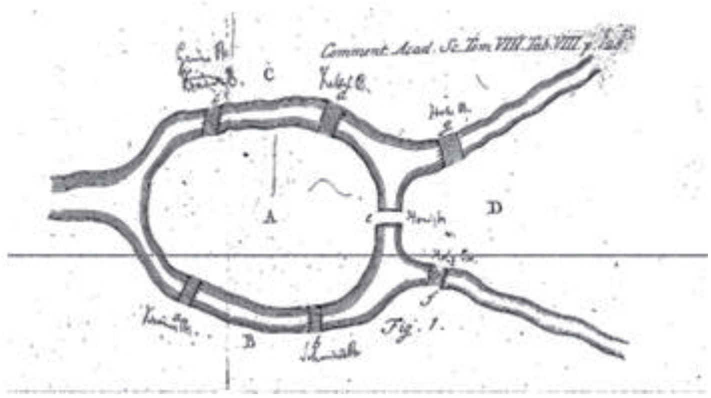
V- Algoritmos en Redes

V.1 Grafos

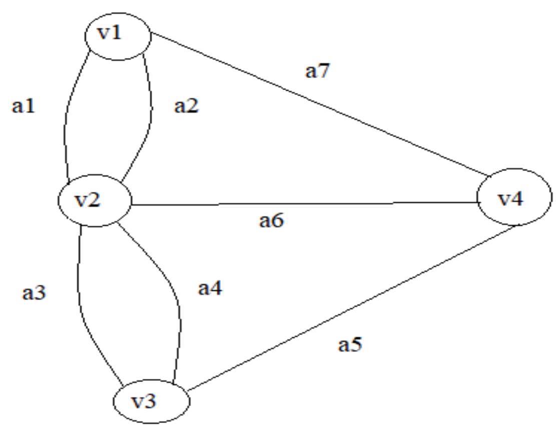
En 1735 el célebre matemático suizo Leonhard Euler planteó y resolvió el llamado problema de los siete puentes. Partiendo de una cualquiera de las cuatro regiones en que quedaba dividida la ciudad Könisberg, ¿podía establecerse un camino que atravesara todas las regiones y volviese al punto de origen pasando solo una vez por cada uno de los siete puentes? La Gráfica 1 es un esquema del problema que intentaba resolver.

Gráfica 1



Si bien Euler demostró que no era posible realizar el recorrido sin pasar al menos dos veces por alguno de los puentes, hizo en realidad mucho más: determinó las condiciones en las que cualquier problema similar puede resolverse afirmativamente. De tal forma dio comienzo a la llamada teoría de grafos que tantas aplicaciones hallara en la ingeniería, entre otros dominios. En términos modernos el problema de Euler puede expresarse por la Gráfica 2.

Gráfica 2.

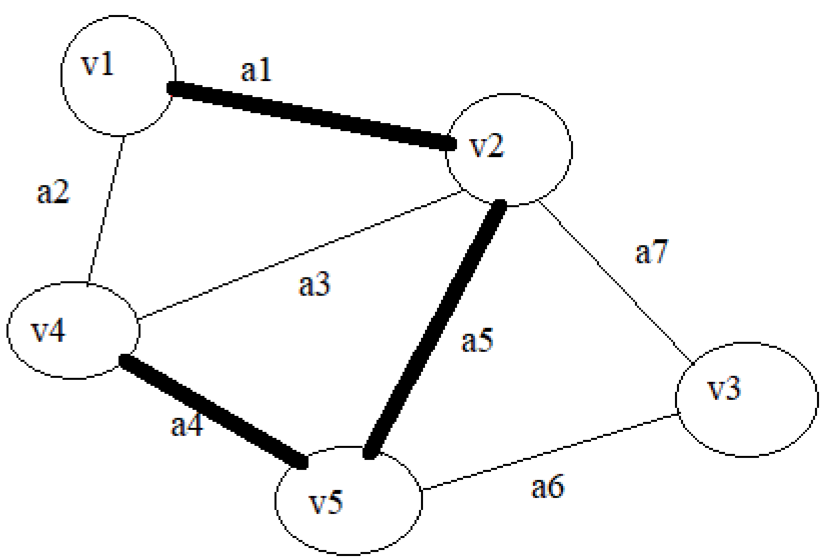


Aquí se muestra un grafo que modela el problema. Cada punto v_1, v_2, v_3 o v_4 representa un sector de la ciudad y cada uno de las líneas *a*, de 1 hasta 7, los diferentes puentes existentes.

En lenguaje matemático, un grafo es una terna (V, A, φ) en la cual V es un conjunto de vértices , A un conjunto de aristas y φ una relación de incidencia que vincula un vértice v_i con otro v_j a través de la arista a. En símbolos $\varphi(a) = (v_i, v_j)$. En el problema original de Euler ocurriría por ejemplo que $\varphi(a_3) = (v_2, v_3)$ Es decir; a_3 sería un puente entre las regiones v_2 y v_3. Está claro que, en este caso, la relación de incidencia podría haberse escrito también $\varphi(a_3) = (v_3, v_2)$ pues el puente sirve para vincular las zonas en ambos sentidos. Además ese puente no es el único que vincula las dos zonas pues también vale que $\varphi(a_4) = (v_2, v_3)$. Es decir, por un lado, dos aristas distintas pueden incidir sobre los mismos puntos y además el orden en que estos puntos se citen carece de importancia. Pero si esto no ocurriera, si un puente pudiera ser atravesado en un solo sentido, el orden del par de vértices cobraría significado. No daría lo mismo citar los vértices en cualquier orden y entonces la relación de incidencia de denominaría dirigida. Así un grafo con aplicación de incidencia dirigida es un grafo dirigido o un digrafo.

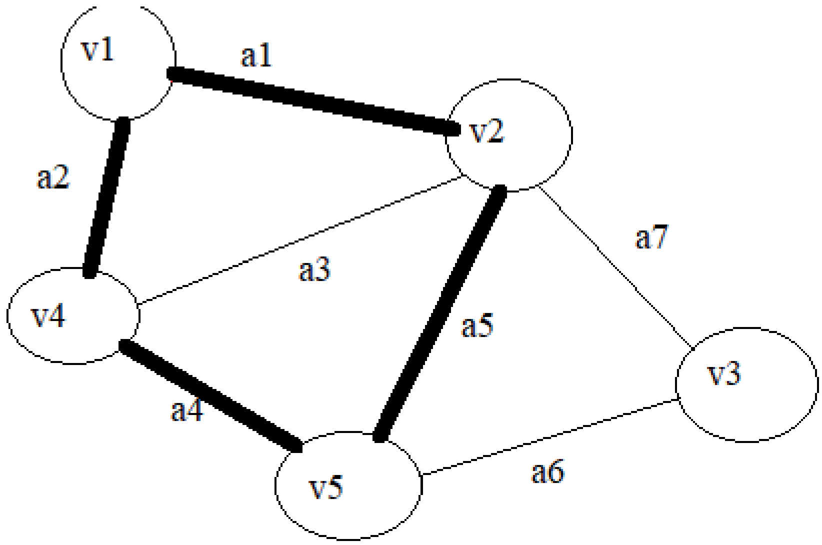
Algunos conceptos adicionales pueden sernos necesarios. Una cadena es una sucesión de vértices y aristas $(v_1, a_1, v_{2,} \dots a_{n-1}, v_n)$ tal que las aristas son todas distintas y cada una incide sobre el vértice precedente y sobre el siguiente. La Gráfica 3 proporciona el ejemplo de cadena $(v_1, a_1, v_2, a_5, v_5, a_4, v_4)$. Se dice que el vértice v_i es alcanzable desde el vértice v_k si hay una cadena que los une. El grafo de la Gráfica 3 es conexo pues cualquiera de sus vértices es alcanzable desde cualquier otro.

Gráfica 3



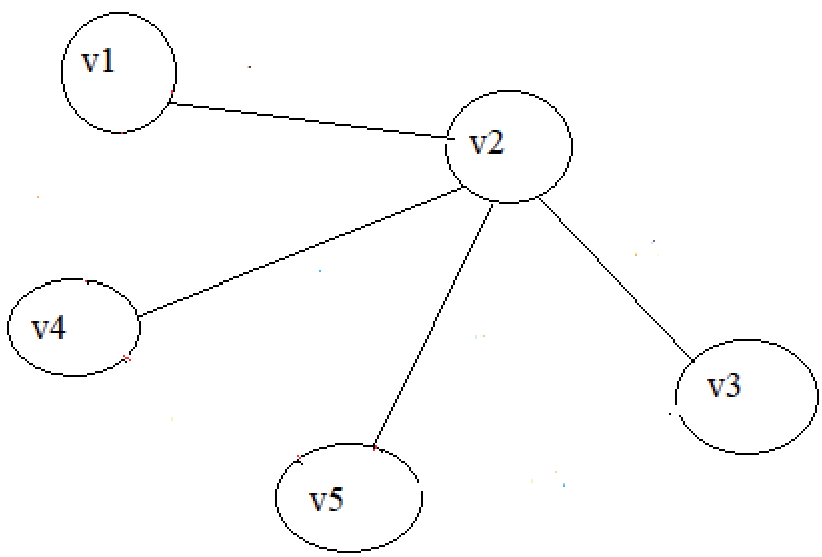
Una cadena cuyo vértice inicial coincide con su vértice final se denomina ciclo. El ciclo $(v_1, a_1, v_2, a_5, v_5, a_4, v_4, a_2, v_1)$ se ve en la Gráfica 4.

Gráfica 4



Finalmente, un árbol es un grafo conexo, es decir que todos sus vértices están conectados, en el cual no existen ciclos. La Gráfica 5 muestra un ejemplo.

Gráfica 5



Cuando cada arco incide sobre un par distinto de vértices, el grafo puede representarse también por su matriz de incidencia. Esta consiste en un arreglo donde cada fila representa un vértice y cada columna también. Las celdas de la matriz se llenan con 1 si hay un arco que incide en el vértice de fila y en el de columna respectivos, y con 0 si no. Así por ejemplo el grafo de la Gráfica 5 es representado por la matriz de incidencia:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

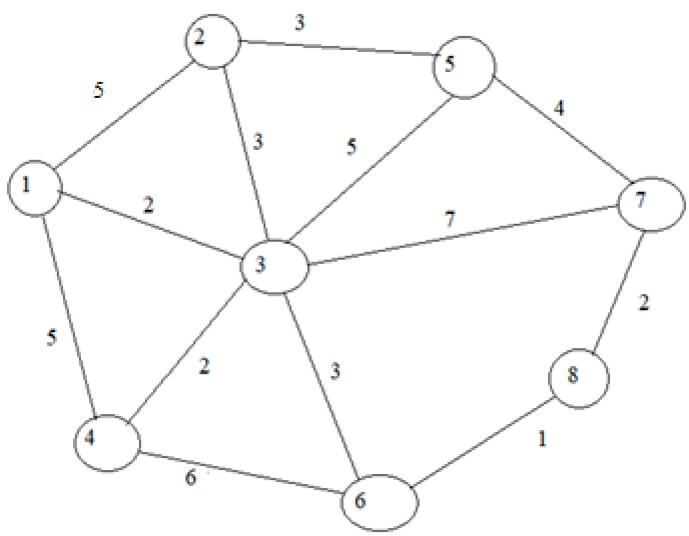
La teoría de grafos, vasta e interesante, ha cobrado relevancia pues es aplicable en muy variados dominios de la ingeniería y las ciencias. En ese contexto modela los sistemas que tienen estructura de red. De tal modo es común denominar red a un grafo, nodo a un vértice y arco a una arista. Además, los arcos suelen tener una carga que puede representar una medida como distancia, peso, flujo etc. También es común que los nodos sean nombrados por números, los arcos por letras mayúsculas, o incluso invertir esta forma de denominación. La carga de los arcos puede anotarse por cantidades sobre los mismos y cuando un arco es dirigido se representa esta situación con una flecha cuyo origen es el nodo inicial y su final el nodo terminal.

V.2 La ruta más corta

Comencemos con un problema.

En la localidad de Los Antiguos, provincia de Santa Cruz, se proyecta construir, junto al lago Buenos Aires, un complejo de 8 viviendas turísticas situadas, de acuerdo a las características del terreno, a las distancias que en cientos de metros están dadas por la siguiente Gráfica 6.

Gráfica 6



Las casas estarán interconectadas por caminos de tierra que también seguirán la forma del diagrama. Sin embargo, como la casa 1 se encuentra en una de las salidas a la ruta desde el predio y la casa 8 en la otra, se desea asfaltar los tramos de camino necesarios para que ambas salidas queden vinculadas por una vía de circulación rápida y segura en caso de nevadas o emergencias. Por tal razón y, también para minimizar costos, es necesario hallar la ruta más corta entre ambas casas a efecto de construir el camino.

Está claro que la red de casas se modela por un grafo donde cada casa es un nodo y el camino que une cada casa con otra, un arco que puede ser recorrido en ambos sentidos. Los números dispuestos sobre cada arco en el grafo representan en este caso distancias.

Este tipo de problema puede resolverse utilizando un algoritmo desarrollado en 1959 por el informático neerlandes Edsger Dijkstra. La idea consiste en hallar el camino mínimo entre dos nodos de un grafo, lo que en este caso aplica para calcular la ruta más corta entre la casa 1 y la 8. Obsérvese que la red del problema es conexa, todos los nodos están conectados, y también es no dirigida, lo que supone que no hay ningún arco con incidencia dirigida solamente en un sentido.

El algoritmo trabaja evaluando rutas más cortas incorporando nuevos nodos en cada iteración. Los nodos que se incorporan se denominan resueltos. Cada nodo resuelto puede estar conectado a uno o varios aún no resueltos. Pero de estos sólo se considerarán, como candidatos a resolver, aquellos cuya ruta desde el origen, que pasa por el nodo resuelto vinculante, es mínima. Así en cada iteración se elige entre todas las rutas analizadas la más corta. En cada iteración se realizan los siguientes pasos:

i) Se consideran los nodos resueltos conectados a nodos aún no resueltos
ii) Para cada nodo resuelto se elige el nodo no resuelto más cercano
iii) Para cada uno de estos nodos aún no resueltos se calculan sus distancias desde el origen a través del camino que pasa por el nodo ya resuelto que los vincula.
iv) De esas distancias calculadas se elige la mínima y el nodo correspondiente es un nuevo nodo resuelto.
v) Se anota la conexión que resulta de la iteración.

El procedimiento finaliza cuando el camino óptimo llega al nodo final. En todas las operaciones pueden presentarse empates entre múltiples casos.

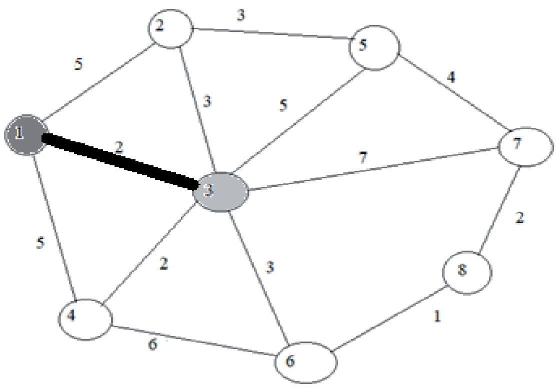
En nuestro problema, para comenzar, se considera el nodo 1 resuelto. El candidato a conectar es el nodo 3 pues es en este caso el de distancia menor al 1 que es el origen. La distancia es 2 y el nodo conectado en esta iteración es el 3. Tenemos entonces el arco 1-3 como última conexión. Esta información puede escribirse algorítmicamente en la siguiente Tabla 1. Sobre ella continúa como se estableció en los puntos i) a v)

Tabla 1

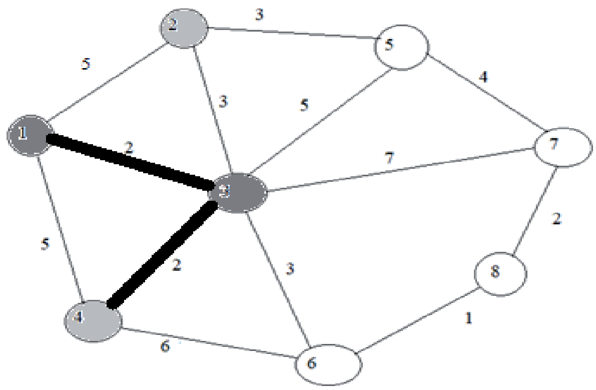
Iteración	Nodos Resueltos Conectados a No Resueltos	Nodos no Resueltos más Cercanos	Distancias	Nuevo Nodo Resuelto	Distancia Mínima	Última Conexión
1	1	3	0+2=2	3	2	1-3
2	1	2	0+5=5			
		4	0+5=5			
	3	4	2+2=4	4	4	3-4
3	1	2	0+5=5	2	5	1-2
	3	2	2+3=5	2	5	3-2
		6	2+3=5	6	5	3-6
	4	6	4+6=10			
4	2	5	5+3=8			
	3	5	2+5=7			
	6	8	5+1=6	8	6	6-8

Es decir; yendo hacia atrás el nodo 8 se conectó con el nodo 6, el 6 con el 3 y este con el 1. La ruta más corta es 1-3-6-8 y la distancia es 6 cientos de metros. El procedimiento realizado se muestra para cada iteración en las gráficas siguientes.

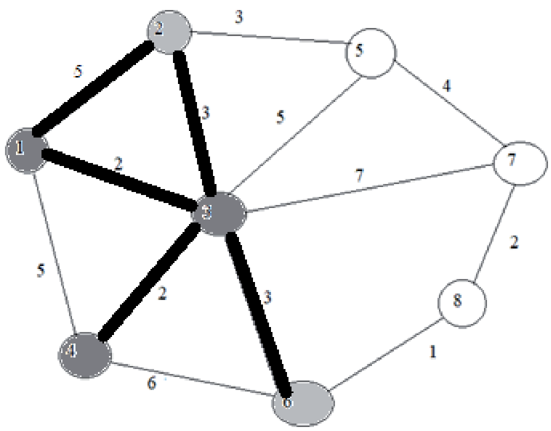
Iteración 1



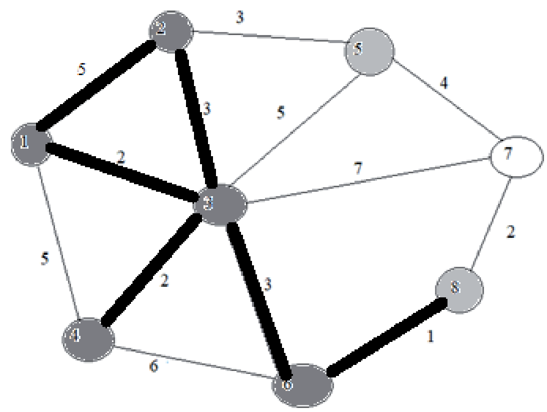
Iteración 2



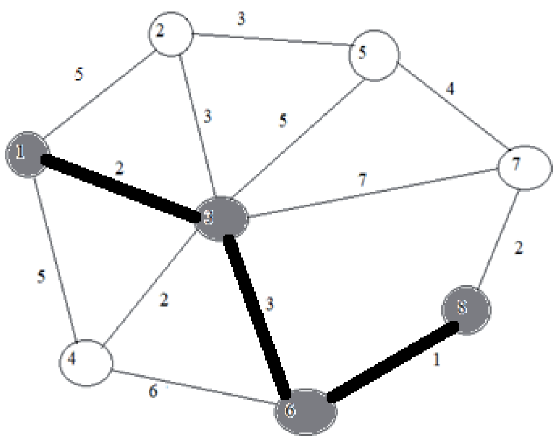
Iteración 3

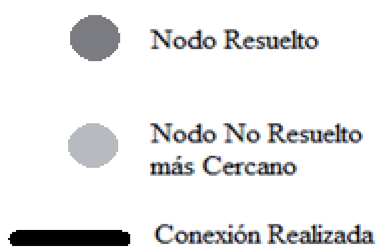


Iteración 4



Ruta más corta





V.3 El árbol de expansión minimal

Supongamos ahora que, en el complejo de casas con el cual estamos ejemplificando, hay que tender el cableado de la luz. Es claro que todas las casas deben ser alcanzadas por la red de luz y que resulta óptimo garantizar el mínimo costo de instalación utilizando la menor cantidad de cable y postes. Para ello se puede diseñar una estructura en árbol que tenga mínima expansión. Es decir que alcance a todas las casas con el tendido mínimo de cable.

El algoritmo para resolver este problema fue desarrollado por el matemático norteamericano Joseph Kruskal en 1956. Sus pasos se detallan a continuación.

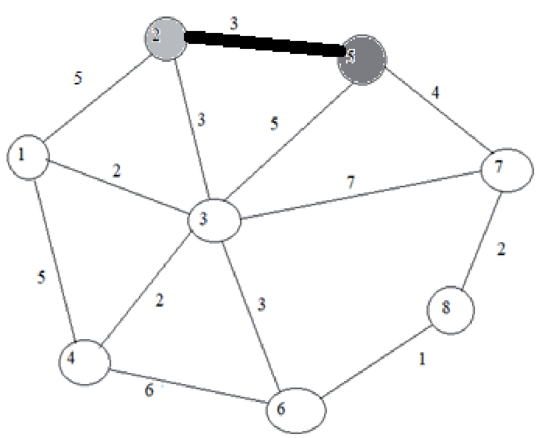
i) Sobre el grafo se elige un nodo cualquiera y se lo considera conectado, es decir resuelto.
ii) De todos los nodos no resueltos se elige los que sean más próximos a uno de los resueltos. Se los conecta y se los considera resueltos.
iii) El procedimiento finaliza cuando todos los nodos están resueltos y el árbol de expansión minimal queda formado.

Para nuestro ejemplo procedemos entonces según indica la tabla.

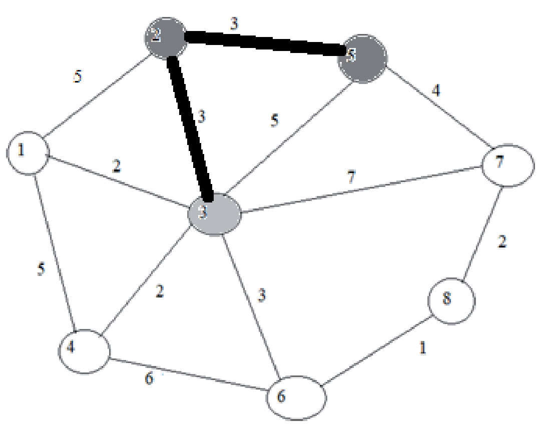
Iteración	Nodos resueltos	Nodo no resuelto más próximo	Nueva conexión
1	5	2	5-2
2	5 y 2	3	2-3
3	5, 2 y 3	1 y 4	3-1 y 3-4
4	5, 2, 3, 1 y 4	6	3-6
5	5,2,3,1,4 y 6	8	6-8
6	5,2, 3, 1, 4, 6 y 8	7	8-7

Las conexiones resultantes constituyen el árbol mínimo buscado. Se muestran ahora en forma gráfica los distintos pasos iterativos realizados.

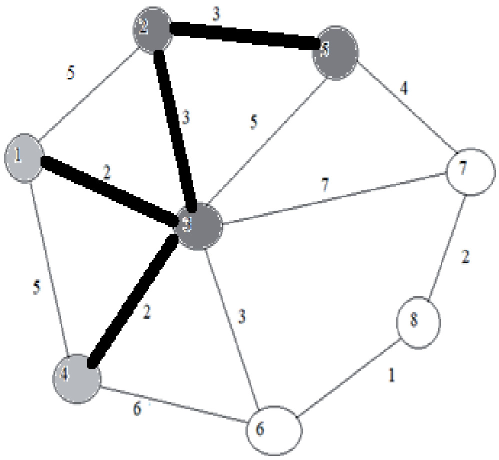
Iteración 1



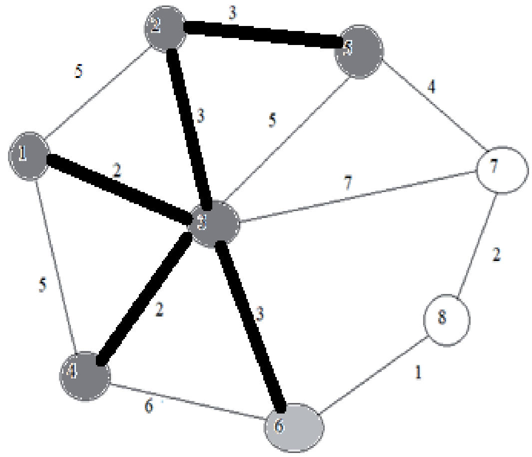
Iteración 2



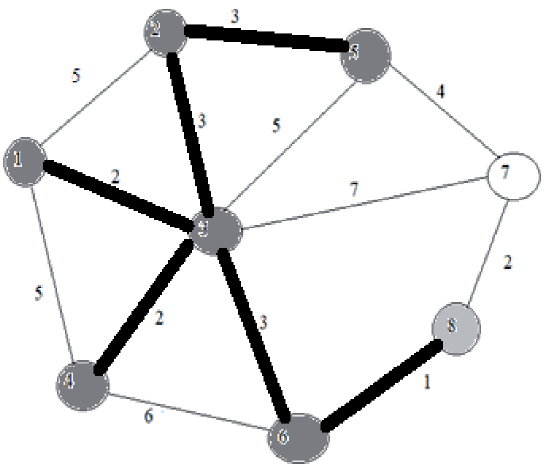
Iteración 3



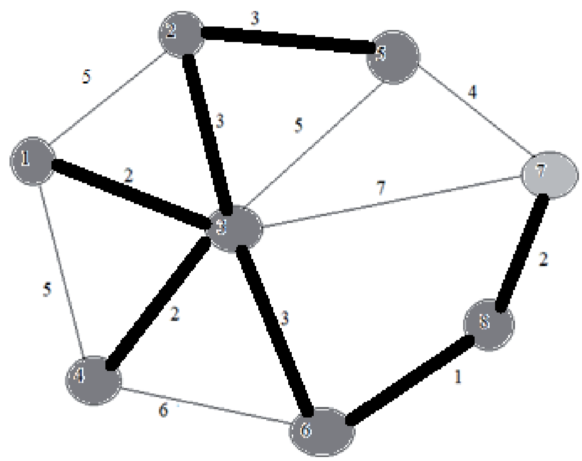
Iteración 4



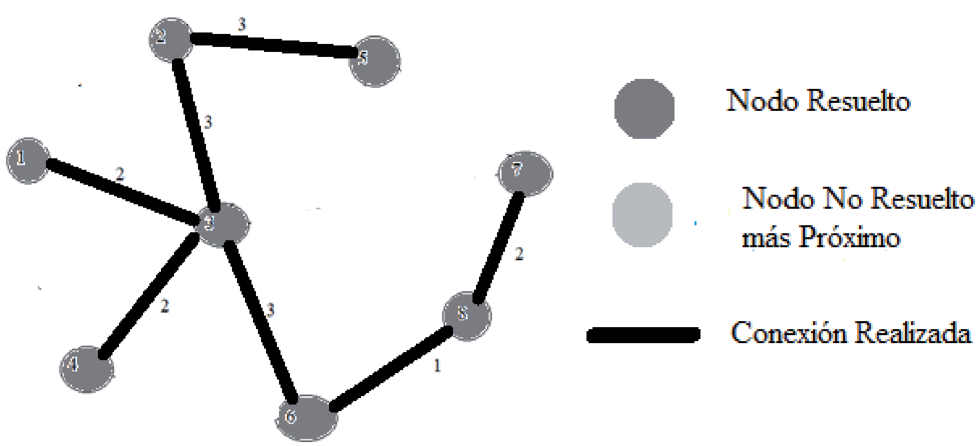
Iteración 5



Iteración 6



El árbol de expansión minimal queda:

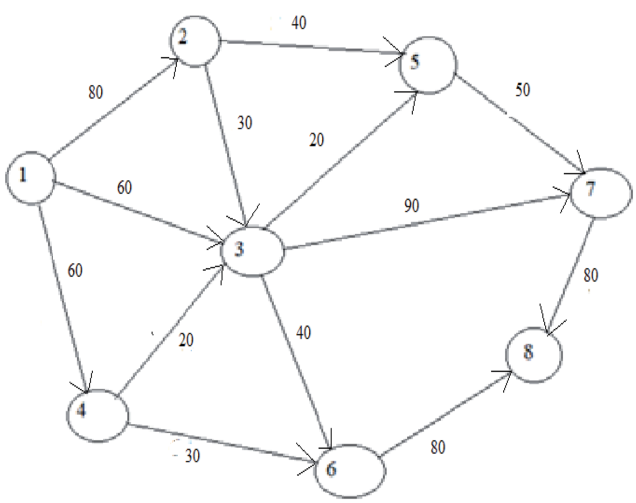


Cualquiera sea la elección del nodo inicial el árbol de expansión minimal será el mismo.

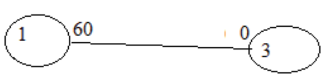
V.4 El flujo máximo

El ya mencionado complejo habitacional de Los Antiguos se construirá sobre un antiguo barrio antes existente y se han aprovechado las cañerías viejas de agua potable pues estaban bien conservadas. Esas cañerías admiten distinto flujo de agua, medido en metros cúbicos de agua por mes, entre casa y casa. Los valores respectivos se han señalado sobre cada arco de la red. El barrio se encuentra en una pendiente que cae desde la casa representada por el nodo 1 hacia la casa que corresponde al nodo 8. Esto quiere decir que cada arco tendrá una dirección de flujo pues, sin contar con una bomba, el agua fluirá en el sentido de la pendiente. La cuestión es que, para conocer el volumen óptimo del tanque, que se ubicará cerca del nodo 1 con el fin de abastecer el consumo mensual del complejo, hay que calcular el flujo máximo de agua que podría correr por la red desde el nodo 1 al nodo 8. La red queda esquematizada, con los flujos y la pendiente de caída respectivos en la Gráfica 7.

Gráfica 7

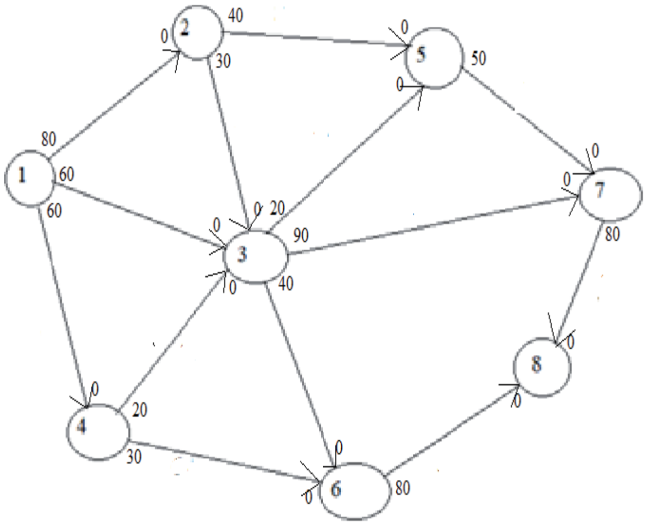


Para calcular el flujo máximo de agua que puede llevarse desde el nodo 1, fuente, hasta el nodo 8, sumidero, hay que considerar que cada arco es dirigido y que inicialmente todo el flujo se encuentra en el nodo origen y nada en el otro nodo extremo. Por ejemplo, en el arco que incide desde el nodo 1 sobre el nodo 3 tal situación puede representarse por:



Extendiendo esta idea, toda la red queda como se ve en la Gráfica 8

Gráfica 8



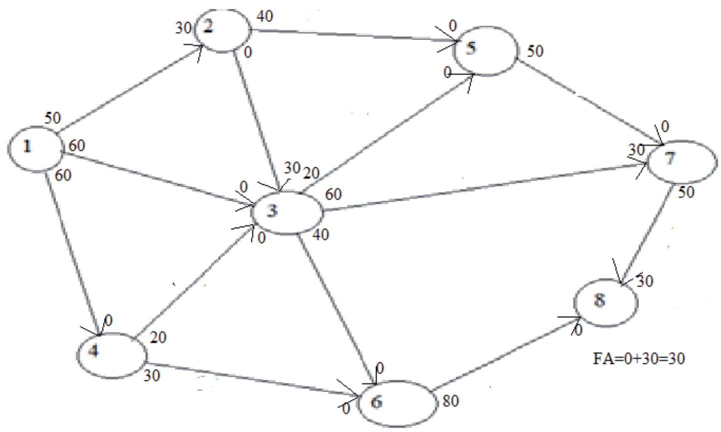
En 1956 los matemáticos norteamericanos Lester Ford y Delbert Fulkerson publicaron un algoritmo que permite resolver el problema del flujo máximo en una red conexa y dirigida. Considerando un nodo inicial fuente, que llamaremos O, y un nodo final sumidero, que llamaremos T, los pasos del método resultan los siguientes.

i) Identificar una cadena (trayectoria) factible desde O hasta T. Si no se puede hallar ninguna trayectoria que permita pasar flujo desde O hasta T el procedimiento finaliza
ii) Determinar su capacidad calculando el mínimo de capacidades de sus arcos
iii) El flujo que llega a T a través de esa trayectoria se acumula sumado en T.
iv) Recalcular los flujos sobrantes para cada arco y la red resultante. Volver a i)

Veamos ahora nuestro ejemplo:

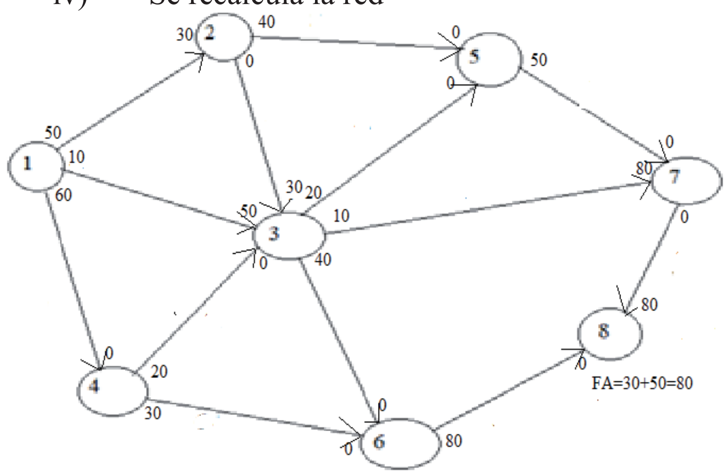
Iteración 1:

i) Se elige arbitrariamente la trayectoria 1->2->3->7->8 y se observa que puede pasar flujo de O a T.
ii) Se calcula el mínimo flujo que puede llegar desde 1 hasta 8 atento a lo que desde cada nodo inicial de un arco de la trayectoria puede fluir hasta el nodo final del mismo. Es decir; $min\{80, 30, 90,80\} = 30$.
iii) Se suma acumulado en T el flujo aportado por la trayectoria: FA=0+30=30.
iv) A continuación, se recalcula la red.



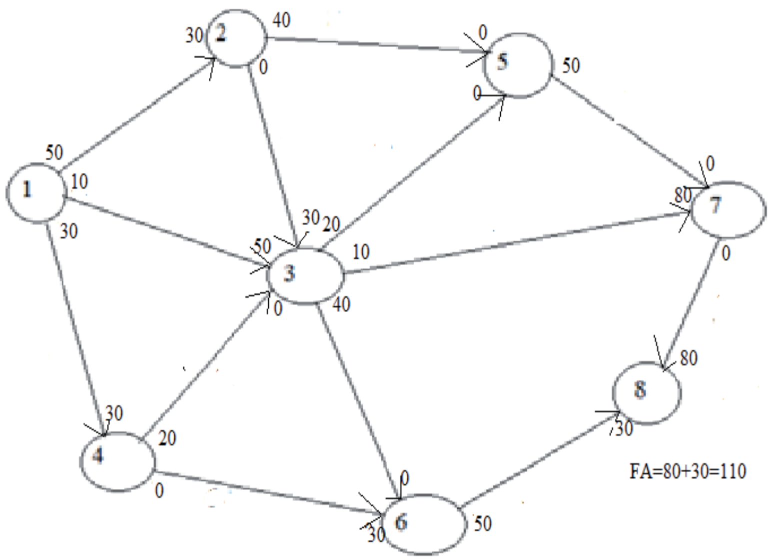
Iteración 2:

i) Se elige la trayectoria 1->3->7->8 y se observa que puede pasar flujo de O a T.
ii) $min\{60,60,50\} = 50$
iii) FA=30+50=80
iv) Se recalcula la red



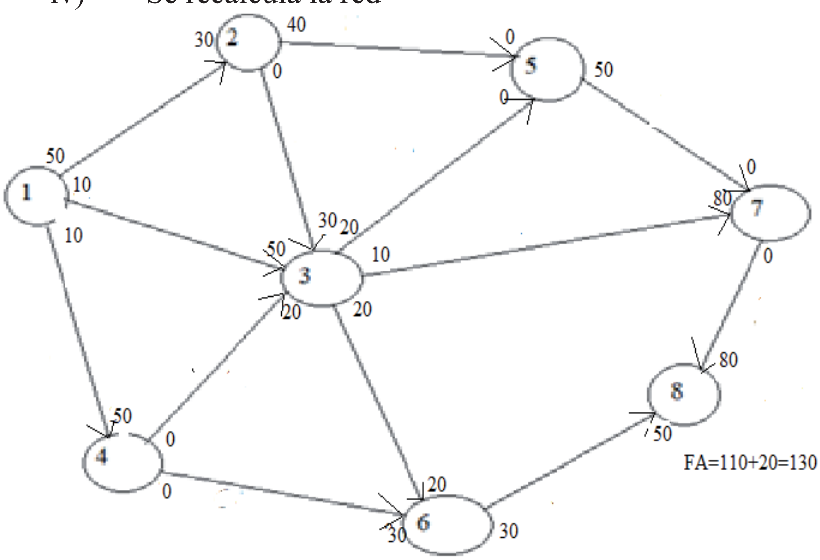
Iteración 3:

i) Se elige la trayectoria 1->4->6->8 y se observa que puede pasar flujo de O a T.
ii) $min\{60,30,80\} = 30$
iii) FA=80+30=110
iv) Se recalcula la red



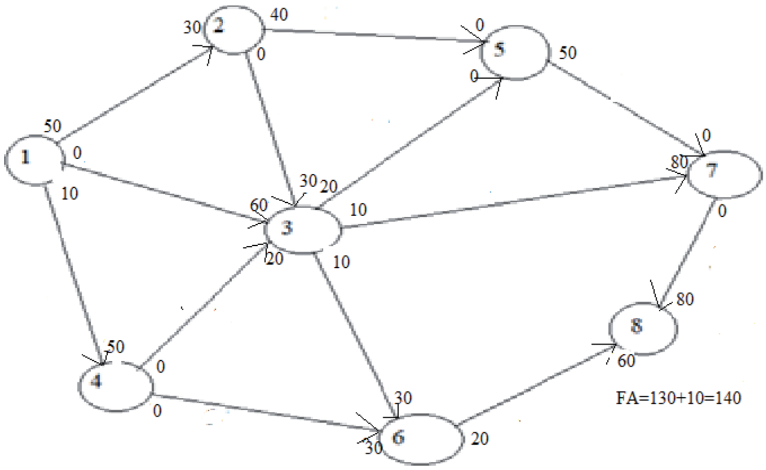
Iteración 4:

i) Se elige la trayectoria 1->4->3->6->8 y se observa que puede pasar flujo de O a T.
ii) $min\{30{,}20{,}40{,}50\} = 20$
iii) FA=110+20=130
iv) Se recalcula la red



Iteración 5:

i) Se elige la trayectoria 1->3->6->8 y se observa que puede pasar flujo de O a T.
ii) $min\{10{,}20{,}30\} = 10$
iii) FA=130+10=140
iv) Se recalcula la red



Ya no es posible encontrar una trayectoria que llegue con flujo mayor que 0 desde O hasta T. Por tal motivo y a pesar de que todavía hay capacidad de emisión de flujo desde el nodo 1 el procedimiento no puede continuar y el flujo máximo para esta red es 140 m^3 por mes.

Hallar trayectorias admisibles es algo complicado de hacer en forma visual si aumenta considerablemente el número de nodos y arcos. Por supuesto es posible establecer computacionalmente las reglas del algoritmo de modo de hallarlas, calcular los mínimos, el flujo acumulado y la red resultante.

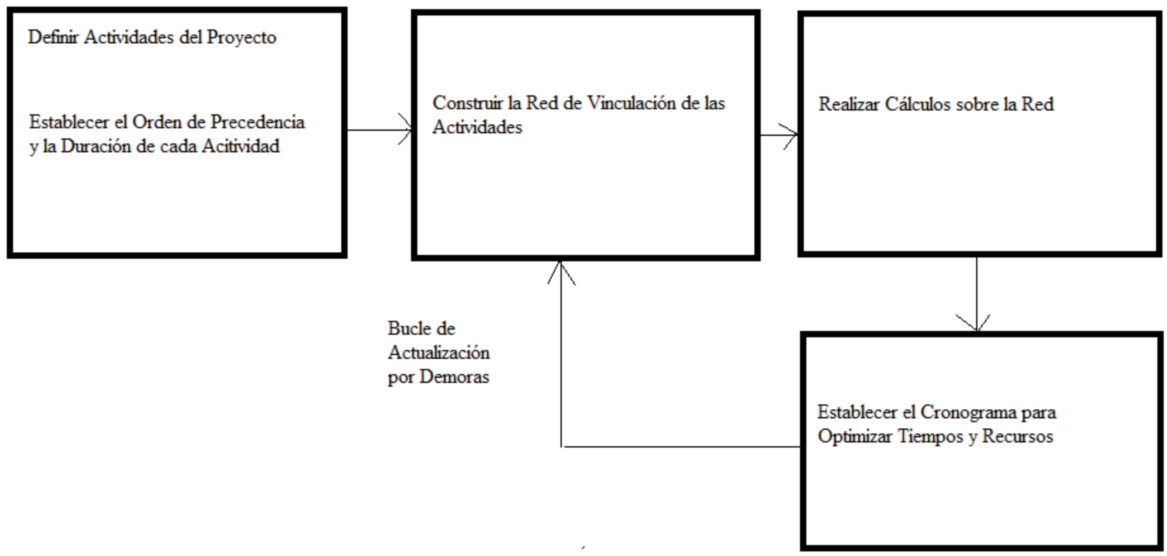
V.5 El camino critico

V.5.1-Introducción

Cuando en ingeniería se realiza un proyecto se evalúan distintos aspectos. Así, se analizan sus distintas etapas, el tiempo necesario para llevarlas a cabo, los costos de mano de obra e insumos, y toda otra situación de relevancia para la tarea a emprender. De tal modo, se identifican las actividades que es necesario realizar y su concatenación desde que comienza la ejecución del proyecto hasta que termina el mismo. Estas actividades muy comúnmente no pueden realizarse sin tener en cuenta un orden de precedencia. Es decir; algunas de ellas requerirán, para ser ejecutadas, que otras ya lo hayan sido o al menos estén en ejecución. Algunas otras quizás puedan llevarse a cabo en cualquier momento antes de la finalización, y se disponga por ende de cierta holgura temporal para realizarlas. En cualquier caso, siempre hay un hilo conductor que establece el tiempo mínimo en el que puede desarrollarse todo el proyecto, y también los puntos temporales donde harán falta las distintas inversiones parciales de dinero. Esa línea temporal de actividades desde el principio hasta el final es lo que se denomina camino crítico. En él se armonizan las precedencias estrictas entre distintas actividades que llamamos críticas y su análisis nos revela también la holgura con la que pueden ejecutarse, dentro del proyecto, aquellas actividades que sean no críticas sin modificar el tiempo de finalización.

El procedimiento para hallar el camino crítico se denomina CPM, acrónimo del inglés Critical Path Method. Fue desarrollado conjuntamente en los sectores de investigación de operaciones de las empresas norteamericanas Dupont y Remington Rand en 1957 con la idea de establecer una forma estandarizada de planear, programar y controlar un proyecto. En general el método involucra 4 partes de acuerdo al diagrama de la Gráfica 10

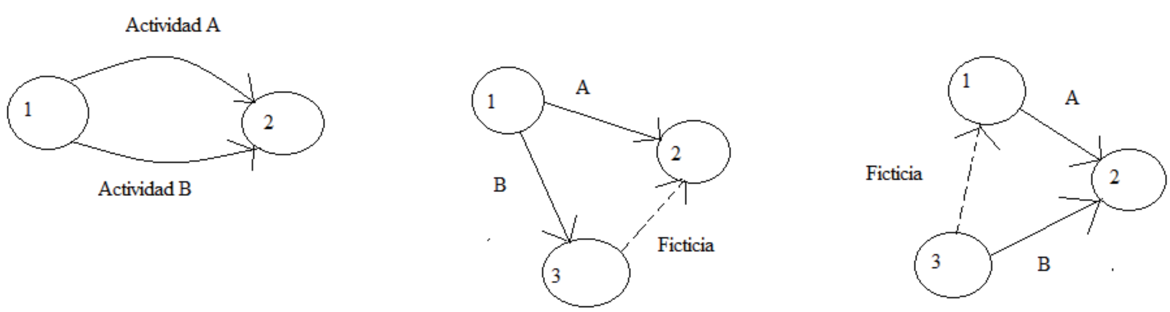
Gráfica 10



V.5.2- Construcción de la red

Cada actividad se representará por un solo arco dirigido y cada arco por un par distinto de vértices. El orden de las actividades en la red deberá guardar las precedencias establecidas al definirlas, por lo cual al analizar la ubicación del arco correspondiente habrá que tomar en cuenta que actividades preceden a la actual, cuales la siguen inmediatamente y si hay actividades concurrentes o simultáneas. En este caso y con el fin de representar cada arco con un par distinto de vértices se puede agregar una actividad ficticia. La Gráfica 11 muestra dos actividades concurrentes y distintas soluciones que incorporando una actividad ficticia logran la representación en la forma buscada.

Gráfica 11

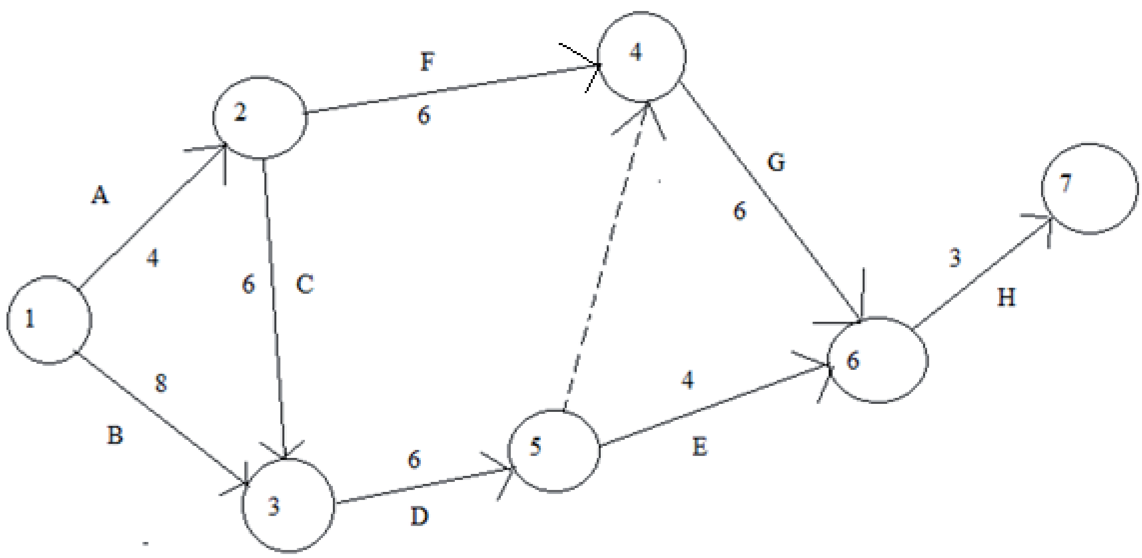


Con estas ideas analicemos ahora el proyecto de construcción del complejo de viviendas en Los Antiguos que ya veníamos considerando. La definición de las actividades necesarias para construirlo, el orden de precedencia establecido por razones de técnica ingenieril y los tiempos necesarios para la ejecución ajustados según el flujo de inversiones posible, condujeron a la siguiente tabla.

Actividad	Denominación	Duración (semanas)	Precedencias
Excavación y construcción de caminos internos	A	4	---
Cimientos y estructuras	B	8	
Techos	C	6	A
Paredes	D	6	B y C
Instalación de Cerramientos	E	4	D
Redes de luz, agua, gas y cloacas	F	6	A
Consolidaciones y asfaltos	G	3	F y D
Parques y jardines	H	3	G y E

De acuerdo a esta información se construye la red del proyecto que se ve en la Gráfica 12

Gráfica 12



Para cumplir con las precedencias y respetar la regla de representar cada actividad con un par diferente de nodos se optó por incorporar una actividad ficticia, de flujo 0, iniciada en el nodo 5 y terminada en el nodo 4 desde el cual comienza la actividad G precedida entonces por F y D.

V.5.3- Los cálculos sobre la red

Estos cálculos se realizan para cumplir con dos objetivos: establecer la duración del proyecto y clasificar las actividades en críticas y no críticas. Una actividad se considera crítica cuando no hay margen de holgura para determinar sus tiempos de inicio y finalización. En cambio, si ese margen existe, la actividad se evaluará como no crítica.

La idea del algoritmo CPM es trabajar con eventos. Un evento es conceptualmente el momento en que termina una actividad y/o se inicia otra. Es decir, un evnto está representado por un nodo de la red construida. Podemos definir entonces:

- Tiempo más temprano de ocurrencia del evento j. $\boxed{}_j$
- Tiempo más tardío de ocurrencia del evento j. $\triangle_j$
- Duración de la actividad representada por el arco entre nodos i y j. D_{ij}

Realizaremos un cálculo en dos pasos:

i. Paso hacia adelante. Determinar los tiempos más tempranos de ocurrencia de los eventos
ii. Paso hacia atrás. Determinar los tiempos más tardíos de ocurrencia de los eventos

i. Paso hacia adelante.

Comienza en el nodo inicial y continua hacia adelante hasta el último.

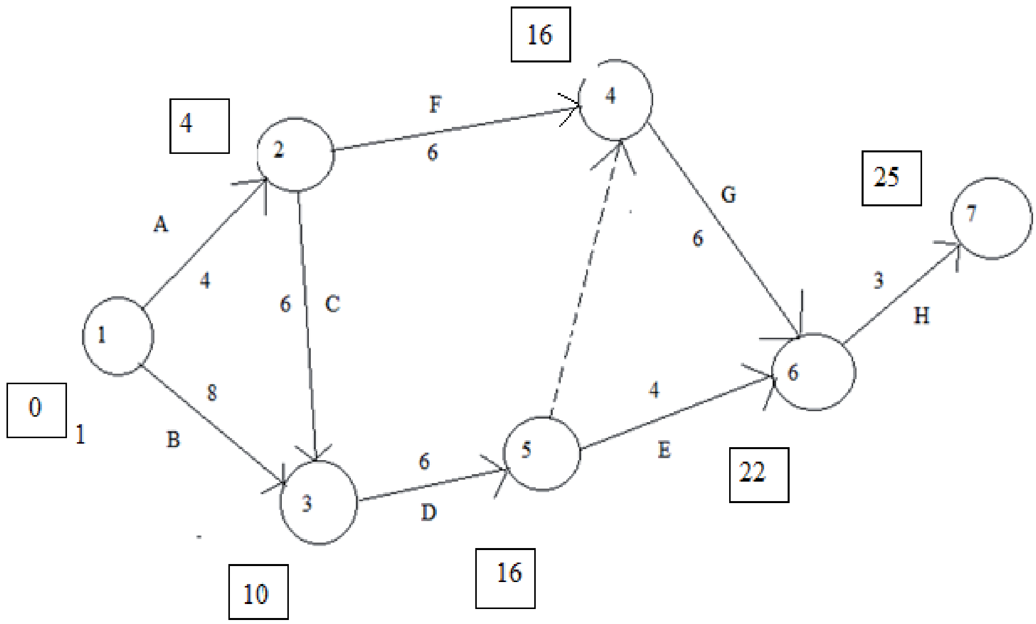
Se $\boxed{0}_1$ coloca en 0 el tiempo de ocurrencia del evento 1 que es el comienzo del proyecto.

La $\boxed{tem}_j$ cantidad tem representa el tiempo más temprano en el que todas las actividades concurrentes al nodo j estarán realizadas y por lo tanto se considerará completamente cumplido el evento. Se calcula

$$tem = \text{Max}\{\boxed{}_p + Dpj, \boxed{}_q + Dqj, \ldots, \boxed{}_r + Drj\}$$

los nodos subindicados con p, q, …, r marcan el evento inicial de cada una de las actividades que concurren al j. D_{pj}, D_{qj}, …, D_{rj} son las respectivas duraciones de esas actividades.

En nuestra red ejemplo este cálculo sería el siguiente



Por ejemplo, en el nodo 3 el tiempo de terminación de la actividad B, cimientos y estructuras, indicaría que desde el nodo 1 habría que sumar las 8 semanas correspondientes. Sin embargo, la terminación de la actividad C, techos, que también concurre al nodo 3 requiere sumar al propio tiempo el que dura la actividad A, excavación y construcción de caminos internos, que le precede. Por lo tanto, el tiempo más temprano en que finaliza toda actividad concurrente al nodo 3 y pueden empezarse las paredes, actividad D, es 10 semanas. El mismo criterio, ya señalado en la fórmula de cálculo de tem arriba, se aplica en los demás nodos.

ii. Paso hacia atrás

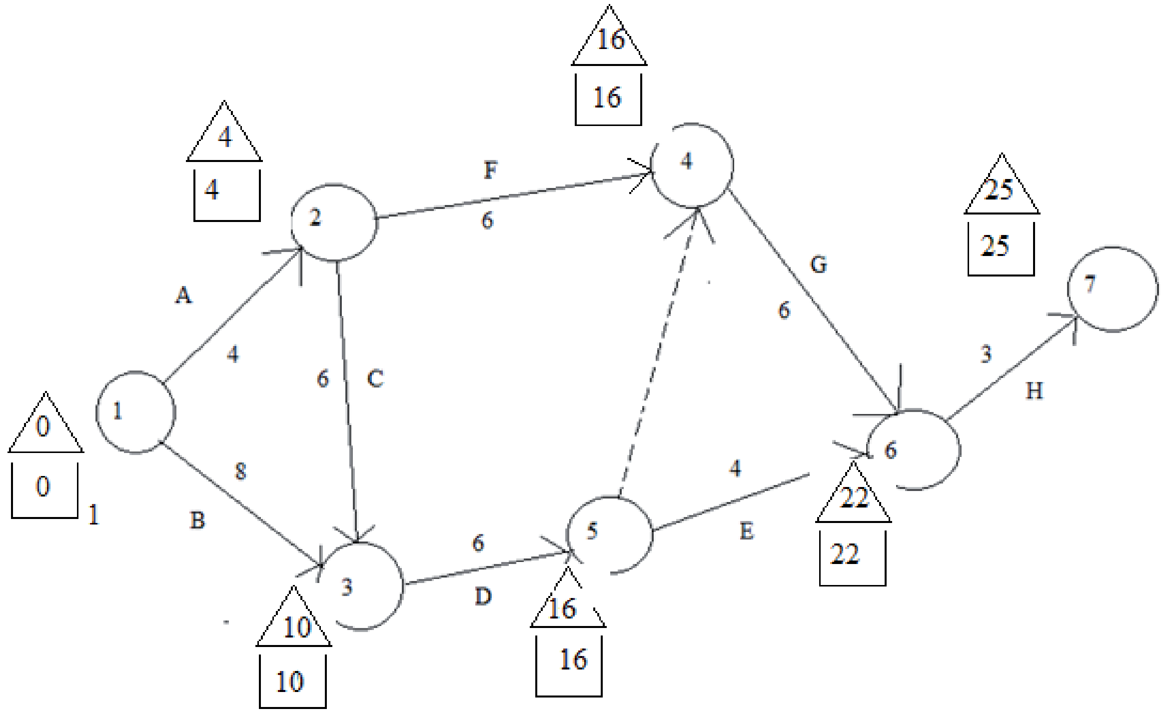
Ahora sabemos que la construcción del barrio deberá demorar 25 semanas, pero aún no hemos establecido que actividades resultan criticas concatenándose de modo de terminar la obra en ese tiempo y cuales son aquellas que tienen una holgura temporal, dentro del lapso establecido, y en qué medida la poseen. El paso hacia atrás permite entonces resolver la cuestión. Comienza en el nodo final y retrocede desde él hasta el inicio.

$\triangle 25_{n} = \boxed{25}_{n}$ Se toma el tiempo obtenido en el paso hacia adelante para comenzar el retroceso. En el caso del ejemplo las 25 semanas tar es el tiempo

$\triangle tar_{j}$ más tardío al que podría empezar la actividad que comienza en el nodo j de forma que, de acuerdo a la precedencia de actividades establecida, se complete el proyecto en el tiempo calculado. Resulta:

$$\triangle tar_{j} = \min \{ \triangle_{p} - D_{jp}, \triangle_{q} - D_{jq}, \ldots, \triangle_{r} - D_{jr} \}$$

El cálculo hacia atrás sobre la red da:

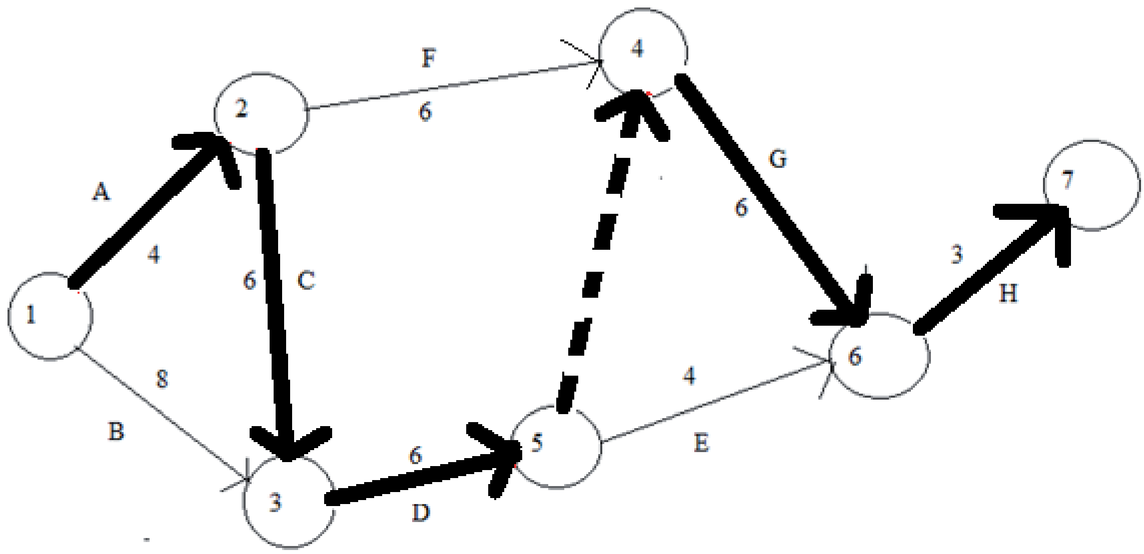


Los respectivos valores de tar fueron calculados por la fórmula escrita más arriba. Ahora debemos analizar cuál es el camino crítico. Para ello establezcamos que una actividad crítica, definida por el par de nodos i y j, debe ser tal que, en esos nodos, los tiempos más tempranos y los más tardíos deben ser iguales, pero, además las diferencias de tiempos tardíos entre nodos y de tiempos tempranos entre nodos deben ser iguales a la duración de la actividad que el arco entre ambos representa. En símbolos:

- $\triangle_i = \square_i$
- $\triangle_j = \square_j$
- $\triangle_j - \triangle_i = \square_j - \square_i = D_{ij}$

Aunque pudiera no haber ocurrido, en nuestro cálculo todas las actividades satisfacen las primeras dos igualdades, mientras que la tercera no se cumple para la actividad B y tampoco para las actividades E y F. De tal forma el camino crítico que resulta el hilo conductor del proyecto en el tiempo, concatena una a continuación de la otra a las actividades A->C->D->G->H. La duración establecida para la ejecución del proyecto es de 25 semanas y las actividades no críticas B, E y F podrán ejecutarse, respetando las precedencias establecidas, con cierta holgura a fijar. La Gráfica 13 muestra la ruta crítica.

Gráfica 13



Como era de esperar la actividad ficticia no figura pues ha jugado solo el papel de vincular nodos para respetar las precedencias.

V.5.4- Construcción del cronograma

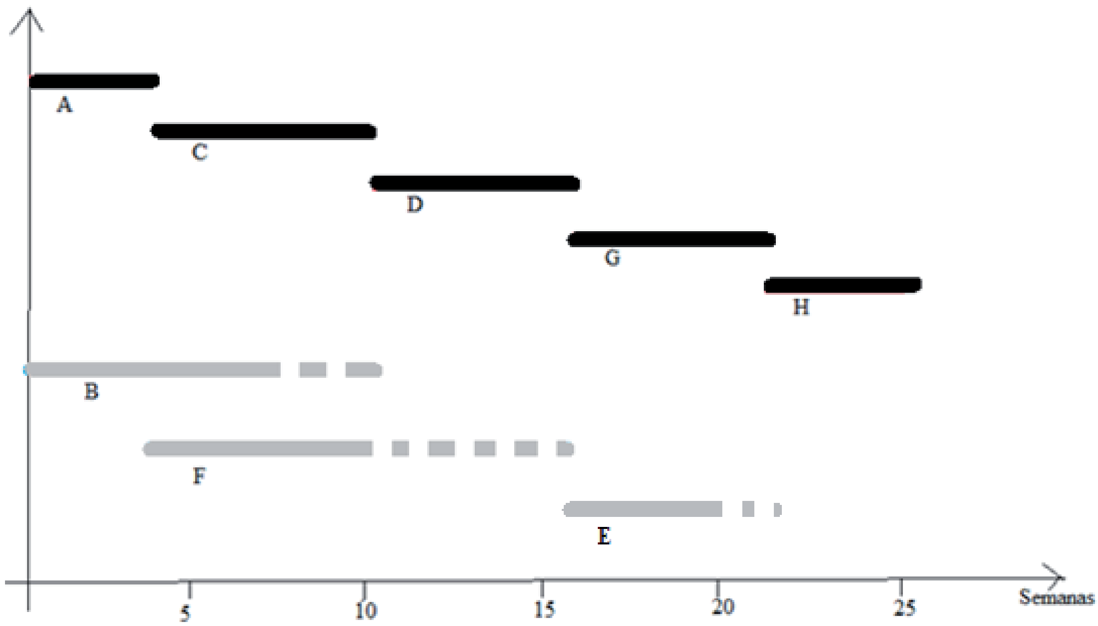
El cronograma nos permitirá controlar el conjunto de las tareas en su evolución y determinar claramente la holgura con la que se cuenta para desarrollar cada actividad no crítica. Si se busca mantener el tiempo de ejecución calculado para el proyecto, una actividad representada por el arco que va desde el nodo i al nodo j, tendrá como holgura la diferencia establecida entre el tiempo más tardío de ocurrencia del evento j y la suma del tiempo más temprano del evento i más su duración. Es decir, la holgura disponible es:

$\triangle_j - (\square_i + Dij)$ Todas las actividades que tengan holgura igual a 0 estarán sobre el camino crítico.

No solo las actividades tienen holgura. Los eventos también pueden poseerla cuando su tiempo más tardío de ocurrencia sea mayor que el más temprano. En ese caso, la holgura del evento estará indicando lo que puede demorarse el cumplimiento de la actividad que en él finaliza, sin que se atrase la realización de todo el proyecto.

Veamos ahora en la Gráfica 14, el cronograma correspondiente a nuestro ejemplo, que no posee holgura para ningún evento, pero sí incluye actividades holgadas.

Gráfica 14



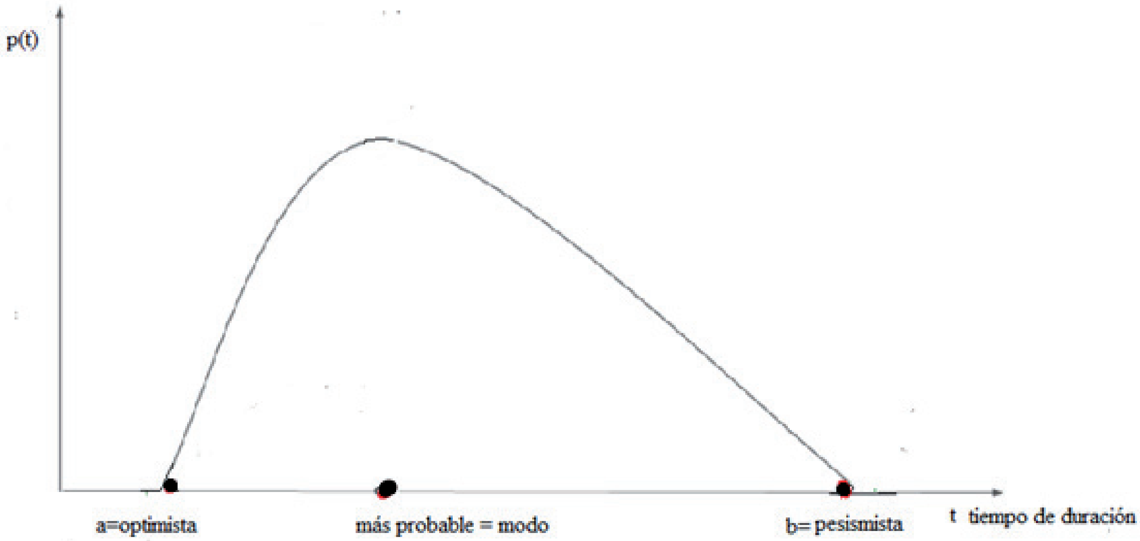
Las actividades señaladas en negro en la Gráfica 14 se concatenan una después de la otra hasta completar el camino crítico a lo largo de las 25 semanas. Las señaladas en gris son las actividades no críticas cuya holgura se marca con la línea punteada. En el caso de la actividad B el tramo va desde el comienzo 0 semanas de las actividades hasta la conclusión de la 10ma semana. Como la actividad se desarrollará en 8 semanas, hay dos que fueron marcadas con línea punteada en forma arbitraria para evidenciar la holgura. Precisamente es esa holgura la que permitiría comenzar la actividad B terminada la 2da semana, ya que todavía deberán transcurrir 8 semanas hasta comenzar con la actividad D que la requiere terminada. Por similares razones la holgura correspondiente a la actividad F, que puede iniciarse concluida la actividad A, es de 6 semanas.

V.6 PERT

Program Evaluation and Review Techniques es el método cuyo acrónimo, en inglés, es precisamente PERT. Esta técnica de revisión y evaluación de programas de producción se diferencia del camino crítico en el hecho esencial que la duración de cada una de las actividades que conforman el proyecto es una variable aleatoria. Es decir, ya no tenemos una certeza sobre el tiempo de duración de cada actividad sino una incertidumbre acerca de él, que medimos a través de una distribución de probabilidad. Habrán de considerarse entonces tiempos optimistas, pesimistas y más probables de ejecución, que caracterizarán el rango de esa variable aleatoria. Por su naturaleza, el PERT resulta muy adecuado para evaluar y controlar proyectos de investigación y desarrollo tecnológicos, en los cuales comúnmente no es posible fijar con precisión el tiempo que durará la realización de cada una de las actividades. El método y sus suposiciones fueron planteados en EEUU hacia 1956, para aplicaciones de tipo militar, casi en simultáneo con el CPM.

Se comienza por suponer que el tiempo que tarda en desarrollarse una actividad es una variable aleatoria que se distribuye β. Según sus parámetros la función de densidad de tal variable tiene muy distintas formas. Los parámetros elegidos para el caso conducen a la forma aproximada que se muestra en la Gráfica 15.

Gráfica 15



Hay un tiempo optimista, un tiempo pesimista y uno más probable *m* que se corresponde con el modo de la variable aleatoria. Se ve claramente que la distribución no es simétrica y que por lo tanto el valor del modo habrá de ser en este caso menor que el de la media o tiempo esperado, que es precisamente la esperanza matemática de la distribución que responde a la fórmula $t_e = \int_{-\infty}^{\infty} tp(t)dt$

A continuación, se asume un segundo supuesto. Como la función es medianamente simétrica y acampanada, en el intervalo $[optimista, pesimista]$ caben 6 desvíos estándar a semejanza de lo que ocurriría en una distribución normal aproximante. Por lo tanto, $\sigma^2 = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$ resultará una buena aproximación de la varianza de la distribución β que modela el tiempo de desarrollo de la actividad. A su vez, se aproxima el valor esperado de la variable *t* por medio de la fórmula $t_e = \frac{1}{3}(2m + \frac{1}{2}(a+b))$ o lo que resulta lo mismo $t_e = \frac{2}{3}m + \frac{1}{6}(a+b)$.

Una tercera e importante suposición a realizar es que los tiempos de duración de las distintas actividades son independientes entre sí. Esto quiere decir que, si bien hay precedencias establecidas, el lapso de tiempo que insuma una actividad no está condicionado por el que requiera cualquier otra posterior o anterior. Una vez iniciada una actividad su tiempo de ejecución depende solo de ella y no está relacionado con lo que demore cualquier otra. En términos probabilísticos los tiempos de las actividades son entonces variables aleatorias independientes.

El procedimiento requiere entonces calcular para cada actividad A_i, los tiempos esperados de ejecución t_{e_i} y las respectivas varianzas ${\sigma_i}^2$. En la red del proyecto cada actividad tiene una duración promedio t_{e_i} que se utiliza para efectuar los pasos hacia adelante y hacia atrás ya vistos en IX.5. En base a estos cálculos se determina la ruta crítica y las actividades no críticas. La duración estimada para la ruta crítica resulta aquí la suma de las estimaciones promedios de cada una de las actividades que la integran. En realidad, esta suma es la esperanza matemática de la suma de las variables aleatorias que modelan el tiempo de ejecución de las *r* actividades que forman el camino crítico. En virtud del teorema del límite central, la variable aleatoria suma tiene entonces una distribución normal cuya media es $\mu = \sum_{i=1}^{r} t_{e_i}$. Como tales variables aleatorias se supusieron independientes la varianza de su suma resulta $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i{}^2$.

Lo apuntado hasta aquí permite evidenciar una de las interesantes acciones que permite el PERT. En efecto, una vez efectuados los cálculos y establecida la media y el desvío estándar de la distribución normal que modela la duración de todo el camino crítico, resulta posible calcular la probabilidad de que el proyecto se finalice a un cierto tiempo *T*. Utilizando la normal estandarizada se puede obtener: $P\left(\frac{t-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \leq \frac{T-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right)$. Como es evidente, puede también realizarse el cálculo inverso para evaluar, dada un determinado grado de certeza o probabilidad, cuál sería la cantidad de tiempo *T* en que se la alcanzaría.

Ejemplo 1:

En la cátedra de Investigación Operativa se ha decidido programar, en código abierto, un paquete informático con los algoritmos que se exponen durante el dictado de la materia, incluidas también las facilidades gráficas utilizadas para visualizar los problemas y sus soluciones. Cada tema que forma parte del programa define una actividad de programación cuyas precedencias son establecidas en función de tener resueltos ciertos algoritmos para poder desarrollar la programación de los otros. Como en todo proyecto de desarrollo de software, hay aquí ciertas incertezas en cuanto al grado de dificultad que deba superarse en cada caso, por lo que ha parecido prudente establecer tiempos optimistas, pesimistas y más probables de cada actividad. Como tarea inicial se han establecido las precedencias que debieran tener las actividades y los tres tiempos apuntados. Esto se volcó en la tabla siguiente:

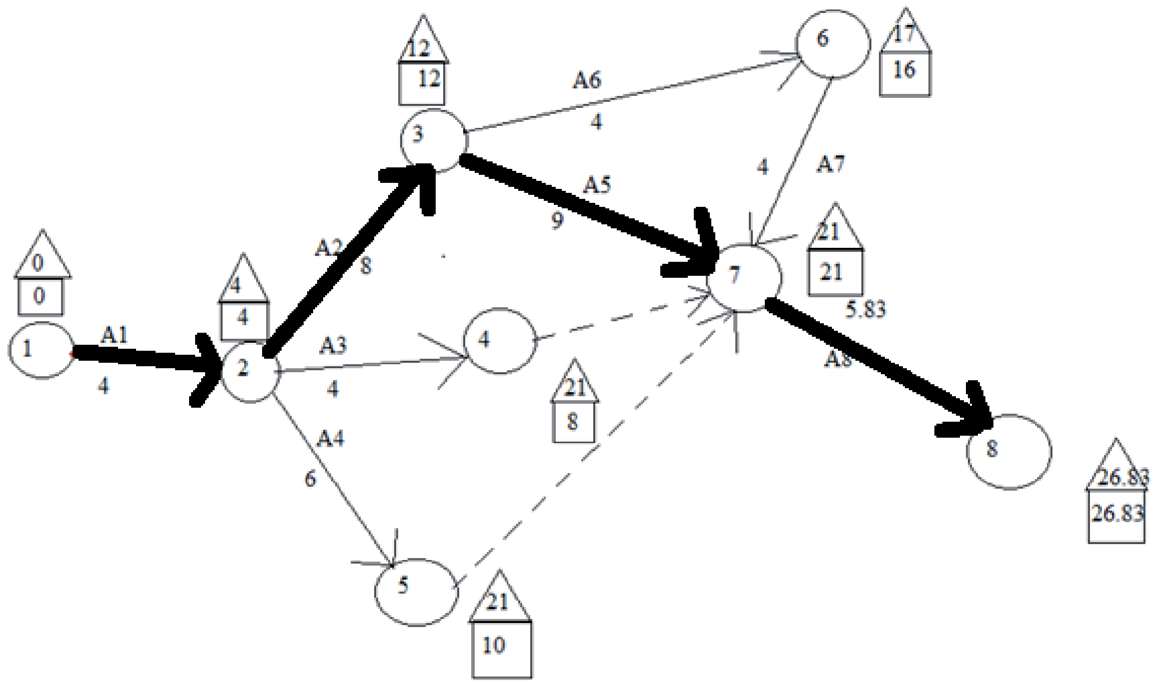
Actividad	Denominación	Tiempo optimista (en semanas)	Tiempo más probable (en semanas)	Tiempo pesimista (en semanas)	Precedencias
Modelado de Sistemas	A_1	2	4	6	---
Programación Lineal	A_2	4	8	12	A_1
Teoría de Colas	A_3	3	4	5	A_1
Teoría de Inventarios	A_4	5	6	7	A_1
Redes	A_5	5	9	13	A_2
Teoría de Juegos	A_6	3	4	5	A_2
Teoría de la Decisión	A_7	3	4	5	A_6
Simulación	A_8	4	6	7	A_3, A_4, A_5 y A_7

Se calculan entonces las medias, o valores esperados, para cada actividad junto con sus respectivas variancias.

Actividad A_i	Tiempo esperado t_{e_i}	Variancia $\sigma_i{}^2$
A_1	4	0.44
A_2	8	1.78
A_3	4	0.11
A_4	6	0.11
A_5	9	1.78
A_6	4	0.11
A_7	4	0.11
A_8	5.83	0.25

La red con los cálculos correspondientes a los pasos hacia adelante y hacia atrás resulta la de la Gráfica 16

Gráfica 16

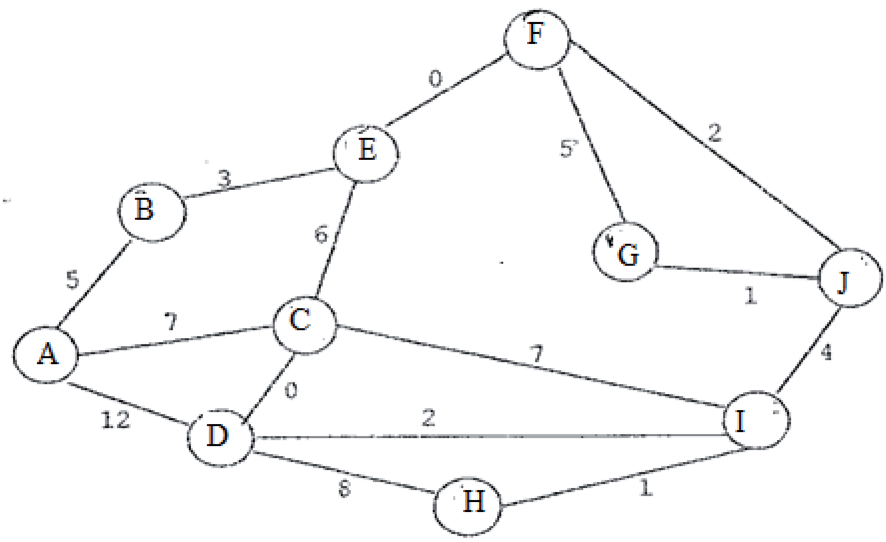


La ruta crítica es aquí A_1 -> A_2 -> A_5 -> A_8 Su tiempo promedio de ejecución será de $\mu = 26.83$ semanas con un desvío estándar de $\sigma = \sqrt{0.44 + 1.78 + 1.78 + 0.25} = 2.06$ semanas. Esta información nos sirve para evaluar cuál es la probabilidad de terminar el proyecto en un determinado tiempo. Por ejemplo: ¿con que probabilidad el proyecto estará terminado en 30 semanas? Entendiendo que el tiempo total de ejecución es una variable aleatoria normal de media $\mu = 26.83$ y desvío estándar $\sigma = 2.06$ calculamos:

$$P\left(z \leq \frac{30 - 26.33}{2.06}\right) = P(z \leq 1.78) = 0.9625$$

Ejercicios propuestos

Ejercicio N° 1- Un camión debe transportar cierta mercadería de la ciudad A hasta la ciudad J. En el siguiente mapa se describen las posibles rutas de A a J indicándose, para cada tramo, la cantidad de kilómetros en mal estado que contiene. Se decide tomar la ruta que tenga menor cantidad de kilómetros en mal estado, aún si resultara más larga. Determinar esta ruta.



Ejercicio N° 2- Una empresa de taxis ha identificado 10 paradas principales para pasajeros que abordan y descienden de los taxis. Para minimizar el tiempo de viaje y mejorar así el servicio y la utilización de la flota la administración ha decidido instruir a los choferes para que siempre tomen la ruta mas corta entre dos de estas paradas. En la tabla se dan los tiempos de viaje en minutos entre cada una de estas paradas. Determinar:

a) el diagrama de la red de paradas.
b) La ruta que debiera tomar un taxi para ir desde la parada 1 a la 10 y cuánto dura el viaje.
c) La ruta que debería tomar un taxi para ir desde la parada 5 a la 2 y cuanto duraría ese viaje.

Parada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-	8	13	15	10	-	-	-	-	-
2	8	-	5	-	-	-	15	-	-	-
3	13	5	-	6	-	5	-	-	-	-
4	15	-	6	-	4	3	-	-	-	-
5	10	-	-	4	-	9	-	-	12	-
6	-	-	5	3	9	-	4	2	5	-
7	-	15	-	-	-	4	-	4	-	4
8	-	-	-	-	-	2	4	-	5	7
9	-	-	-	-	12	5	-	5	-	5
10	-	-	-	-	-	-	4	7	5	-

Ejercicio N° 3- Una compañía sabe que un competidor está a punto de ofrecer un producto con ventas potenciales muy grandes y similar a uno en el que ella misma se encuentra trabajando con la investigación casi terminada. Ahora entonces la idea es sacar el producto más rápidamente para alcanzar a la competencia. Se tienen que lograr cuatro etapas independientes incluyendo lo que resta de la investigación que por el momento se lleva a paso normal. Sin embargo, cada etapa se puede realizar en un nivel de prioridad o de quiebre para acelerar la terminación. Los tiempos requeridos en meses para los distintos niveles son:

Nivel	Investigación restante	Desarrollo	Diseño del sistema de manufactura	Inicio de producción y distribución
Normal	5			
Prioridad	4	3	5	2
Quiebre	2	2	3	1

Se dispone de $ 30000000 para estas etapas. El costo en millones de pesos para los diferentes niveles es:

Nivel	Investigación restante	Desarrollo	Diseño del sistema de manufactura	Inicio de producción y distribución
Normal	3			
Prioridad	6	6	9	3
Quiebre	9	9	12	6

La administración desea determinar el nivel a que debe conducirse cada etapa para minimizar el tiempo total hasta la comercialización del producto sujeto a las restricciones de presupuesto. Formular y resolver como un problema de la ruta más corta.

Ejercicio N° 4- Un banco ha decidido conectar terminales de computadora en cada una dee sus sucursales a la computadora central de su casa matriz mediante líneas telefónicas especiales. No es necesario que la línea esté conectada directamente a la casa matriz sino que la conexión puede hacerse a través de otra sucursal conectada pero toda sucursal debe poder conectarse directa o indirectamente con la casa matriz. El cargo por las líneas telefónicas es directamente proporcional a la distancia cableada que en kilómetros y entre sucursales son las siguientes:

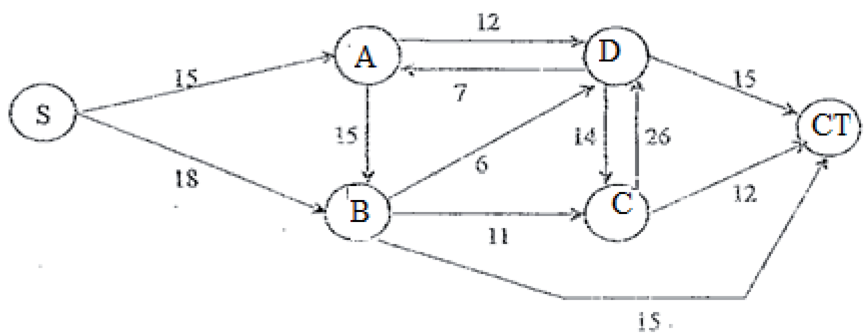
	Casa Matriz	Suc. 1	Suc. 2	Suc. 3	Suc. 4	Suc. 5
Casa Matriz	-	190	70	115	270	160
Suc. 1	190	-	100	110	215	50
Suc. 2	70	100	-	140	120	220
Suc. 3	115	110	140	-	175	80
Suc. 4	270	215	120	175	-	310
Suc. 5	160	50	220	80	310	-

La administración desea determinar cuales son los pares de sucursales que deben conectarse directamente con las líneas telefónicas especiales de manera que cada sucursal quede conectada directa o indirectamente a la casa matriz a un costo mínimo.

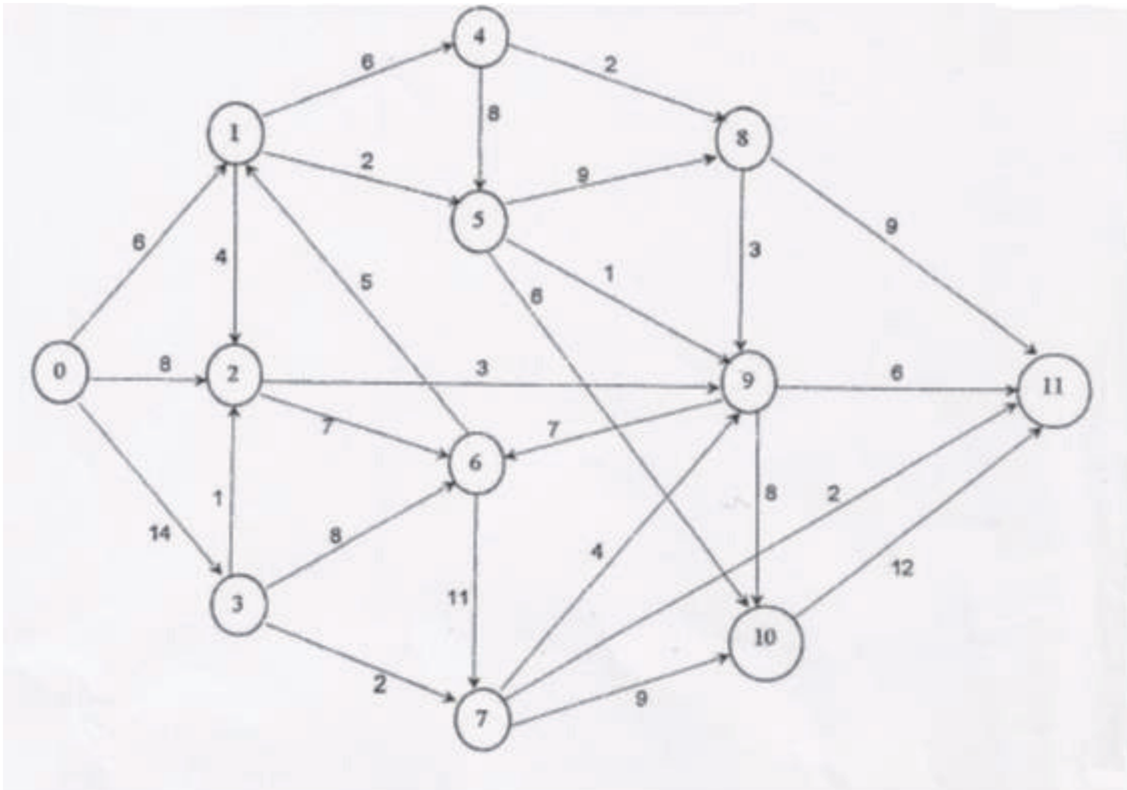
Ejercicio N° 5- En una fábrica de productos de limpieza los inspectores de control de calidad obtienen muestras de diversos productos en varias áreas de producción y entregan las muestras para su análisis en laboratorio. El proceso de inspección es lento y se invierte mucho tiempo en el transporte de las muestras desde las áreas de producción hasta el laboratorio por lo que se está evaluando la instalación de un sistema conductor que utiliza tubos neumáticos para hacer más rápido ese transporte. En la tabla se muestran las distancias en metros entre los distintos sectores incluido el laboratorio. ¿Cuál es la longitud mínima para diseñar el sistema para permitir que todas las áreas envíen sus muestras al laboratorio sabiendo que si una muestra pasa de un área a otra esta última también puede girar la muestra al laboratorio?

	Lab.	2	3	4	5	6	7	8
Lab	-	600	700	800	x	x	x	x
2	600	-	800	x	500	600	x	x
3	700	800	-	500	x	400	600	x
4	800	x	500	-	x	x	600	x
5	x	500	x	x	-	300	x	400
6	x	600	400	x	300	-	500	200
7	x	x	600	600	x	500	-	400
8	x	x	x	x	400	200	400	-

Ejercicio N° 6- En la restauración de un antiguo complejo hotelero ubicado en Mendoza se plantea la necesidad de traer agua termal desde la surgente S a una cisterna CT ubicada a 10 km de distancia. Se puede aprovechar la red de cañerías existentes de la surgente al lugar de emplazamiento de la cisterna. En el gráfico se indica la red junto con las capacidades de cada caño medida en miles de litros por hora. Determinar cuántos litros /hora como máximo se pueden suministrar a la cisterna del complejo.



Ejercicio N° 7- La siguiente red de comunicaciones transfiere información entre distintos nodos. Los números sobre los arcos de la red indican las capacidades máximas de transferencia de cada línea. Determinar le flujo máximo de información del nodo 0 al 11.



Ejercicio N° 8- Una empresa a recibido el encargo de desarrollar un nuevo sistema de automatización par líneas de producción de automóviles. Luego de las consultas a los jefes de departamento se establecieron las tareas a desarrollar, se estimaron los tiempos de duración y sus interrelaciones. Las que se resumen en la siguiente tabla.

Descripción	Actividad	Duración (semanas)	Precedentes
Fase de diseño	A	10	-
Desarrollo del Software operativo	B	18	A
Desarrollo del Soft. de diagnóstico.	C	24	B
Desarrollo del Hardware	D	20	A
Desarrollo del 1er prototipo	E	4	B,D
Prueba y modificación del prototipo	F	8	E
Inserción del Sofá. de diagnóstico. Prueba y modificación de prototipo	G	8	C,F

Desarrollo de materiales de comercialización	H	16	E
Reunión de entrenamiento para la presentación del producto	I	2	G,H

a) Trazar la red del Proyecto.
b) ¿Cuál es el tiempo de duración del proyecto?
c) ¿En cuantas semanas se debería acortar el proyecto si se desea concluir el desarrollo en 1 año?
d) ¿Qué actividades se deberán reducir en duración si sabemos que tanto la A como la I son inelásticas?

Ejercicio N° 9- Se considera el siguiente proyecto de desarrollo de un transistor alimentado con energía solar. Contiene nueve actividades siendo las prelaciones y las estimaciones de tiempo en semanas las siguientes:

Actividad	Predecesor	TO	TN	TP
a	–	3	6	9
b	–	1	3	5
c	a	5	5	5
d	a	4	6	7
e	b	8	10	12
f	b	4	9	15
g	c	5	5	5
h	d,e,g	2	3	6
i	f	2	8	16

a) dibujar la red del proyecto.
b) Determinar el camino crítico y el tiempo esperado de finalización
c) ¿Cuál es la probabilidad que el proyecto se termine en menos de 18 semanas? ¿Y en 22 o más semanas?
d) Se desea firmar un contrato que especifique el tiempo de finalización del proyecto de modo que haya una probabilidad del 95 % de cumplir la fecha deseada. ¿Qué duración deberá especificarse en el contrato?

Ejercicio N° 10- En el siguiente proyecto la empresa encargada de la ejecución cuenta con un plantel de 80 hs/ hombre por día y desea pagar al contado contra la terminación de cada tarea. (los tiempos se dan en días).

Actividad	TO	TN	TP	Hs/hombre x día*	Costo (miles de $)
1-2	0.5	1	1.5	10	60
1-3	1	1.5	5	40	100
2-4	1	2.5	7	60	130
3-4	1	3	5	20	100
3-5	2	2	2	20	120
4-6	3	4.5	9	10	120
4-7	2	3	10	30	80
5-7	1	1	1	20	110
5-8	1	3	5	20	80
6-8	4	5	6	50	110
7-8	2.5	3	3.5	10	190

a) dibujar la red del proyecto
b) determinar el camino crítico y el tiempo esperado de finalización
c) ¿es posible realizar el proyecto con el plantel que se cuenta manteniendo el tiempo total de ejecución?
d) Determinar si es posible establecer el sistema de pagos indicado sabiendo que la empresa dispone de un ingreso diario de $80000.
e) ¿cuál es la probabilidad que el proyecto termine en 11 días o menos?