa tiene un costo de $ 2.300. El costo de

almacenamiento de cada camisa es e $3 por día. Si hay retraso en la entrega deberá pagar una multa de $1 por camisa por día de atraso.
a) Calcular el lote óptimo.

b) Cuantas camisas se venden con retraso en las entregas.

c) Tiempo y costo de un período.

Ejercicio N° 9- Un concesionario de automóviles tiene una venta diaria de 4 unidades, y sus costos son: $25.000.000 por unidad adquirida a la fábrica, $20.000 diarios por cada unidad que estaciona en un garaje que alquila, $100.000 por cada unidad que le solicitan y no entrega y $300.000 por cada pedido de entrega de unidades que le solicita a la fábrica. Calcular:

a) Cantidad máxima de autos a tener en el garaje que alquila.
b) Porcentaje pedidos no entregados
c) Cantidad de autos a solicitarle a la fábrica en cada pedido.
d) Costo de penalización mensual por autos no entregados.
e) Costo de alquiler mensual del garaje.
f) Costo mensual del modelo de stock.