Luís Alberto Fernández

CÁLCULO FINANCIERO

de las operaciones simples y complejas

Departamento de Ciencias Económicas

Profesor Luis Alberto Fernández

Departamento de Ciencias Económicas

CÁLCULO FINANCIERO

de las operaciones simples y complejas

Universidad Nacional de La Matanza

Fernández, Luis Alberto
Cálculo financiero de las operaciones simples y complejas / Luis Alberto Fernández. - 1a ed. - San Justo : Universidad Nacional de La Matanza, 2022.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-8931-43-2

1. Economía. 2. Economía Financiera. I. Título.
CDD 330.071

Florencio Varela 1903 (B1754JEC)
San Justo / Buenos Aires / Argentina
Telefax: (54-11) 4480-8900
editorial@unlam.edu.ar
www.unlam.edu.ar

ISBN: 978-987-8931-43-2

Diseño: Editorial UNLaM

“Los que se enamoran de la práctica sin la teoría son como los pilotos sin timón ni brújula, que nunca podrán saber a dónde van”.

Leonardo da Vinci*

---

*(1452-1519). El ideal del *saper vedere* guió todos sus estudios que en la década de 1490 comenzaron a perfilarse como una serie de tratados (inconclusos, que fueron recopilados luego en el *Codex Atlanticus*, así llamado por su gran tamaño). Incluye trabajos sobre pintura, arquitectura, mecánica, anatomía, geografía, botánica, hidráulica y aerodinámica, fundiendo arte y ciencia en una cosmología individual que dio, además, una vía de salida para un debate estético que se encontraba amarrado a las ideas platónicas.

ÍNDICE

PALABRAS DEL AUTOR

Cálculo financiero de las operaciones simples y complejas es un libro desarrollado para estudiantes de la asignatura Matemática Financiera de las carreras de Ciencias Económicas.

Aplicando las denominaciones técnicas más habituales, podrá reconocerse tanto la evolución de capitales individuales o múltiples, separando su estudio en dos grandes grupos: operaciones simples y operaciones complejas.

Una vez explicados los conceptos fundamentales, la aplicación directa a hechos financieros frecuentemente observados en la realidad representa la forma más efectiva de generar entusiasmo en la comprensión de las explicaciones y la búsqueda de soluciones particulares.

La inclusión de diversos sistemas de amortización, más allá de los comúnmente usados, amplía en este texto los horizontes de las posibilidades de financiación y el modo de cancelar deudas, e incluye asimismo un inédito sistema de amortización adicional que fuera presentado en las XXX Jornadas de Nacionales de Matemática Financiera.

Una breve introducción a los conceptos del valor actual neto (VAN) y la tasa interna de retorno (TIR) para brindar a los estudiantes las herramientas técnicas para su elaboración ha sido incorporada.

Por último, la inclusión de un breve glosario de términos financieros de uso frecuente destaca la necesidad de estimular en los alumnos universitarios la idea de expandir el territorio de la consulta y la información netamente técnica.

El objetivo se verá cumplido si al término de su consulta el alumno logra reconocer distintas situaciones financieras imperantes en el mercado, extraer conclusiones y procesar cálculos financieros a partir de la aplicación de las diversas fórmulas aquí contenidas.

Por último, cabe destacar el decidido apoyo y estímulo de las autoridades de la Universidad Nacional de La Matanza para que los docentes vuelquen sus conocimientos y sus propias experiencias profesionales, materializándolas, no sin esfuerzo, pero sí con mucha vocación, en beneficio directo de toda la comunidad estudiantil y la sociedad.

Luis Alberto Fernández

Capítulo 1

Elementos de álgebra

APLICACIONES MATEMÁTICAS BÁSICAS UTILIZADAS EN CÁLCULO FINANCIERO

La matemática financiera sustenta la estructura de resolución de sus problemas en un conjunto mínimo de reglas, procedimientos y principios que provienen de la matemática general. El evaluador financiero deberá, por consiguiente, encontrarse familiarizado con este lenguaje para abordar con éxito la solución de los interrogantes planteados.

Desde el punto de vista pedagógico, el docente encargado de transmitir los conceptos y fundamentos financieros, sugerirá a los alumnos la revisión de dichos fundamentos matemáticos previos al desarrollo de los distintos tópicos de la materia, con el propósito de hacer más comprensible la interpretación de los desarrollos y, obviamente, arribar a resultados satisfactorios.

No resulta posible, por consiguiente, interpretar adecuadamente los distintos conceptos financieros sin esta mínima cantidad de elementos de matemática general, por lo que podría resultar de interés al lector recordar algunos pocos conceptos que servirán para el desarrollo de los siguientes capítulos, sin perjuicio de las oportunas consultas al abundante material bibliográfico que existe a tales efectos.

EXPONENTES

El producto de un número real que se multiplica por sí mismo, “a x a”, o bien “a*a”, se expresa como a^2. Si este mismo número se multiplicara por sí mismo n veces se expresaría como a^n.

Es así que designamos al número “a” como base y al número “n” (escrito arriba y a la derecha de este) se lo llama exponente o potencia. Entonces, el exponente nos indicará el número de veces que la base “a” se multiplica por sí misma. La expresión a^n se lee como “a elevado a n”.

Si n es un número entero positivo:

$$a^n = a \times a \times a \times a..x..a, \text{ n veces}$$

Ejemplos:

Siendo a = 2 y n = 3, entonces resulta que:

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

Ahora, siendo a = (1+i) y n = 3, entonces $a^3 = (1+i)^3$ y si asignamos a i un valor, por ejemplo del 4 %, es decir del “cuatro por ciento”, leeremos entonces: 4/100, lo cual indica que el entero se ha dividido en cien partes y se han tomado de ellas cuatro, esto equivale en una expresión de “tantos por uno” a 0,04, la expresión sería: $(1+i)^3 = (1+0{,}04)^3 = 1{,}124864$

REGLAS EN EL USO DE LOS EXPONENTES

Si “a” y “b” son números reales distintos de cero y los exponentes “m” y “n” resultan ser enteros y positivos, podremos deducir algunas reglas necesarias para trabajar con exponentes:

Multiplicación de dos potencias de igual base:

a^m y a^n son dos potencias que tienen igual base "a". La multiplicación o producto de $a^m x a^n = a^{m+n}$

Ejemplo:

para m = 3 y n = 2, resulta ser que:

$$a^m \times a^n = a^3 \times a^2 = a^{2+3} = a^5$$

$$(a \times a \times a) \times (a \times a) = a \times a \times a \times a \times a = a^5$$

El producto o multiplicación de dos potencias de igual base es igual a la base común elevada a la suma de los exponentes.

División o cociente de dos potencias de igual base:

Sean a^m y a^n dos potencias de igual base "a", la división o cociente entre a^m y a^n = $a^m / a^n = a^{m-n}$.

Ejemplo:

Si m = 6 y n=3, entonces:

$$\frac{a^6}{a^3} = a^6 - a^3 = a^3$$

La división o cociente de dos potencias de igual base es igual a la base común elevada a la diferencia o resta de los exponentes, aquí se resta del exponente del numerador el exponente del denominador.

Potencia de potencia:

Si a a^m la consideramos como base y elevamos esta a la potencia n = 2, $(a^m)^2$, significaría que a^m (en conjunto) se multiplica por sí misma dos veces: $(a^m)^n = (a^m)^2 = a^m \times a^m$, $a^{(m+m)} = a^{2m}$, así entonces generalizando, tenemos que: $(a^m)^n = a^{(m+n)}$

Ejemplo:

Si m = 2 y n = 3, entonces:

$$\left(a^m\right)^n = a^2 \times a^2 \times a^2 = \left(a^2\right)^3 = a^{(2+2+2))} = a^6$$

o bien podría explicarse de otra forma:

$a^2 = a \times a$, y entonces $\left(a^2\right)^3$ sería igual a:

$$(a \times a)(a \times a)(a \times a) = a \times a \times a \times a \times a \times a = a^6$$

La potencia de una potencia es igual a la base elevada al producto de los exponentes.

Potencia del producto de dos factores:

Siendo $6^2 = 6 \times 6 = 36$, si descomponemos el 6 en dos factores tendríamos, por ejemplo, que:

$(2 \times 3)^2 = (2 \times 3)x(2 \times 3) = 2 \times 3 \times 2 \times 3$, los cuales al reagruparlos se pueden expresar como:

$(2 \times 2)x(3 \times 3)$, o bien $2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$

Así, generalizando podemos decir que:

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

El producto de dos factores elevados a una potencia es igual al producto de los factores elevados a dicha potencia.

Potencia del cociente de dos factores:

Si partimos de:

$$\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 2^2 = 4$$
,

sabemos además que la división es el inverso de la multiplicación.

Utilizando las propiedades antes mencionadas tenemos que:

$$\left(4\times\frac{1}{2}\right)^2 = 4^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4^2\times\left(\frac{1^2}{2^2}\right) = 4^2\times\frac{(1\times1)}{(2\times2)} = 16\times\frac{1}{4} = 4$$

Generalizando, tenemos que:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

El cociente de dos factores elevado a una potencia, es igual al cociente de los factores elevados a dicha potencia.

Casos particulares con exponente cero, negativo y fraccionario:

1) Exponente cero: por definición matemática, todo número real distinto de cero elevado al exponente cero es igual a 1, entonces $a^0 = 1$

2) Todo número dividido por sí mismo es igual a la unidad,

ejemplo $\frac{208}{208} = 1$, $\frac{a}{a} = 1$,

también $\frac{a^m}{a^m}$ será = 1. Si recordamos que el cociente de dos potencias de igual base se expresa como la base común elevada a la diferencia de los exponentes: $a^{m-m} = a^0$, comprobamos entonces que todo número elevado a cero = 1

3) Exponente negativo: todo número real distinto de cero y elevado a un exponente negativo, es igual a la fracción de 1 dividido por dicho número elevado a su exponente con signo positivo: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

4) A la inversa, toda fracción cuyo denominador es un número real distinto de cero y está elevado a una potencia con signo negativo es igual a dicho número elevado a la misma potencia con exponente positivo.

5) Exponente fraccionario: sea a un número real distinto de cero y está elevado a un exponente fraccionario m/n, entonces:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a)^m}$$ (raíz de n, elevada a la potencia m)

Ejemplo:

$9^{\frac{4}{2}} = 9^2 = 81$, o bien $9^{\frac{4}{2}} = \left(\sqrt[2]{9}\right)^4 = 3^4 = 81$

Logaritmos

La teoría logarítmica fue creada para simplificar los cálculos financieros, especialmente, de factores de capitalización en régimen compuesto, más tarde se difundió su empleo en otras áreas matemáticas. Juan Neper, hacia 1614, elaboró la primera tabla logarítmica (que lleva su nombre) hacia 1614, utilizando el número irracional 2,71828…; también conocidos como logaritmos "en base e" o "naturales". Posteriormente, en 1617 Briggs publica la primera tabla de logaritmos "en base 10" o "decimales".

Definición: si "N" y "b" son números positivos distintos de 1, entonces el logaritmo en base b del número N es el exponente "L" de la base b, tal que:

$$b^L = N \quad L = \log b \; N$$

Se usan comúnmente los llamados logaritmos naturales cuya base es el número e = 2,718281829 y los logaritmos decimales cuya base es b = 10

Por ejemplo: $3 = \log_2 8$, implica que:

$2^3 = 8$ log 1.000 = 3, ya que:

$10^3 = 1.000$ log 10 = 1, ya que $10^1 = 10$ log 1 = 0, ya que 100 = 1 log 0.10 = -1, ya que $10^{-1} = 0.10$

El logaritmo del producto de dos números positivos es igual a la suma de los logaritmos de los números. Por ejemplo: log (A x B) = log A + log B

El logaritmo del cociente de dos números positivos es igual a la diferencia del logaritmo del numerador con el logaritmo del denominador: log (A / B) = log A - log B

El logaritmo de un número elevado a la potencia n es n veces el logaritmo del número log An = n log A.

Si L = log N, N es llamado el antilogaritmo de L.

Progresiones aritméticas

Si observamos el siguiente ordenamiento numérico:

1; 3; 5; 7; 9

Se cumple que:

3-1=2

5-3=2

7-5=2

9-7=2

Esta relación nos permite inferir que se cumplen algunas premisas constantes:

1. Existe un ordenamiento en la sucesión de términos
2. Se verifican como mínimo más de dos términos
3. La diferencia entre dos valores consecutivos se presenta constante

Estamos entonces en condiciones de reconocer una progresión de tipo aritmética cuando se cumplen las anteriores premisas. Veamos también la siguiente secuencia numérica:

24; 20; 16; 12; 8

En este caso, también se cumplen las premisas puesto que la diferencia (-4), aun siendo un valor constante y negativo, responde al concepto básico de donde podemos generalizar que una progresión aritmética es aquella sucesión de números formada por tres o más términos en la cual cada uno de ellos es igual al anterior, más (menos) un número constante denominado diferencia, razón o incremento.

Para el caso del primer ejemplo, será considerada una PA (progresión aritmética) creciente y para el segundo se trataría de una PA decreciente.

Otra característica relevante de estas series es que se las suele denominar monótonas porque solamente crecen o disminuyen, y suelen ser representadas como una recta en un eje de coordenadas ortogonales. Por otra parte, estas pueden considerarse definidas o finitas, o bien indefinidas o infinitas, dependiendo de qué la cantidad de términos sea o no conocida o cuantificable.

Progresión geométrica

Si observamos el siguiente ordenamiento numérico:

1; 4; 16; 64; 256

Se verifica que:

$$\frac{4}{1} = \frac{16}{4} = \frac{64}{16} = \frac{256}{64}$$

Para mantener la formación estable se respetaron ciertas premisas:

1. Existe un ordenamiento en la sucesión de términos
2. Se verifican como mínimo más de dos términos
3. El cociente entre dos términos consecutivos se presenta constante

Podemos aseverar que, en este caso, nos encontramos en presencia de una progresión geométrica (PG) por cumplirse las premisas anteriores, es decir que se trata de una PA cuando existe una sucesión formada por tres o más términos, donde cada uno de ellos es igual al anterior multiplicado por un número constante denominado razón.

Aquí puede presentarse, como característica distintiva, que la razón resulte menor a 0 (cero), en cuyo caso, y aplicando la regla de signos, se presentarán valores alternadamente positivos y negativos, por lo que así se las llamará oscilantes.

Límites (continuidad)

El concepto de límite se encuentra asociado a los distintos tipos de sucesiones numéricas que se pueden formar: ellas son definidas cuando poseen un valor finito, y serán indefinidas cuando tienden a más infinito o menos infinito, por último se encuentran las oscilantes que no tienden a ningún valor.

Concepto de infinitésimo: se dice que la función es un infinitésimo en un punto x=k si el límite de esta se anula cuando tiende a ese valor k.
Ejemplo: lím. x= >1 de $x^5-1=0$, se dice que es infinitésima en x=1, entre otros casos, las funciones son infinitésimas en ciertos valores de x.

EJERCICIOS DE ADAPTACIÓN

1. $270x(6+8{,}2X)=8$

2. $(426Z+132N)x5=\frac{1}{9}x(936Z+1035N)-28Z$ (para Z=700^{-1})

3. $\frac{4306}{2R}+30x(\frac{54}{276})=\frac{1}{4}R$

4. $1{,}75=[(1+0.8X)+(1+0.7Z)]$

5. $\frac{45}{80}=7X+\left(X-\frac{0.75}{100}\right)^{5}$

6. $3.1=(1+0.5X)x[1+(0.2X+0.3)]$

7. $\frac{1475}{\left(1+\frac{6}{12X}\right)}=\frac{1675}{(1+\frac{3}{4}Xx\frac{1}{20})}$

8. $372.5=200x7X+200X5Z$ (para Z=(X+1.25/100)

9. $200=X(1+\frac{2}{10})^{11}-1$

10. $50=X\left[(1+0.08\ )^{36}x(1+0.21)^{12}-1\right]$

11. $443=200x(1.005)^{x}-1$

12. $1234 = 436x\left(1.08^{x} - 1\right)$

13. $X = \sqrt[15]{\frac{227}{107} + 1} - 1$

14. $400 = 2.45Xx(1 + 0.05)^{8} + Xx(1.07)^{10}$

15. $Z = \left[400x(1 + 0.03)x(1 + 0.07)x(1 + 0.06) - Z\right]^{0.5} x1.05^{0.5}$

16. $\sqrt[N]{\frac{1790}{52}} = 1.2$

17. $\frac{1}{2}R = \left\{\left[100\left(1.15\right)^{5} - R\right]^{2} x1.7x1.2 - R\right\}2x13$

18. $270 = \frac{A}{\left(1 + 0.07x2\right)} + Ax(1 + 0.07x3)$

19. $25T + 100 = T\left\{\left[1.02^{-8} - 1\right]/\,0.02\right\}x1.05x1.07 + 12$

Resolver aplicando logaritmos

1. $2.317^{11} x X^{-3} = X^{14}$

2. $\frac{5}{23^{9}} x \left(\frac{1}{36}\right)^{31} = B^{11}$

3. $\left(\frac{1}{35}\right)^{-1} = \left(\frac{44}{12}\right)^{7} x \frac{R^{\frac{2}{7}}}{H^{\frac{-5}{6}}}$ (para H=14)

Capítulo 2

Principios financieros

CONSIDERACIONES INICIALES

La propensión natural que rige los comportamientos económicos del hombre a asignar mayor valor a los bienes presentes que a los futuros representa el fundamento de nuestra disciplina.
El comerciante que alquila un local habilita una actividad económica destinando sus recursos actuales, ya sea al adquirir mercaderías para su posterior reventa, contratando personal como dependiente, al abonar sus impuestos, etc., lo hace con la expectativa de que su esfuerzo le reporte ingresos más que suficientes para reaprovisionarse y cumplir con sus obligaciones del presente.

Entendiendo al dinero como un bien en sí mismo, es obvio reconocer que preferimos disponer de $100 hoy a recibirlos dentro de una semana. Disponer de esa suma hoy nos permite transformarla en un bien de uso o consumo inmediato. Esto se vincula directamente con la satisfacción de nuestros deseos, de valorar en mayor medida los bienes presentes a los bienes futuros.

Supongamos otro ejemplo, frente al deseo de adquirir un reproductor de DVD encontramos dos propuestas:

1. Retirar el bien al abonar inmediatamente $380.

2. Retirar el bien inmediatamente, y abonar $380 dentro de un mes.

Resulta obvio que la decisión natural en condiciones normales recaería en la 2.ª opción. Ambos ejemplos planteados nos conducen a intentar realizar análisis “intemporales” que nos permitan relacionar distintas magnitudes y poder compararlas en diferentes momentos a partir de la selección de criterios objetivos de valuación.

La posibilidad de transformar valores de un momento en valores de otro momento conduce directamente a la comparación, la suma y la resta de magnitudes así homogeneizadas, lo que presupone la cuantificación de las variables en términos monetarios.

ALCANCE DE LAS OPERACIONES FINANCIERAS

Las operaciones financieras tienen lugar entre personas, ya sea entidades *físicas* o *jurídicas.* Por un lado, quien demanda específicamente dinero (capital). Desde el punto de vista económico, generalmente se observa que se encuentran en esta situación aquellas "unidades deficitarias", es decir, quien sus ingresos presentes no resultan suficientes para satisfacer sus necesidades económicas del momento y que llamaremos *deudor*. Por el otro, aquel dispuesto a ofrecer sus excedentes de ahorros al ceder su propio capital con el propósito de obtener un beneficio (interés) en el futuro, llamado *acreedor*. Esto le brinda la posibilidad al acreedor de incorporar su beneficio al capital preexistente, y acumular posteriormente una suma mayor (monto).

Esta posibilidad solo tiene lugar en la medida en que se acuerda, entre deudor y acreedor, ajustarse a ciertas variables que determinan la factibilidad de esa acreencia. Desde el punto de vista financiero, dichas variables se encuentran representadas por el tiempo y la tasa (o tipo) de interés.

Las distintas operaciones financieras que pueden desarrollarse en el marco de entendimiento o acuerdo entre partes pueden clasificarse en mérito a diversos criterios, no siempre con límites precisos, puesto que ciertas operaciones particulares pueden considerarse dentro del campo de una u otra clasificación.

Para no extendernos en dichas consideraciones particulares, mencionaremos algunas de ellas que resultan bastante difundidas.

a) En función del plazo de su duración:

a.1) Operaciones a corto plazo (no superando el año)

a.2) Operaciones a largo plazo (aquellas que exceden el año)

b) En función de la certeza temporal o contingencia eventual:

b.1) Operaciones a término o plazo cierto
Cuando la operación queda perfeccionada por el mero transcurso del tiempo.

b.2) Operaciones de carácter actuarial
Cuando intervienen elementos como el azar para poder perfeccionarse.

c) En función de las técnicas de solución

c.1) Operaciones simples
Cuando se refiere a operaciones que vinculan un único capital con otro, también único.

c.2) Operaciones complejas
Cuando en al menos un extremo de la operación (depósito o retiro) se verifica la extinción, luego de varios momentos.

Nota: es en esta última clasificación donde se hace más relevante la existencia de varios caminos conducentes a una única solución, puesto que muchas operaciones financieras pueden interpretarse tanto como simples o complejas.

Por ejemplo, una deuda del presente, que en lugar de cancelarse con un único documento se resuelve su extinción en dos pagos iguales y consecutivos, no deja de ser una operación simple (aunque no se ajuste estrictamente a la definición dada), aunque podría ser igualmente resuelta (y arribar al mismo resultado) si para su solución se aplica el criterio de rentas como operaciones complejas.

EL AÑO CIVIL Y EL COMERCIAL COMO ELEMENTO TEMPORAL

Una gran parte de las operaciones financieras que se desarrollan en la práctica se circunscriben al corto plazo, es decir, aquellos periodos inferiores a un año. Esta fracción de tiempo, desde el punto de vista financiero, puede interpretarse de dos modos:

a) Considerando al año como espacio temporal que abarca 365 días, conocido como **año civil**.

b) Considerando al año, fraccionándolo en doce periodos mensuales exactos de treinta días cada uno, lo que llamamos **año comercial**.

Esta diferencia modifica el rendimiento de una cierta tasa, ya sea que se la considere de una u otra forma. La facilidad de cálculo que presenta la segunda opción hace que resulte muy difundida en las transacciones comerciales, puesto que entre dos partes que acuerdan una cierta operación financiera nada impide que se la utilice.

No obstante ello, existen disposiciones emitidas por el Banco Central de la República Argentina (BCRA) que prevé el uso del año civil en la mayoría de las operaciones que se registren a través de las entidades financieras que operan en el país.

La circular transcripta en la página siguiente indica en su apartado 1.5 el criterio que se adopta en tanto de operaciones de crédito se refiere, considerando el *divisor fijo* (df), tanto de 365 como de 360 días, dependiendo del tipo de operatoria.

A los efectos de esta obra, salvo indicación expresa en contrario, utilizaremos el año comercial al referirnos a aquellas tasas anualizadas.

Dado lo cual, los valores del rendimiento final para un inversor variarán en un caso o en otro, puesto que si consideramos por ejemplo una tasa del 8 % efectiva "anual":

- Con año comercial se obtendrían ocho centavos por unidad de peso invertido al cabo de 360 días.

- Con año civil se obtendrían ocho centavos por peso invertido al cabo de 365 días.

1.1. Criterio básico.

Las tasas de interés compensatorio se concertarán libremente entre las entidades financieras y los clientes.

En las financiaciones vinculadas a operaciones con tarjetas de crédito, se observará lo establecido en la Sección 2.

1.2. Formas de concertación.

1.2.1. Tasa fija.

Los contratos de préstamo a tasa de interés fija no podrán contener cláusulas que prevean su modificación en determinadas circunstancias, excepto que provengan de decisiones adoptadas por autoridad competente.

1.2.2. Tasa variable.

Los contratos de préstamo a tasa de interés variable deberán especificar claramente los parámetros que se emplearán para su determinación y periodicidad de cambio.

1.3. Base de liquidación.

Los intereses solo pueden liquidarse sobre los saldos de capitales efectivamente prestados y por los tiempos en que hayan estado a disposición de los clientes.

1.4. Modalidades de aplicación.

Las tasas se aplicarán en forma vencida, salvo en las operaciones de pago único a su vencimiento, en las que también podrá emplearse la forma adelantada, según se convenga con los clientes.

1.5. Divisor fijo.

1.5.1. General.

365 días.

1.5.2. Préstamos hipotecarios sobre vivienda y prendarios sobre automotores.

360 días, en las operaciones comprendidas en los manuales de originación y administración de esos préstamos.

Capítulo 3

Vinculaciones de la matemática financiera

MATEMÁTICA FINANCIERA

Definición

Es una rama de la matemática general que estudia el comportamiento y evolución de un capital monetario a través del tiempo. La combinación de distintos elementos (tiempo, tasa y capital) conforme se produce la adición del interés constituye el objetivo principal del inversor, calculado mediante procedimientos particulares que constituyen las herramientas de la disciplina y midiendo de forma objetiva los resultados obtenidos se logra tomar la decisión óptima a la hora de invertir.

Relación con otras disciplinas:

Contabilidad:

Parte de un sistema integrado de información que promueve llevar las cuentas con exactitud, con el objeto de recabar datos del pasado, presente y analizar el futuro, a fin de que los administradores y terceros interesados puedan evaluar la situación económica y financiera del ente.
Relación: suministra en determinados y precisos momentos información elaborada en base a registraciones técnicas emanadas de un ente, ya sea privado o bien público, para adecuar las decisiones de carácter financiero.

Economía:

Ciencia social que estudia los procesos de producción, comercialización y distribución de bienes, en tanto sirvan para satisfacer necesidades humanas de carácter material.

Relación: establece el marco en donde se desarrollan los distintos mercados que les permitan a las empresas, al estado y a las familias optimizar sus recursos económicos.

Derecho:

Conjunto ordenado y sistematizado de disposiciones, reglas y leyes a las que se encuentran sometidos los habitantes de una región, provincia o nación, en el marco de una sociedad civil. Dado que el derecho posee diversas ramas, las más significativas y vinculadas a la matemática financiera pueden encuadrarse en el derecho mercantil en tanto se refiere al conjunto de disposiciones, reglas y leyes que regulan las transacciones de carácter mercantil, el derecho civil, en tanto, vela por la salvaguarda de las personas y los bienes que son propios de estas, y el derecho laboral, en tanto, propicia el marco regulatorio de las relaciones entre los empleadores y los dependientes.
Relación: regula la propiedad de los bienes, las formalidades contractuales, la forma en que se cuentan los plazos, las cargas impositivas y sociales, los contratos de compra-venta, las disposiciones y regulaciones a las que deben adecuarse las entidades financieras, las formas que adoptan los préstamos a interés, etc.

Informática:

Es la rama de la ingeniería que concentra el estudio de diseños de técnicas y aplicación de dispositivos electrónicos que tienen por objeto generar, almacenar y transmitir y recepcionar datos.
Relación: brinda un conjunto de herramientas que agiliza las operaciones de los usuarios de información financiera, en la medida que a través de dichos dispositivos no solo se automatizan procedimientos complejos, sino que se evita la reiteración de cálculos.

Planeación y evaluación de proyectos:

Es el conjunto de procedimientos de análisis de situaciones probables futuras capaces de generar bienestar y riquezas, tanto en el campo privado como en el público.
Relación: la matemática financiera realiza aportaciones de sus herramientas y técnicas para mensurar los alcances económicos y financieros de los distintos proyectos, reconocer su viabilidad y cuantificar sus resultados.

Álgebra:

Como rama de las matemáticas es capaz de generalizar diversas relaciones aritméticas en las que se utilizan letras y generar ecuaciones representadas mediante un conjunto de objetos con reglas que los conectan.
Relación: sirve de sustento a la matemática financiera en tanto brinda un marco en donde poder desarrollar generalizaciones basadas en las operaciones fundamentales de suma, resta, multiplicación y división, y cálculo de raíces que luego serán aplicadas a situaciones específicas.

Relación de la matemática financiera

Capítulo 4

Las variables financieras

PORQUÉ RELACIONAMOS FUNCIONALMENTE DISTINTAS VARIABLES

Ya sea que exista dependencia o que se vincule una o más variables frente a otra u otras, permite al conocimiento científico avanzar en diversos campos.

Supongamos la existencia de dos variables vinculadas e interdependientes entre sí, como lo son el tiempo y la tasa de interés y veamos de qué modo podemos relacionarlas.

Conociendo al capital "C" y al tiempo "n", podremos observar su evolución suponiendo que, a medida que transcurre el paso del tiempo, dicho capital podrá crecer a partir de un conjunto de reglas matemáticas predefinidas.

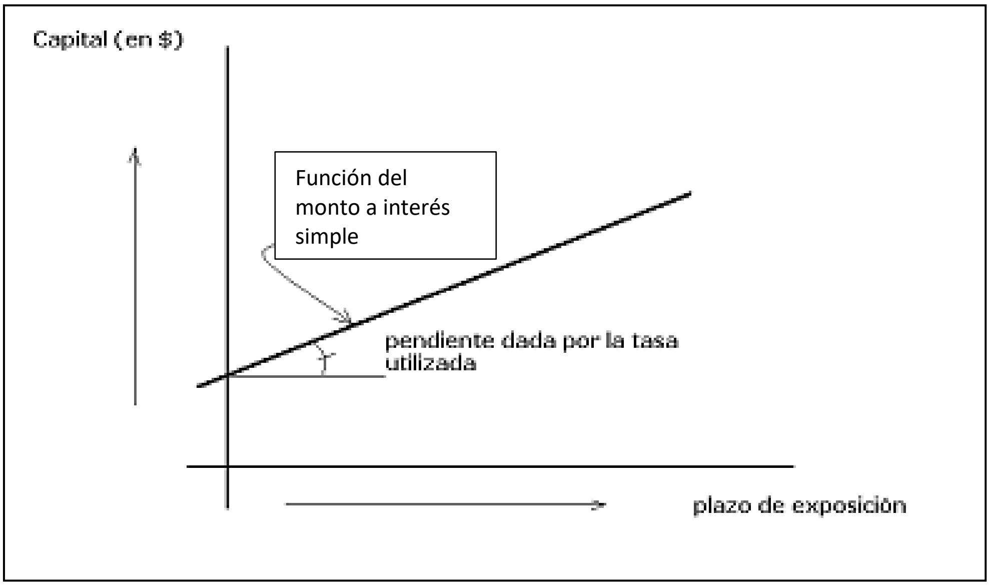
Para reforzar esta idea debemos incorporar al otro elemento indispensable: la tasa de interés, puesto que esta última variable nos dará la idea de la proporción de crecimiento.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE VARIABLES

La representación geométrica de gráficos puede elaborarse a partir de la construcción de ejes de coordenadas cartesianas.

Al vincular estas variables, ubicaremos en las ordenadas el valor o cuantía del capital, y en las abscisas el tiempo de exposición al que fue colocado el capital.

Por otra parte, al referirnos a la tasa de interés (como vínculo entre el tiempo y el capital) la función observada determinará una cierta **pendiente**, fruto de la regla de crecimiento aplicada.



Representación gráfica de la función del monto simple en un eje de coordenadas. En vertical, expresamos unidades monetarias (valores absolutos de capital) y en horizontal, reflejamos el paso del tiempo de la operación financiera pactada.

VARIABLES FINANCIERAS: EL TIEMPO Y LA TASA

Poder utilizar un capital (C) durante un cierto tiempo tiene un costo o precio. La matemática financiera nos permite cuantificar, al medir en unidades monetarias (UM), este precio o costo.

Así mismo, toda operación financiera se encuentra definida en un espacio temporal, aun aquellas que se pactan como "perpetuas", por lo que se señala específicamente que la evolución de un capital (C) *es función del tiempo y de la tasa.*

Cabe aclarar que otras variables influyen en la evolución de un capital en el tiempo, pero no siempre constituyen el objeto de nuestra disciplina. Independientemente de la cautela de las partes que intervienen en toda operación financiera, donde vaivenes económicos pueden influir significativamente en la paridad cambiaria o el índice de inflación, y por consiguiente en los resultados esperados, o bien un excesivo gasto administrativo para el acreedor en la administración de sus cobranzas u onerosa estimación del perfil de los tomadores, o factores impositivos que graven la actividad y disminuyan la rentabilidad, constituyéndose en una extensa lista de variables que deben tomarse en consideración al momento de concertar una operación financiera, no todas ellas regidas por reglas matemáticas.

VARIABLES FINANCIERAS
El tiempo

Entre aquellas otras que nos ocupan, es el tiempo una de las variables que podemos cuantificar al momento de analizar distintas operaciones financieras. Para lograr este objetivo, la matemática financiera adopta el criterio de periodicidad para dicha variable segmentándola en tramos más o menos extensos.

Al reducir los periodos paulatinamente podemos encontrarnos con instantes, en cuyo caso, se dice que la variable tiempo resulta ser *continua*. De otro modo, resultará *discreta*.

La posibilidad de representar el tiempo, que es un elemento inmaterial, en un "eje de tiempo" nos permite observar la evolución "espacial" de esta variable, así podremos segmentarlo en periodos, volcándolos en una línea recta:

```
                          0   1   2   3  4   5   6   7    8  9   10
                     ____!__!__!__!__!__!__!__!__!__!__!_______
--------------->                                   Tiempo (n)
```

Los periodos en que se segmenta el eje de tiempo obedecen generalmente a tramos constantes, como meses o años.

Desde el punto de vista operativo, la posibilidad de incorporar al gráfico las características fundamentales de cada operación en particular, como por ejemplo, el valor de la tasa de interés, cambios que puedan ocasionarse, momentos donde puedan producirse retiros o depósitos, capitalizaciones ocasionales, etc., representa una herramienta auxiliar para valuar los capitales y sus rendimientos de modo objetivo.

VARIABLES FINANCIERAS

La tasa (o tipo)

Para interpretar el comportamiento de ciertas variables de tipo temporal –entre las que se encuentra el capital-, es decir, aquellas que evolucionan con el correr del tiempo, podemos analizarlas en dos sentidos: de modo absoluto y de modo relativo. Llamaremos entonces "Y" a dicha variable.

En una primera aproximación, llamaremos variación absoluta (VA) al diferencial de la variable:

$$VA = \Delta Y$$

Midiendo las magnitudes adoptadas en dos momentos, m_0 y m_1, observamos su comportamiento en el eje de tiempo:

$$\begin{array}{ccccc} & Y_0 & & Y_1 & \\ \_\_\_ & ! & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & ! & \_\_\_\_\_ \\ & m_0 & & m_1 & \end{array}$$

Para el caso de la observación en el momento inicial (m_0), la magnitud que refleja la variable será cuantificada al valor de Y_0, en tanto, la observación de la variable en cuestión en m_1 arroja una cuantificación hasta el valor de Y_1.

Como ya indicamos, reconocer la variación absoluta nos conduce a establecer la diferencia –también absoluta- entre tales magnitudes:

Si: $VA= \Delta Y$ y $\Delta Y= Y_1-Y_0$,

Entonces $VA= Y_1-Y_0$

La utilidad de este análisis se encuentra muy limitada, puesto que la mera comparación de los valores que adopta la variable en dos momentos diferentes solo puede estar vinculado a ella exclusivamente.
Por el contrario, el análisis relativo de la variable resulta mucho más productivo, puesto que nos permite realizar generalizaciones, comparaciones, proyecciones, etc.
A efectos de poder identificar una variación relativa (VR), debemos vincular la VA con la medición efectuada en el origen (m_0) de la siguiente forma:

$$VR = \frac{VA}{Y_0}$$

de donde:

$$VR = \frac{\Delta Y}{Y_0}$$

en consecuencia,

$$VR = \frac{Y_1 - Y_0}{Y_0}$$

operando algebraicamente,

$$VR = \frac{Y_1}{Y_0} - \frac{Y_0}{Y_0}$$

es así que:

$$VR = \frac{Y_1}{Y_0} - 1$$

El concepto de variación relativa responde a lo que se da en llamar tasa, para esa variable:

$$VR = tasa\ de\ \text{“}Y\text{”}$$

Ejemplo:

El frigorífico “El Girasol” dedicado a la exportación no tradicional de carne de conejo y sus derivados, con destino al MCE, ha estado analizando la evolución de sus dos últimos ejercicios contables y ha verificado la siguiente relación:

Frigorífico El Girasol	VENTAS EN	MILES DE €
CONCEPTO	**EJERCICIO XI**	**EJERCICIO XII**
Carne de conejo congelada	620	680
Cueros de conejo	124	144

Sus directivos desean conocer las proyecciones para el próximo ejercicio, por lo que le solicitan al gerente general que analice estas variables.

Si consideramos cada ítem por separado, podremos vincularlos y compararlos.

Calculamos la VA de cada uno:

$$VAcarne = 680000 - 620000$$

$$VAcarne = 60000$$

$$VAcuero = 144000 - 124000$$

$$VAcuero = 20000$$

El resultado absoluto hace prevalecer la utilidad de la carne, pero un análisis más detallado a partir de la VR puede indicarnos algo distinto:

$$VRcarne = \frac{60000}{620000}$$

$$VRcarne = 0.09677$$

$$VRcuero = \frac{20000}{124000}$$

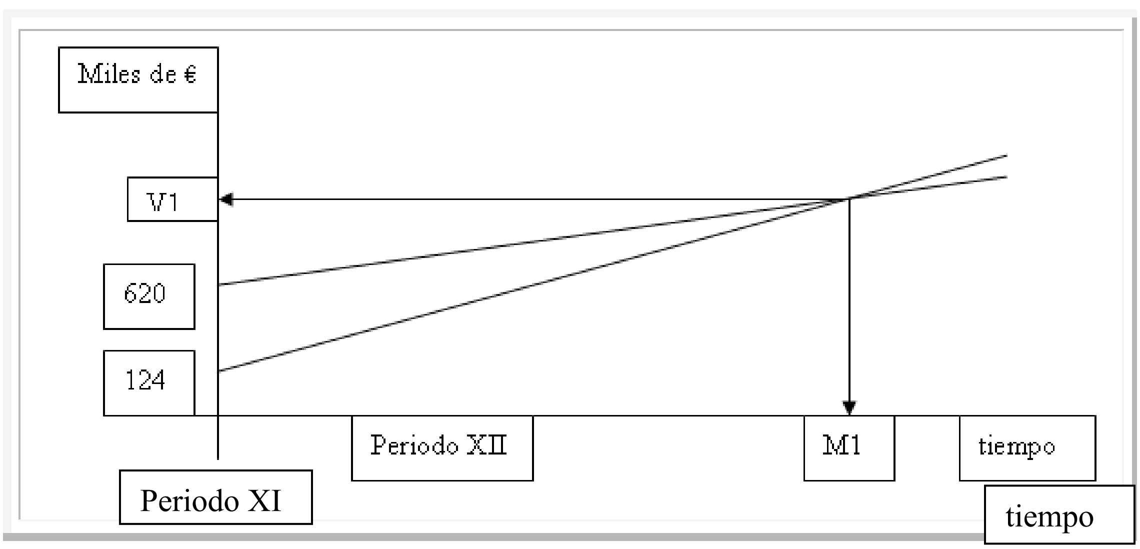
$$VRcuero = 0.1613$$

El estudio de la “tasa de evolución” de las ventas reveló un crecimiento de las remesas de carne de conejo de un 9,68 % (convertida a “tantos por ciento”), en tanto que el crecimiento de las ventas por demanda de cuero de conejo lo hizo en un 16,13 %.

Estos datos pudieron combinarse a manera de compararlos entre sí, independientemente de la heterogeneidad de cada ítem.

Otro dato significativo podría obtenerse a partir de estos guarismos, en la medida que proyectemos la evolución (aún de manera lineal), lo que nos indicaría que si el ritmo de crecimiento (tasa de evolución) se mantiene constante cabría la posibilidad de estimar, no solo cuando las ventas de cuero alcanzarían a las de carne, sino también en qué momento habría de producirse ese suceso.

Sin arriesgar anticipadamente ninguna fórmula de cálculo, la simple proyección en un eje de coordenadas a escala podría definir en forma aproximada ese momento (obviando el criterio exponencial):



La proyección muestra en el gráfico a V1, que representa el valor de las ventas de carne y de cueros al igualarse sus magnitudes, de mantenerse constante el ritmo de crecimiento entre los ejercicios XI y XII, por otra parte, M1 señala en qué momento futuro podría observarse dicha situación.

En cuanto al tipo de variable temporal analizada recordamos que, particularmente nuestra disciplina, enfoca sus argumentos a la variable capital (C), de características temporales, y que el resultado de su evolución se mide "por unidad de variable", es decir, por cada peso invertido, dando lugar a la denominada "tasa de interés" = i.

Para todos los efectos de cálculo utilizaremos la tasa unitaria de variación relativa i puesto que indica, para un cierto periodo, cuál resulta el beneficio (costo) de una inversión correspondiente a un capital disponible de $1.

No obstante, al indicar su valor se la transforma habitualmente en tasa "porcentual" (por ciento), simplemente multiplicando por cien su valor unitario por lo que, al referirnos a $i_{mensual} = 0.05$, esta será reconocida como la tasa (porcentual) del 5 % para esa frecuencia temporal.

Procedimiento para transformar tasas unitarias en porcentuales (regla de cálculo):

i (tasa unitaria) x 100 = tasa %

tasa %/100 = tasa unitaria (i)

Resulta importante señalar que el valor numérico ofrecido por una cierta tasa no representa nada en sí mismo si a ese valor no se le adiciona la frecuencia temporal de evolución.

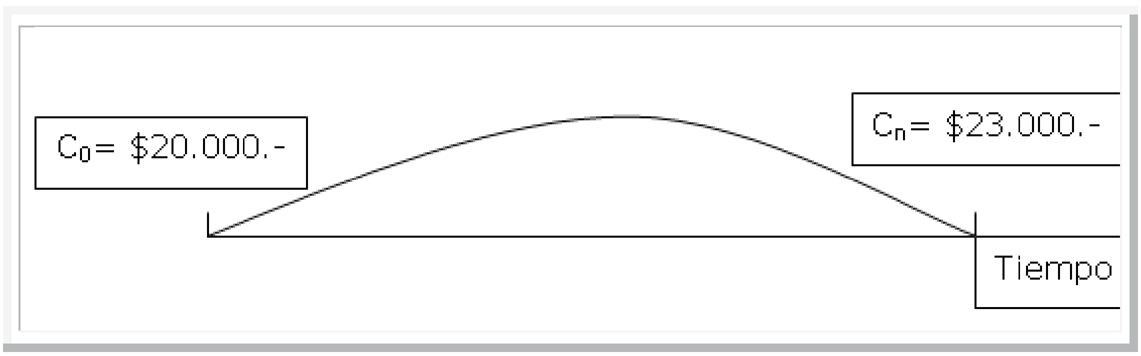
Supongamos un ejemplo en donde me ofrecen pagar un interés del 10 %, en tanto esté dispuesto a prestar $1.000 a un amigo. No resulta suficiente para determinar, bajo un criterio de rentabilidad, el beneficio de dicha operación puesto que no da lo mismo obtener el interés devengado de diez centavos por unidad de peso invertido al cabo de un mes que al cabo de seis meses.

Por tal motivo, toda tasa de interés deberá “ajustarse” a un plazo conocido como unidad de tiempo (Ut) que sirva de referencia para indicarnos cuánto tiempo es necesario para devengar el beneficio (monetario) prometido por la tasa.

CIRCUNSTANCIAS PARTICULARES DE LAS OPERACIONES FINANCIERAS

La tasa implícita

Las características de las distintas operaciones financieras arriba mencionadas hacen alusión a la existencia de ciertas variables como el tiempo y la tasa de interés. No obstante ello, resulta frecuente en la práctica verificar que ciertas deudas se cancelan, por ejemplo, en un único desembolso preacordado entre deudor y acreedor, sin haberse definido tasa alguna:



En el gráfico precedente, el prestatario recibe al inicio $20.000 y se compromete a restituirle al prestamista, luego de un cierto tiempo, $23.000.

La simplicidad de la operación no la excluye del conjunto de las operaciones financieras, dado que cumple la condición de evolución del capital a lo largo del tiempo.

Cabría aclarar que dicha operación contiene en sí misma infinitas tasas que pueden satisfacer la solución. Al menos, puede detectarse en forma directa una tasa cuya unidad de tiempo (Ut) resulte coincidente con el plazo, y que surge de la relación de las mediciones de las magnitudes de la variable temporal "capital".

Recordemos lo visto anteriormente, al definir el concepto de tasa como variación relativa (VR), donde:

$$\frac{23.000}{20.000} - 1 = tasa_p$$

Siendo $tasa_p$ aquella tasa "periódica" cuya unidad de tiempo (Ut) coincide exactamente con el plazo de duración de la operación.

De donde:

$tasa_p$ =0,15, válida para una frecuencia = p

(o bien, entendiéndola como tasa porcentual del 15 % para el periodo=p)

La tasa real (efectos de la inflación)

Las sociedades modernas todas, en mayor o menor medida, se ven afectadas por los efectos de la inflación. Sin ánimo de discutir las causas que la originan ni los límites de su tolerancia (puesto que resulta natural en toda economía en crecimiento), dado que forman parte de los análisis efectuados por los economistas, nuestra intención es reconocer su existencia y verificar en qué medida contribuye a disminuir los beneficios nominales expresados por las tasas de interés.
Desde el punto de vista económico, la inflación es el crecimiento generalizado de los precios de los bienes y servicios en forma continua. El crecimiento es medido

mediante la evolución de índices de precios. El IPC (Índice de Precios al Consumidor) se basa en los precios observados de un conjunto de bienes y servicios contenidos en una canasta familiar, como aquellos productos representativos que las familias adquieren normalmente en nuestro país.

El Instituto Nacional de Estadísticas y Censos (INDEC) implementó a partir de 2003 importantes cambios metodológicos en la Encuesta Permanente de Hogares (EPH) que mide los indicadores del mercado de trabajo y recopila los datos necesarios para calcular los niveles de pobreza e indigencia.

La EPH, que se aplicaba desde 1973 en dos momentos puntuales del año (la tercera semana de mayo y octubre), comenzó a realizarse desde 2003 en forma continua.

COMPONENTES	**Porcentaje**
Alimentos y bebidas	40.1
Indumentaria	9.41
Vivienda	8.54
Equipamiento y funcionamiento del hogar	8.58
Salud	7.15
Transporte y comunicaciones	11.36
Esparcimiento	6.24
Educación	2.71
Bienes y servicios varios	5.91
TOTAL	100.00

La incidencia del índice estará dada al conocer su valor para un cierto periodo, en función de la variación relativa (VR) que experimenta. Así:

Inflación en 2004 = $\boxed{\dfrac{IPC_{2004} - IPC_{2003}}{IPC_{2003}} \times 100}$

Al multiplicar la $VR \times 100$ estaremos indicando su cuantía en "tantos por ciento".

Definimos pues, el concepto de tasa real como aquella tasa que se encuentra libre de los efectos inflacionarios, es decir aquella tasa de interés a la cual se le ha desagregado la carga inflacionaria (pérdida del poder adquisitivo de la moneda).

Cuando un inversor pacta una operación financiera en el mercado conoce de antemano o bien la tasa efectiva o bien la tasa nominal a la que se ajustará su inflación. No siempre se puede conocer si al concluirla podrá adquirir mayor cantidad de bienes y servicios de modo de equipararlos en la proporción de su crecimiento monetario.

Un ejemplo podrá lograr clarificar los contenidos: suponemos que en el día de hoy destinamos \$10.000 a una operación financiera que nos rendirá al cabo de 30 días un 10 %, es decir, que la operación pueda efectuarse por ejemplo, al 0,10 mensual efectivo. Sabemos además, que con la misma cantidad de dinero podríamos hoy mismo adquirir alternativamente diez toneladas de un determinado cereal en el mercado mayorista. De no existir inflación en el periodo en que se efectúa la operación financiera estaríamos en condiciones de adquirir, luego de la toma de ganancias al finalizar la operación, 11 t. ¿Qué ocurre si luego de finalizada esta solo podemos adquirir 10 t? Efectivamente, nuestra operación no resultaría ventajosa (tampoco habríamos perdido dinero). ¿Y si en su lugar solo pudiéramos adquirir 9 t de ese bien? Pues en ese caso, la inflación habría resultado superior al rendimiento previsto. ¿En qué medida?

Estos interrogantes se resuelven relacionando las tasas de interés con la tasa de inflación para dar lugar a la tasa real, es decir, aquella tasa "neta" de los efectos inflacionarios.

Llamaremos i a la tasa de interés ya conocida, k a la tasa de inflación y r a la tasa real, producto de combinar adecuadamente las anteriores.

Partimos del supuesto que, frente al beneficio derivado de la inversión efectuada, debemos oponer los efectos inflacionarios:

Donde

$$\frac{(1+i)}{(1+k)}$$

Se trata de definir el rendimiento neto representado por la presencia del factor (1+r) del otro lado de la igualdad:

$$\frac{(1+i)}{(1+k)}=(1+r)$$

Reagrupando:

$$(1+i)=(1+k)\times(1+r)$$

Operando:

$$1+i=1+r+k+k\times r$$

$$i=r\times(1+k)+k$$

Finalmente:

$$r = \frac{i-k}{(1+k)}$$

Resulta necesario aclarar que la evolución de la inflación actúa de manera exponencial, esto es, que resulta acumulativa de periodo en periodo.

Dado que se refleja su evolución en forma mensual a través del INDEC, cualquier variación que desee compararse enfrentándola a una operación financiera deberá considerarse en un régimen compuesto, esto es tener especial atención a que se corresponda específicamente con la tasa de interés efectiva abarcativa del periodo analizado (ver capítulo correspondiente en tasas equivalentes).

En un breve ejemplo suponiendo la inflación del 10 % mensual, el análisis para un trimestre constante de inflación en este nivel daría como resultado el siguiente valor:

$$(1+k)\times(1+k)\times(1+k) = (1+k)^3$$

$$(1+k)^3 = (1+0.10)^3$$

$$(1+0.10)^3 = 1.331$$

Esto indica que la inflación (efectiva) para el trimestre manteniéndose constante al 10 % mensual alcanzaría al 33,1 % (superior a la proyección lineal, no aplicable). A efectos de determinar la tasa real, debemos previamente conocer la tasa efectiva trimestral de interés para que la comparación sea válida.

Al pie se muestra el Informe de la variación en el Nivel General de Precios para el mes de enero de 2005. El cuadro de la página siguiente indica al pie la canasta básica del adulto considerada por el INDEC en su EPH.

Índice de Precios al Consumidor GBA, base 1999=100

Enero de 2005

El Nivel General del Índice de Precios al Consumidor para la Capital Federal y los partidos que integra el Gran Buenos Aires registró en enero una variación de 1,5% con relación al mes anterior y de 7,2% co respecto a igual mes del año anterior.

Una síntesis de las variaciones de precios correspondiente a cada capítulo de la canasta del IPC-GB se puede observar en el Cuadro 1.

Cuadro 1. Índice de Precios al Consumidor GBA, base 1999=100
Índices y variaciones respecto del mes anterior, según capítulos.

Nivel General y Capítulos	Índice		Variación porcentual
	Enero 2005	Diciembre 2004	respecto del mes anterior
Nivel general	153,54	151,30	1,5
Alimentos y bebidas	168,95	167,76	0,7
Indumentaria	168,85	172,19	-1,9
Vivienda y servicios básicos	124,23	121,51	2,2
Equipamiento y mantenimiento del hogar	157,83	156,14	1,1
Atención médica y gastos para la salud	145,46	142,46	2,1
Transporte y comunicaciones	137,70	136,43	0,9
Esparcimiento	175,44	165,87	5,8
Educación	114,19	114,27	-0,1
Otros bienes y servicios	177,90	172,25	3,3

Los bienes, que representan un 53% de la canasta, tuvieron una variación de 0,6% mientras que lo servicios, que representan el restante 47% tuvieron una variación de 3,0%, con respecto al mes anterior.

3. Composición de la Canasta Básica Alimentaria

Se reproduce a continuación la composición de la Canasta Básica de Alimentos discriminando los artículos la componen y la cantidad de cada uno de ellos.

Cuadro 2. Canasta Básica de Alimentos del adulto equivalente

Componente	Gramos
pan	6.060
galletitas saladas	420
galletitas dulces	720
arroz	630
harina de trigo	1.020
otras harinas (maíz)	210
fideos	1.290
papa	7.050
batata	690
azúcar	1.440
dulces	240
legumbres secas	240
hortalizas	3.930
frutas	4.020
carnes	6.270
huevos	630
leche	7.950
queso	270
aceite	1.200
bebidas edulcoradas	4.050
bebidas gaseosas s/edulcorar	3.450
sal fina	150
sal gruesa	90
vinagre	90
café	60
té	60
yerba	600

Fuente: Documento de trabajo. Números 3 y 8. INDEC / IPA

I. 5.398 2/4 INDEC CBA

Link de acceso: https://biblioteca.indec.gob.ar/bases/minde/canasta_03_08.pdf

Capítulo 5
Capitalización simple

INTERÉS SIMPLE

Reconocemos de este modo a la operación financiera que se genera a partir de un capital original (Co) disponible por un cierto lapso de tiempo. La posibilidad de ser valuado a una cierta tasa le permite al inversor retirar, una vez concluida, una suma de dinero llamada monto cuyo importe resultara superior a la cuantía inicialmente depositada.

El beneficio originado por dicha diferencia se reconoce como interés. El objetivo de la operación será pues sustituir un capital presente por otro equivalente con vencimiento futuro, atendiendo a la Ley financiera del Régimen Simple.

CAPITALIZACIÓN SIMPLE

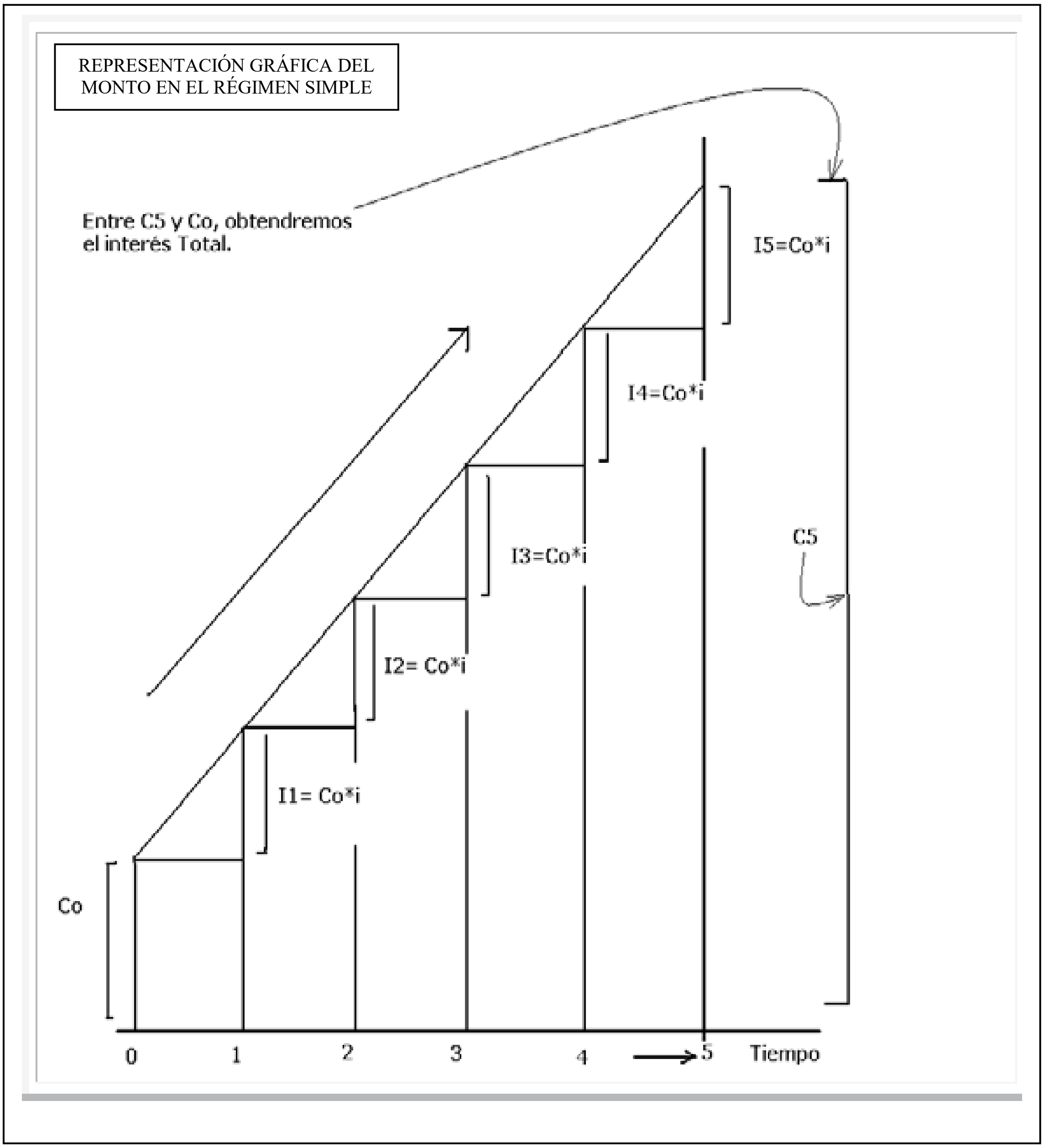
Dada la posibilidad que el capital Co permanezca colocado un determinado tiempo, independientemente del periodo que abarca la unidad de tiempo (ut) de la tasa pactada, para que podamos definir la operación dentro de los límites de un régimen simple.

Las sucesivas incorporaciones de interés resultarán constantes, dado que serán calculadas sobre el capital disponible en el instante inicial (Co), siendo siempre la única fuente generadora de nuevos intereses. Las variables que afectan directamente el beneficio del inversor (considerando solo aquellos relacionados directamente con aspectos matemáticos) serán el tiempo (n=t/ut) y la tasa de interés (i).

Los intereses que se obtienen de esta manera, por aplicación del régimen simple, irán formando el monto final en la medida en que todos se adicionen y recuperen en el futuro.
Como consecuencia directa se dice que los “intereses” no son productivos, es decir:

1) No se cargan al capital inicial para producir nuevos intereses.

2) El valor de Co determina asimismo el interés para cada periodo en particular.



FÓRMULA DEL INTERÉS SIMPLE

Resulta ser que el interés simple es proporcional al tiempo (*plazo de exposición*) y a la tasa (*razón de acrecentamiento*). La fórmula general muy difundida relaciona estas variables entre sí:

$$I = \frac{C \times R \times t}{100 \times ut}$$

Podemos asimismo, vincular aún más estos elementos al transformar la razón (porcentual) en tasa unitaria al dividirla por cien.

Por otra parte, al vincular "t" como "plazo de exposición" de la variable (o tiempo al que permanecerá colocado el capital) con la ut (unidad de tiempo en que opera la tasa pactada) encontramos a "n" como cantidad de periodos al que quedará expuesto el capital, en función de la tasa específicamente acordada.

Es decir:

$$I = C \times \left(\frac{R}{100}\right) \times \left(\frac{t}{ut}\right)$$

De acuerdo a lo expuesto:

$$\left(\frac{R}{100}\right) = i(tasa \cdot unitaria)$$

$$\left(\frac{t}{ut}\right) = \boxed{\textbf{\textit{n (períodos)}}}$$

Por lo que:

$$\boxed{I = C \times i \times n}$$

Definiendo así la fórmula más simplificada.

Ejemplo:

Dada la posibilidad de depositar $20.000 en una institución financiera durante siete meses de plazo al 3 % mensual simple de interés, determinar el beneficio final esperado.

Aplicando la expresión del interés:

I=20.000x0.03x7

I= $4.200

Rta.: el resultado esperado es de $4.200

Recordando que el interés es el resultado de la comparación de los capitales en dos momentos distintos, llamando a uno capital (C) y al otro monto (M):

$$\boxed{I = M - C}$$

Esta expresión puede dar lugar al conocimiento del monto a partir de añadirle intereses al capital disponible:

$$M = C + I$$

siendo:

$$M = C + C \times i \times n$$

$$\boxed{M = C \times (1 + i \times n)}$$

Ejemplo:

Se realiza una inversión temporaria por un plazo de 75 días depositando \$28.000 al 4 % mensual simple. Calcular la suma que podremos retirar una vez finalizada la operación, por todo concepto.

$$M = 28000 \times \left(1 + 0{,}04 \times \frac{75}{30}\right)$$

$$M = \$30.800.-$$

Rta.: el monto que reuniríamos sería de \$30.800.

Ejemplo:

Para un capital de $16.000 depositado durante un cierto tiempo, se logra un beneficio neto de $1.320 por aplicación de una tasa mensual simple del 0,025. Calcular por cuánto tiempo se mantuvo depositado el capital.

Debemos encontrar el plazo "t" que cumple la condición referida:

$$1320 = 16000 \times 0.025 \times \frac{t}{30}$$

t=99

Rta.: el capital permaneció colocado durante 99 días.

APLICACIÓN DE MÚLTIPLES TASAS A UN CAPITAL

Considerando la posibilidad que un cierto capital se encuentre afectado por una serie de tasas consecutivas utilizadas en la misma operación financiera, será necesario asociar los sucesivos plazos parciales junto a cada tasa correspondiente:

$$M = C \times (1 + i1 \times n1 + i2 \times n2 + ... + in \times nn)$$

Al desarrollar la expresión precedente aplicando la propiedad distributiva, observamos que, para alcanzar el monto final, recuperamos el capital original íntegramente, luego cada término se conformará por el producto de Co por la tasa utilizada en ese tramo en particular, por el plazo propio en que se empleó cada tasa.

La secuencia se repite tantas veces como cambios de tasa se observen en el transcurso de la operación, para luego sumar algebraicamente el beneficio total así acumulado.

Ejemplo:

Un capital de $8.000 se deposita en una cuenta durante 90 días, en cuyo transcurso se pactaron dos tasas mensuales consecutivas del 0,06 y 0,07, la primera de ellas vigente durante los primeros 44 días. Calcular el monto final conseguido.

SOLUCIÓN

$$M = 8000 \times \left(1 + 0.06 \times \frac{44}{30} + 0.07 \times \frac{46}{30}\right)$$

$$M = \$9.562.67$$

Rta.: el monto final reunido será de $9.562,67.

CONCEPTO DE CAPITALIZACIÓN DE INTERESES

El proceso conocido como capitalización de intereses se sustenta en la idea de la incorporación de los intereses devengados en una cierta etapa de una operación financiera dada al capital preexistente, lo que permitirá realizar el cálculo de los futuros intereses, no ya a partir del capital original sino del capital acrecentado por los intereses hasta allí conseguidos.

Esto genera una consecuencia directa: los beneficios se ven igualmente incrementados en la cuantía del crecimiento de los intereses (se obtienen intereses por sobre los intereses).

La expresión antes vista resultará transformada:

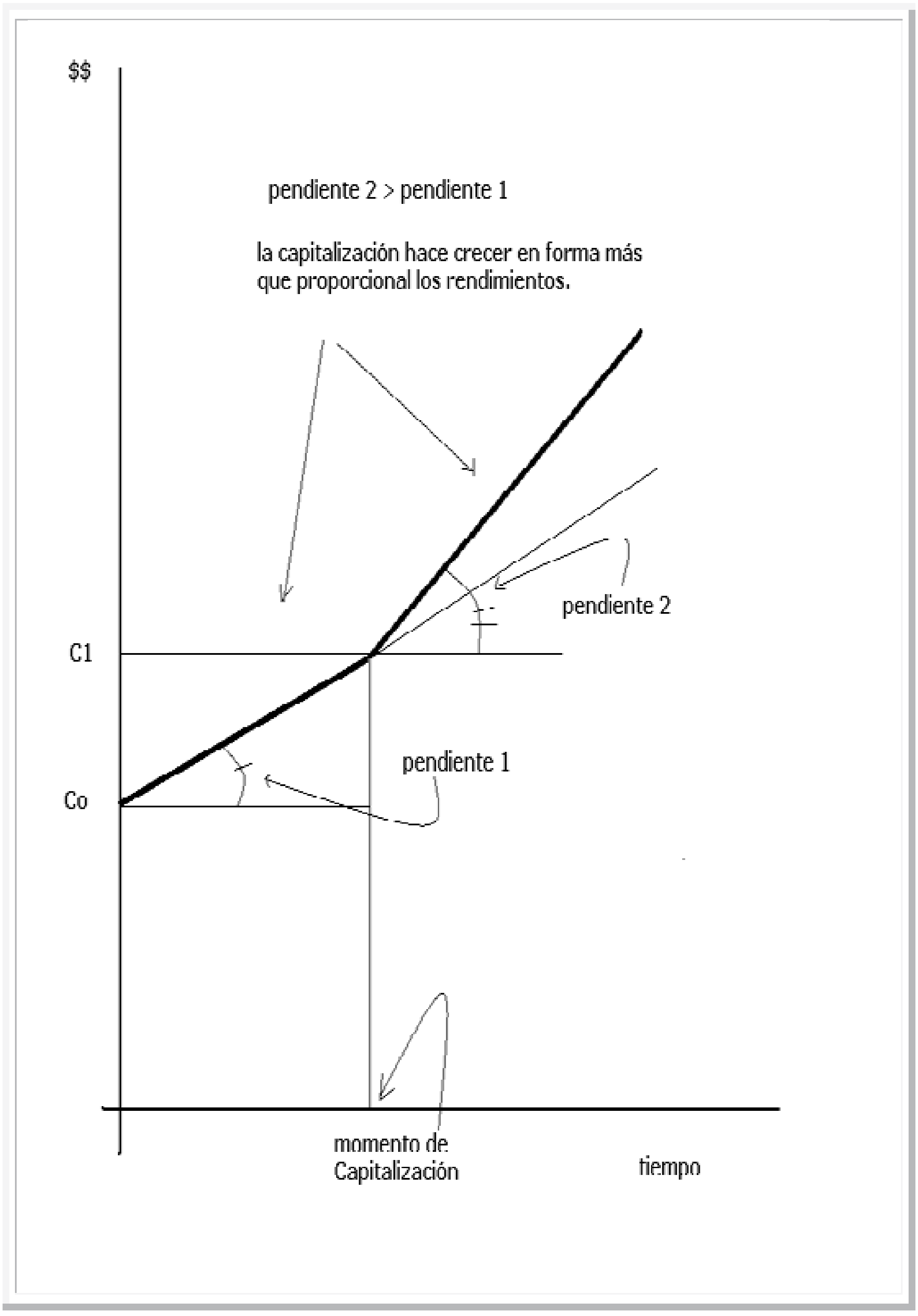
$$M_t = \left[C_0 \times \left(1 + i \times n_1\right)\right] \times \left(1 + i \times n_2\right)$$

de donde **M_t** = monto total luego del proceso de capitalización, **i=** tasa pactada en la operación, **n1**= cantidad de periodos iniciales, **n2**= cantidad de periodos posteriores a la capitalización hasta alcanzar su finalización.

Observemos en la ecuación que el producto de Co por el factor de evolución $(1+i\times n)$ permite conocer un monto (C1) (capital más intereses). Luego, este nuevo valor dará lugar a conocer el resultado siguiente por su propio plazo de exposición.

El gráfico de la siguiente página ilustra la operación.

Esquema del proceso de capitalización de intereses



MÉTODOS ABREVIADOS PARA EL CÁLCULO DE INTERESES

El uso de calculadoras y hojas de cálculo en programas de *software* ha simplificado la reiteración de cálculos manuales, especialmente en el manejo de grandes cantidades de información como ocurre en la administración de ciertas cuentas corrientes comerciales y bancarias.

La repetición de movimientos (ingresos y egresos) financieros, a partir de una tasa previamente conocida y una fecha de referencia (por ejemplo, el momento en que se produce una capitalización de intereses) posibilita utilizar alguno de los métodos que simplifican estos procesos.

1) MÉTODO DE DIVISORES FIJOS

Para proceder al cálculo de intereses que se acumulan en una operación financiera acordada por el régimen simple de capitalización, recordamos la fórmula inicialmente descripta para los intereses:

$$I = \frac{C \times R \times t}{100 \times ut}$$

Reagrupándola convenientemente:

$$I = \frac{C \times t}{\frac{100 \times ut}{R}}$$

En tanto la tasa pactada sea anual quedará definida la ut=365 (días), pero debemos recordar que si así no lo fuera será igualmente indicada en cantidad de días, por lo que:

$$I = \frac{C \times t}{\frac{36500}{R}}$$

Considerando el divisor fijo:

$$\Delta = \frac{36500}{R}$$

resulta que:

$$\boxed{I = \frac{C \times t}{\Delta}}$$

El empleo del divisor fijo puede ser aplicado a una sucesión de movimientos, positivos o negativos, por lo que el interés total sería:

$$I_t = \frac{C1 \times t1 \pm C2 \times t2 \pm C3 \times t3 \pm \ldots \pm Cn \times tn}{\Delta}$$

2) REDUCCIÓN A LA TASA DIARIA

Precisamente, la relación inversa del llamado divisor fijo, representa la tasa unitaria diaria que se emplea en estas operaciones.

Con este método logramos reducir aún más las expresiones finales al utilizar igualmente el concepto de proporcionalidad y equivalencia de las tasas en el régimen simple.

A partir de la tasa convenida practicamos la proporcionalidad hasta reducirla a una frecuencia diaria, siendo:

$$I = C \times i \times n$$

ajustado a una tasa anual (i_a) pactada:

$$I = C \times \frac{i_a}{365} \times t$$

para una tasa diaria:

$$i_d = \frac{i_a}{365}$$

$$I = (C \times t) \times i_d$$

Recordamos que el producto del capital por el plazo de exposición de la variable es denominado numeral:

$$I = Numeral \times i_d$$

Ejemplo:

Según el siguiente detalle de movimientos correspondiente a la caja de ahorros n.º 15237/8, se desea conocer el total de intereses que serán acreditados al 31 de julio. La tasa empleada en esta operación se fija en el 27 % anual.

Fecha	Movimiento
02-06	+1200
14-06	+ 880
26-06	- 466
04-07	+ 965
15-07	- 241

SOLUCIÓN:

A) EMPLEANDO MÉTODO DE DIVISORES FIJOS

El divisor fijo para considerar será:

$$\Delta = \frac{36500}{27} \quad \text{es decir:} \quad \Delta = 1351.85$$

Fecha	Movimiento	Días	Numeral
02-06	1200	59	70.800
14-06	880	47	41.360
26-06	(466)	35	(16.310)
04-07	965	27	26.055
15-07	(241)	16	(3.856)
Total			**118.049**

Una vez tabulados los datos y calculada la sumatoria del numeral, resta vincularlo al divisor fijo:

Interés total = $\dfrac{118.049}{1351.85}$

Rta.: el interés total devengado hasta el 31 de Julio fue de $87.32

B) POR REDUCCIÓN A LA TASA DIARIA

La tasa diaria equivalente al 27 % anual simple será:

$$\frac{0.27}{365} = 0.00073973$$

Utilizando el mismo cuadro elaborado en el método anterior:

Fecha	Movimiento	Días	Numeral
02-06	1200	59	70.800
14-06	880	47	41.360
26-06	(466)	35	(16.310)
04-07	965	27	26.055
15-07	(241)	16	(3.856)
Total			**118.049**

Por último, multiplicamos el resultado del numeral por la tasa diaria:

Interés total = 118049 X 0.00073973

Interés total = $87.32

EJERCICIOS RESUELTOS DE INTERÉS SIMPLE

Se realiza un depósito de $1000 durante diez meses al 4 % mensual simple de interés. A los tres meses se realiza un depósito extraordinario de $400; determinar el saldo al finalizar la operación.

SOLUCIÓN:

$$1000x(1+0.04x10)+400x(1+0.04x7)$$

Dado que se trata de una operación sin capitalizaciones, se acumulan los resultados a partir del momento en que se depositan o retiran distintos importes.

Resolviendo:

$$1000x1.4+400x1.28=1912$$

Rta.: el saldo disponible al final de la operación alcanza los $1.912.

Se deposita en una cuenta $12.000 durante nueve meses. En su transcurso, se emplearon dos tasas simples mensuales y consecutivas, del 0,02 la primera y del 0,03 la segunda. Conociendo que el monto final reunido totalizó la suma de $14.820, calcular cuánto tiempo permaneció colocado el capital a cada tasa.

SOLUCIÓN:

$$14820=12000\times\left(1+0.02\times\frac{t1}{30}+0.03\times\left\langle\frac{270-t1}{30}\right\rangle\right)$$

Se puede observar que, al no existir capitalización de intereses, las sucesivas tasas se aplican directamente sobre el capital original de $12.000, luego, al determinar el plazo de exposición de la segunda tasa lo vinculamos a las restantes variables temporales conocidas, es decir, por un lado la duración completa de la operación medida en días = 270 y por el otro, el plazo de exposición de la primera tasa, es decir t1, de donde:

$$t2 = 270 - t1$$

Operando en la ecuación:

$$\frac{1.482}{1.2} = 1 + 0.00066667 \times t1 + 0.27 - 0.001 \times t1$$

$$1.235 = 1.27 - 0.00033333t1$$

$$-0.035 = -0.0003333t1$$

$$t1 = \frac{0.035}{0.000333}$$

Rta.: t1, el plazo de exposición de la primera tasa empleada fue de 105 días, t2, el plazo de la segunda tasa fue de 165 días (270-105).

Se depositó un capital de $15.000 durante un año al 18 % semestral. Cuatro meses después de efectuado el depósito se capitalizaron los intereses. Determinar el beneficio adicional que recibirá el inversor por ese proceso.

SOLUCIÓN:

Averiguamos en primer lugar el monto sin capitalización:

$$M = 15.000 \times \left(1 + \frac{0.18 \times 365}{180} \right)$$

$$M = 15.000 \times 1.365$$

$$M = 20.475$$

Consideramos ahora el proceso de capitalización indicado:

$$M_{capitalizacion} = 15.000 \times \left(1 + \frac{0.18 \times 120}{180} \right) \times \left(1 + \frac{0.18 \times 245}{180} \right)$$

$$M_{capitalizacion} = 15.000 \times 1.3944$$

$$M_{capitalizacion} = 20.916$$

La diferencia entre "M" y "M capitalización" da lugar a la respuesta, en tanto, el beneficio "adicional" que se presenta por haberse capitalizado intereses resulta de $441.

Un capital de $20.000 es dividido en tres partes tales que la primera de ellas es colocada al 80 % anual, la segunda es colocada al 100 % anual, y la tercera parte es colocada al 120 % anual, todas a nueve meses de plazo. Sabiendo que las tres colocaciones dan exactamente el mismo monto final, determinar cómo se realizó la división del capital (considerar año civil).

SOLUCIÓN:

Debemos relacionar las variables conocidas, ya sea igualando o sustituyendo, hasta concentrarnos en una sola incógnita:

$$20.000 = C1 + C2 + C3$$

Además, sabemos que:

$$M1 = M2 = M3$$

$$C1x\left(1+\frac{0.8x270}{365}\right) = C2x\left(1+\frac{1x270}{365}\right) = C3x\left(1+\frac{1.2x270}{365}\right)$$

$$1.5918xC1 = 1.7397xC2 = 1.88767xC3$$

$$C1 = \frac{1.7397}{1.5918}xC2 \qquad C1 = 1.092976xC2$$

$$C1 = \frac{1.88767}{1.5918}xC3 \qquad C1 = 1.18587xC3$$

Igualando en C1:

$$1.092976xC2 = 1.18587xC3$$

$$C3 = 0.9217xC2$$

Sustituyendo en la expresión inicial:

$$20.000 = 1.092976 \times C2 + C2 + 0.9217 \times C2$$

$$20.000 = 3.0146xC2$$

$\therefore$ La distribución del capital de \$20.000 fue realizada de la siguiente forma:

$$C2 = \$6.634{,}29$$
$$C1 = \$7.251{,}11$$
$$C3 = \$6.114{,}82$$

Hace cinco meses se efectuó un cierto depósito, hoy se retira el depósito inicial y luego de cinco meses se retirará por todo concepto una suma igual al triple depositado. Determinar a qué tasa mensual simple se realiza la operación.

SOLUCIÓN:

Planteamos la solución considerando un capital unitario (de \$1):

$$1 \times (1 + 10 \times i) - 1 \times (1 + 5 \times i) = 3$$

Observamos además, que no existe referencia en el enunciado a proceso de capitalización alguno.

$$1 + 10 \times i - 1 - 5 \times i = 3$$

$$5 \times i = 3$$

Rta.: la tasa simple que cumple la condición es del 0,6 (60 % mensual).

La Sra. Gianpietro efectuó un depósito en una cuenta al 0,8 % mensual simple de interés durante nueve meses para obtener un cierto monto. Sabiendo que se produjo una capitalización de intereses cuatro meses antes del retiro final, calcular qué tasa bimestral simple le hubiera permitido alcanzar el mismo monto sin capitalizaciones intermedias.

SOLUCIÓN:

Igualamos los factores de capitalización para cada tasa:

$$(1+0.008\times 5)\times(1+0.008\times 4)=\left(1+i_b\times\frac{9}{2}\right)$$

Resolvemos despejando i_b

$$i_b\times\frac{9}{2}=1.07328-1$$

$$i_b=0.01628$$

Rta.: la tasa buscada resultaría del 1,628 % bimestral.

La empresa Delta Comercial SA realiza un depósito en una cuenta especial de ahorros donde obtiene una tasa preferencial del 2 % mensual simple. Si al cabo de ocho meses obtiene un beneficio total de $5.200, calcular el importe del depósito si se conoce que se produjo una capitalización de intereses tres meses antes del retiro final.

SOLUCIÓN:

$$5200=C_0\times(1+0.02)^5\times(1+0.02)^3-C_0$$

$$5200 = C_0 \times (1.17166 - 1)$$

$$C_0 = \frac{5200}{0.17166}$$

$$C_0 = \$30.292.55$$

Rta.: el capital original de la operación fue de $30.292.55

El Sr. Henry reunió un monto de $23.040 luego de haber depositado $16.000 hace exactamente un año. Si durante la operación se pactaron dos tasas simples mensuales del 3 % y 4 % respectivamente, calcular cuánto tiempo dicho capital permaneció a cada una de las tasas indicadas.

SOLUCIÓN:

$$23040 = 16000 \times \left[1 + 0.03 \times \frac{t1}{30} + 0.04 \times \left(\frac{365 - t1}{30} \right) \right]$$

Dividimos cada tasa por 30 para calcular su tasa unitaria:

$$1.44 = 1 + 0.001 \times t1 + .001\widehat{3} \times (365 - t1)$$

$$1.44 = 1 + 0.001 \times t1 + .048\widehat{6} - 0.001\widehat{3} \times t1)$$

$$0.44 = 0.48\widehat{6} - (0.001\widehat{3} + t1)$$

$$0.000\overset{\frown}{3} \times t1 = 0.04\overset{\frown}{6}$$

despejando t1:

$$t1 = \frac{0.04\overset{\frown}{6}}{0.000\overset{\frown}{3}}$$

$$t1 \cong 140.días$$

$$\therefore t2 = 365 - t1$$

$$t2 = 365 - 140$$

$$t2 = 225.días$$

Rta.: los plazos sucesivos para alcanzar dicho monto fueron de 140 y 225 días para el 3 % y el 4 % respectivamente.

Capítulo 6

Descuento en régimen simple

GENERALIDADES DEL DESCUENTO

En lo referente a la actividad financiera, se denomina descuento al valor o importe reducido que se obtiene sobre una obligación por el hecho de abonarla antes de su vencimiento.

Consideramos al descuento como la función inversa al interés, dado que el monto obtenido como resultado de la inversión está representado por el valor nominal en la operación de descuento, y el capital a invertir está representado por el valor actual de la misma operación.

Dicha obligación se documenta en un papel de negocio, generalmente denominado comercialmente "pagaré" donde constan los siguientes datos:

1. Suma escrita en números y letras que denominamos **valor nominal,** que representa el valor futuro del capital que generalmente está representado por un documento y al que se lo denomina también valor escritural.

2. Fecha en que debe cancelarse dicho documento que llamamos **fecha de vencimiento,** y que representa el momento en que deba hacerse efectiva la obligación.

3. Firma del responsable o deudor aceptando la obligación y comprometiéndose legalmente a hacerla efectiva a su vencimiento.

En una operación documentada nos interesará conocer:

1. El importe que se deduce si deseamos cancelarlo anticipadamente, que se denomina **descuento.**

2. El importe a abonar anticipadamente, que es la diferencia entre el valor nominal y el descuento, y que representa el **valor actual,** al que se lo puede llamar también valor presente o efectivo y que está dado por un capital obtenido en cualquier momento anterior a la fecha en que dicho capital será exigible.

3. La tasa unitaria de interés que fuera utilizada denomina **i.**

4. La tasa unitaria de descuento utilizada en la operación denominada **d.**

Cabe aclarar que en la práctica a otro tipo de operaciones vinculadas, como la presentación de estas obligaciones a un prestamista o entidad financiera para recibir en forma anticipada al momento de su vencimiento una suma determinada (de menor cuantía al valor escrito), también se las denomina “descuento”.
Asimismo, a partir de la creación del instrumento denominado “cheque de pago diferido” en la legislación argentina este ha venido a reemplazar la utilización de los “pagarés”, al punto que su empleo se ve circunscrito a la formalización de las transacciones crediticias en la banca oficial, habiendo caído rápidamente en desuso en la actividad comercial. Independientemente de ello, y hecha esta aclaración, la ejercitación propuesta hace referencia indistinta a cualquiera de ellos al momento de desarrollar los enunciados propuestos.

DESCUENTO SIMPLE

De acuerdo con la Ley financiera del descuento simple donde se observa la sustitución de un capital futuro por otro equivalente con vencimiento en el presente, nos encontramos ahora con una operación que resulta ser inversa a la de capitalización simple.

Los intereses (descuento) no resultan acumulativos (o productivos) por lo que a medida que se generan no se deducen del capital inicial para así calcular intereses (descuento) del nuevo periodo, sino que *todos* serán calculados *siempre* a partir del capital que les dio origen.

Las variables que intervienen en las operaciones de descuento simple son las mismas, independientemente de la tasa que se habrá de emplear, y resultan análogas a las referidas previamente al indicar las reglas financieras de las operaciones de interés simple, donde:

```
 C                    I                     M
_!____________________!____________________ !
 i                    i                     i
 V                    D                      N
```

Válida la analogía entre el capital original y el valor presente, entre el interés y el descuento, y el monto y el valor nominal. Mientras que en el proceso de capitalización simple, el capital original era un valor temporalmente anterior al monto (como valor futuro), en el proceso de actualización o descuento resulta lo propio entre el valor actual y el valor nominal.

Asimismo, considerado el interés como la diferencia entre el monto y el capital original, y siendo:

D= descuento

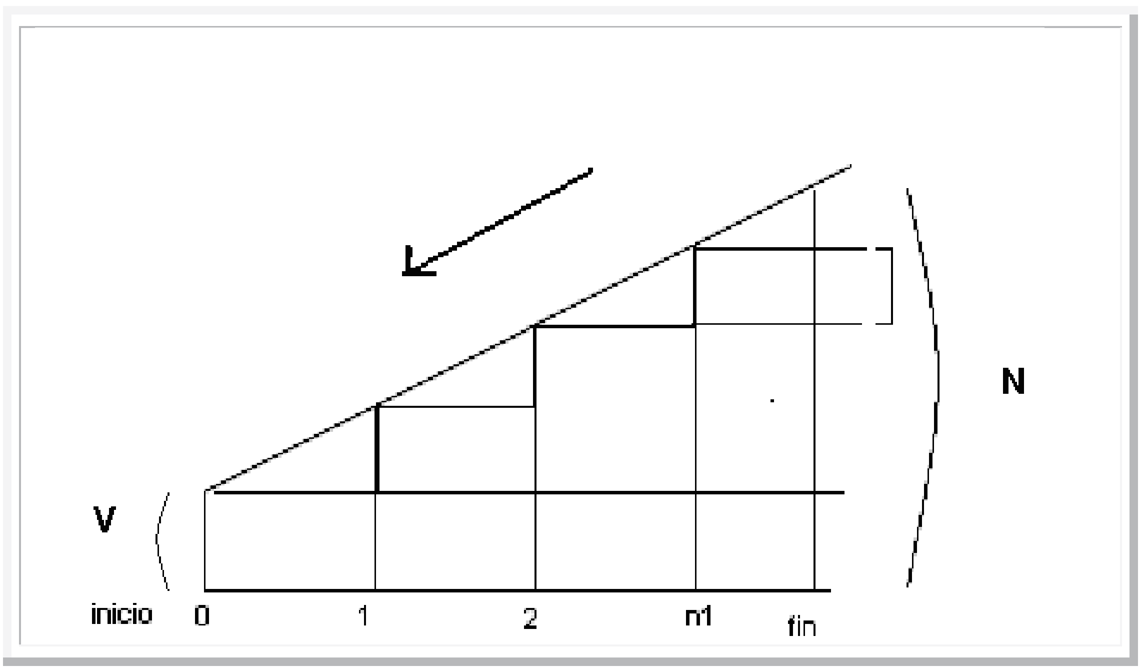
V= valor actual

N= valor nominal

Surge que el descuento proviene de la diferencia entre el valor nominal contra el valor actual:

$$\boxed{D = N - V}$$

El gráfico siguiente muestra cómo se "aminoran los intereses" a partir de un cierto valor futuro y se obtiene un valor actual por efecto de la anticipación a una cierta tasa de descuento.



Existen dos métodos para el cálculo del descuento en base a operaciones donde la tasa actúa de manera simple.

1. El descuento calculado en base al interés simple aplicado sobre el valor nominal del documento por el plazo de anticipación, al que se lo denomina

descuento comercial o descuento simple o descuento bancario o descuento a tasa adelantada o descuento a tasa de descuento.

2. El descuento calculado en base al interés simple aplicado sobre el valor actual del documento por el plazo de anticipación, al que se lo denomina descuento racional o descuento matemático o descuento a tasa vencida o descuento a tasa de interés o método de intereses cargados o intereses incluidos.

DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA DEL DESCUENTO SIMPLE EN BASE A TASA "d"

El descuento comercial es el interés simple calculado sobre el valor nominal. A partir de las conclusiones precedentes, estamos en condiciones de definir al descuento en base a tasa "d", también conocido como "descuento adelantado", "descuento comercial" o "descuento bancario", como el producto del valor nominal por la tasa de descuento aplicada, por el plazo de anticipación:

$$\boxed{D_d = N \times d \times n}$$

Al vincular ambas fórmulas, podemos deducir algunas otras que resultan útiles.

Siendo:

$$N - V = N \times d \times n$$

$$V = N - N \times d \times n$$

$$\boxed{V = N(1 - d \times n)}$$

$$\boxed{N = V(1 - d \times n)^{-1}}$$

Para averiguar el plazo de anticipación:

$$\frac{V}{N} = 1 - d \times n$$

$$d \times n = 1 - \frac{V}{N}$$

$$n = \frac{1 - \frac{V}{N}}{d}$$

Para averiguar la tasa:

$$d = \frac{1 - \frac{V}{N}}{n}$$

Ejemplo:

Se descuenta en el día de la fecha un pagaré que fuera suscripto hace 50 días, cuyo vencimiento fue pactado a tres meses de plazo por valor de $18.000. El Banco nos ofrece una tasa del 2,5 % mensual. Calcular el importe que nos habrá de acreditar en la cuenta.

$$\leftarrow\text{---------------}x$$

$$0\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_50\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_90$$

V=? N=18.000

Nótese que el plazo de anticipación se sitúa 40 días antes del vencimiento del documento. Los 50 días previos no son calculados puesto que el Banco solo percibirá su descuento en relación al tiempo faltante para su efectivo vencimiento, y solo desde el momento en donde se lo cedemos.

$$V = 18000 \times \left(1 - 0.025 \times \frac{40}{30}\right)$$

Rta.: el valor actual sería de $17.400.

La denominación "descuento bancario" obviamente hace referencia a su uso frecuente por estas instituciones financieras, pero su empleo se ve restringido a condiciones "normales" puesto que en ciertas circunstancias con alta inflación y por ende alto costo del capital, lo que trae como consecuencia directa un aumento excesivo en las tasas empleadas, su uso se vuelve impracticable, lo que deriva en un “absurdo financiero”. En la fórmula se pueden observar dos cuestiones:

1. Si el producto **d. n = 1** el resultado es cero, por lo tanto el valor actual del documento es igual a cero, lo que significaría que el descuento es igual al valor nominal, situación irreal. Esto significa que con motivo del transcurso del tiempo, el importe del descuento igualaría al valor nominal.

2. Si el producto **d. n > 1** el resultado sería negativo o significaría que el valor actual fuera negativo, por lo que implica que debería abonarse el importe obtenido además de pagar el documento a su vencimiento, situación por lo más ilógica. Este aspecto negativo de la aplicación deriva en lo que se ha dado en llamar “un absurdo financiero”, por lo que también se lo denomina descuento abusivo. Esta situación generalmente se puede dar en épocas de tasas elevadas.

Dada esta situación, se lo emplea en operaciones comerciales, especialmente las bancarias de corto plazo, y se estable por normas específicas del sector bancario, hasta un plazo máximo de 180 días.

Ejemplo:

Descontando un pagaré de $10.000 seis meses antes de su vencimiento se deduce un cierto valor. Si la tasa convenida resultará del 20 % mensual adelantado, calcular dicho importe.

Siendo:

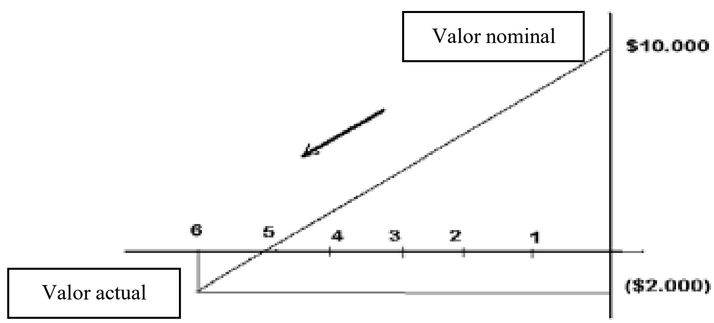
$$D = N \times d \times n$$

D = 10.000x0.20x6

De donde D = $12.000.

El caso precedente resulta un absurdo financiero, dado que el importe del descuento supera en $2.000 el del valor nominal, o dicho de otro modo, significa que el importe a recibir sería negativo, esto es que no solo no recibiríamos suma alguna, sino que por el contrario nos veríamos en la obligación de entregar además del documento $2.000.

Gráficamente:



ABSURDO FINANCIERO

Anticipando una operación financiera por un amplio plazo a una elevada tasa adelantada.

Otro aspecto a considerar para el cálculo del valor a recibir es el agregado de una serie de gastos que pueden afectar dicha operación financiera y que se calculan sobre el valor nominal del documento, como ser: gastos de sellados, gastos administrativos, comisiones varias, etc. En tal caso, denominamos **G** al total de estos, por lo cual la ecuación quedaría así:

$$V = N - D - G$$

DESCUENTO RACIONAL

También conocido como "descuento matemático" o "descuento a interés vencido" o "intereses cargados". Se denomina descuento racional a aquel en que se calcula el interés simple sobre el capital representado por el valor actual del documento, a diferencia del descuento comercial, donde este se calcula sobre el valor nominal.

Esta aplicación tiene en cuenta que el interés que se calcula surge del capital recibido y no sobre el importe escrito en el documento, que representa el total bruto (capital más interés).

El descuento en este caso se calculará a partir del valor actual (tal como se cargaban los intereses al capital para obtener el monto en capitalización simple).

Siendo:

$$\boxed{D_i = V \times i \times n}$$

Y recordando que:

$$D = N - V$$

$$V \times i \times n = N - V$$

$$N = V + V \times i \times n$$

$$\boxed{N = V(1 + i \times n)}$$

Otras fórmulas útiles:

$$V = N(1 + 1 \times n)^{-1}$$

$$\frac{N}{V} = 1 + i \times n$$

$$i \times n = \frac{N}{V} - 1$$

$$i = \frac{\frac{N}{V} - 1}{n}$$

El descuento racional o a tasa de interés simple nunca puede superar al valor nominal, por lo tanto no se pueden dar las situaciones expuestas en el descuento bancario o comercial.

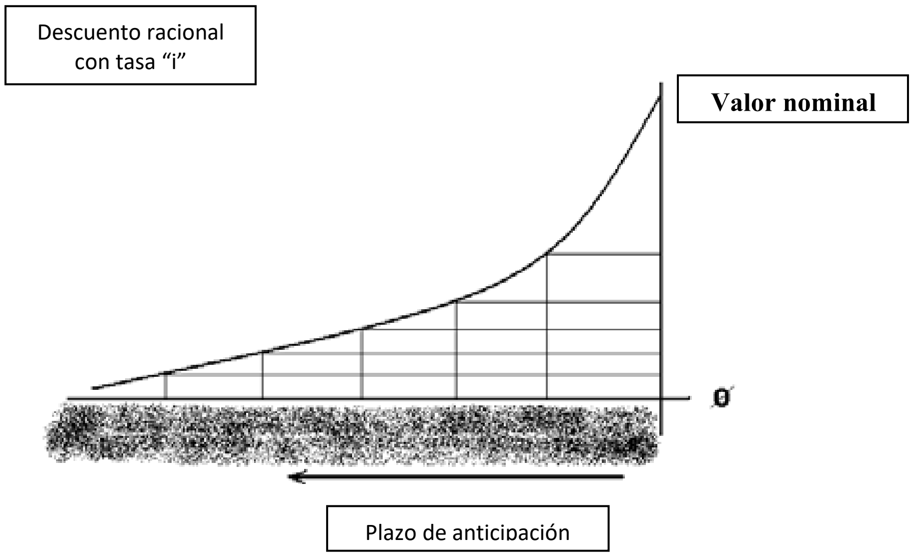
En consecuencia, como el descuento es el interés del valor actual y como este es mayor que cero, el descuento es mayor que cero pero más pequeño porque es un porcentaje del valor actual.

Si el valor actual es cero, entonces el descuento es igual al valor nominal y no se produciría transacción financiera alguna.

Podría ocurrir también que, si el valor actual es mayor que cero siendo el descuento cero, entonces el valor actual es igual al valor nominal, pero no habría operación financiera porque no se suponen operaciones gratuitas.

Matemáticamente, podría ocurrir que el valor actual tienda a cero cuando la expresión "1 + i n" tienda a infinito, y para que ello ocurra tendría la tasa de interés que tender a infinito, lo cual sería también un absurdo porque no existe ninguna tasa tan grande que tienda a infinito.

Gráficamente, se puede efectivamente observar que el descuento racional o matemático nunca devuelve un valor mayor de descuento que el propio valor actual, es decir que nunca traspasa el eje de las abscisas donde reflejamos el tiempo; cualquiera sea su plazo de anticipación obtendremos un valor positivo como valor actual:



La zona grisada representa la escala de valores monetarios negativos por las que no "transita" el descuento racional.

Ejemplo:

Resolver el ejercicio anterior, considerando que se emplea como tasa el 20 % mensual simple y vencido:

En este caso:

$$V = \frac{10000}{1 + 0.20 \times 6}$$

$$V = \$4.545,45. -$$

$$D_i = V \times i \times n$$

$$D_i = 4545.45 \times 0.20 \times 6$$

$$D_i = \$5.454.54$$

O bien:

$$D_i = N - V$$

$$D_i = 10000 - 4545{,}54$$

Rta.: el descuento racional aplicado a la operación sería de \$5.454,54.

A diferencia del descuento bancario, el descuento racional permite obtener un valor actual válido cualquiera resulte la tasa o su plazo de anticipación.

RELACIÓN ENTRE EL DESCUENTO MATEMÁTICO Y EL BANCARIO

Si se verifica coincidencia entre los valores adoptados por la tasa de interés (descuento matemático, racional o tasa vencida) y la tasa de descuento (descuento bancario, comercial o tasa adelantada) no existiría coincidencia entre los resultados, puesto que mientras uno opera sobre el valor actual (V), el restante lo hace sobre el nominal (N), esto significa que ambos trabajan sobre capitales diferentes.

Esta diferencia presupone que siempre el descuento comercial o bancario resultará mayor que el descuento racional.

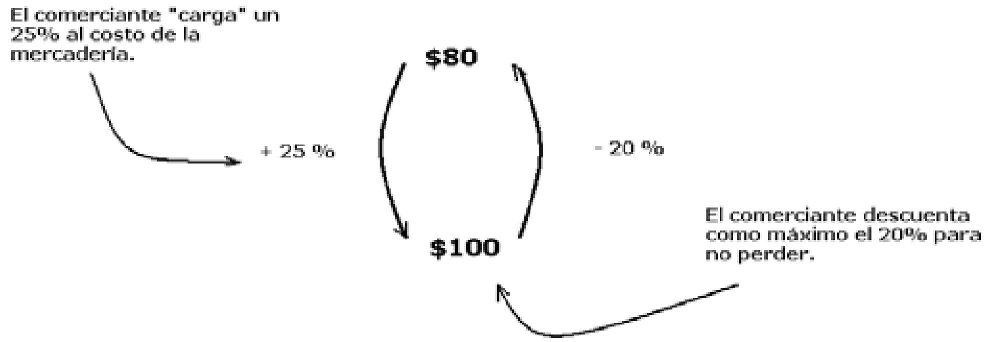
$$D_c > D_r$$

Donde Dc es el descuento comercial o bancario y Dr es el descuento racional o matemático. Resulta simple entender esta diferencia si lo comparamos con un ejemplo partiendo de una relación de márgenes de comercialización.

Supongamos que un comerciante adquiere un bien en $80 y decide venderlo al público en $100. ¿Cuál sería el margen de rentabilidad que obtendría? ¿Cuál sería el máximo descuento que podría otorgar sin incurrir en quebranto, es decir, sin perder dinero?

Las respuestas nos llevan a valores distintos:

COMPARACIÓN ENTRE UNA TASA ADELANTADA Y OTRA VENCIDA PARA UN CÁLCULO DE MARGEN DE RENTABILIDAD COMERCIAL



En este ejemplo podemos observar que si el comerciante ofreciera un descuento igual al 25 % estaría vendiendo su bien por debajo del costo en $5, dado que el valor de venta sería de $75.

Si nuestro objetivo fuera encontrarnos con valores idénticos, es decir, obtener magnitudes (monetarias) absolutas iguales, debemos relacionar ambas tasas para que el resultado sea indiferente al aplicar una u otra modalidad. Esta relación la podemos hallar a partir de la igualación de ambos descuentos:

$$D_c = D_r$$

Siendo

$$D_c = N \times d \times n \quad \text{y} \quad D_r = V \times i \times n$$

$$N \times d \times n = V \times i \times n$$

Para

$$V = \frac{N}{1+i\times n}$$

$$N\times d\times n = \frac{N\times i\times n}{(1+i\times n)}$$

Simplificando

$$d = \frac{i}{1+i\times n}$$

La tasa de descuento equivalente a partir de la tasa de interés.

Y para $$N = \frac{V}{1-d\times n}$$

$$\frac{V\times d\times n}{1-d\times n} = V\times i\times n$$

Simplificando

$$i = \frac{d}{1-d\times n}$$

La tasa de interés equivalente a partir de la tasa de descuento.

También debemos aclarar que la equivalencia entre la tasa de interés y la tasa de descuento en el régimen simple es una función temporal, es decir que solo se encuentra un valor válido para una operación financiera cuya duración común es "n".

Ejemplo:

Calcular cuál será la tasa de interés que se aplicó al descontar un documento firmado oportunamente por $12.000 negociado en una institución bancaria al 11 % mensual simple, cuarenta y cinco días antes de su vencimiento.

SOLUCIÓN:

Utilizamos la fórmula correspondiente para averiguar la tasa vencida a partir del conocimiento de la tasa adelantada:

$$i = \frac{d}{(1 - d \times n)}$$

$$i = \frac{0.11}{1 - 0.11 \times \frac{45}{30}}$$

$$i_{mensual} = 0.1317$$

La tasa simple vencida (interés racional) que se corresponde para un plazo de 45 días al 11 % adelantado resultaría del 13,17 %.
Esto significa que tanto si pudiéramos elegir entre una u otra, llegaríamos al mismo resultado final.

EQUIVALENCIA FINANCIERA DE CAPITALES

Al momento de comparar diversos capitales entre sí distribuidos en diferentes momentos nos conduce a preguntarnos cuál de todos podría ser el mejor. Este interrogante se resuelve a partir de dos condiciones:

a) La comparación de todos los capitales involucrados se debe realizar para un mismo momento, es decir que debemos elegir un instante preciso para su comparación.
b) Todos los capitales deberán valuarse (compararse) frente a una misma tasa de interés o descuento.

Dicha sustitución tiene lugar entre uno o unos capitales determinados por otro u otros capitales ubicados en momentos distintos y, por lo tanto, de diferentes valores a los anteriores.

La conjunción de todos los capitales preexistentes en un mismo momento para proceder a un reemplazo de características equivalentes se denomina época de valuación, consolidación o fecha focal.

Tanto el deudor como el acreedor, de acuerdo con proceder a la sustitución o reemplazo de los capitales, deberán acordar asimismo:

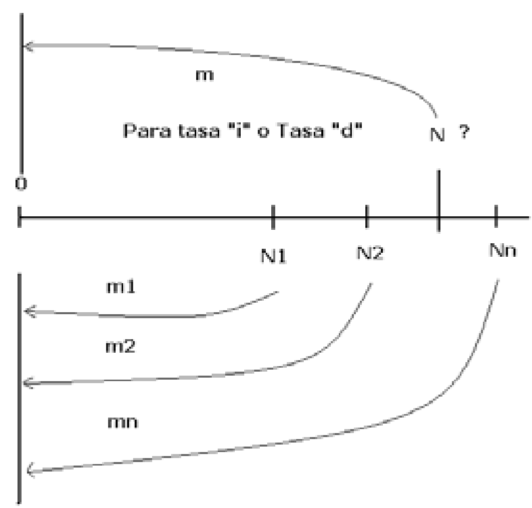
a) el momento de realización de la equivalencia,
b) el valor y la frecuencia en que operará la tasa de descuento o interés elegida.

Los problemas que desde el punto de vista financiero pueden suscitar este tipo de operaciones se centran en tres casos posibles:

a) Calcular un capital en común
b) Calcular un vencimiento común
c) Calcular un vencimiento medio

CÁLCULO DEL CAPITAL EN COMÚN

Calcular un único documento (N) con vencimiento en el instante “m” que sustituya una serie de capitales con vencimiento en el futuro (N1, N2,…Nn), respectivamente para cada uno en “m1”, “m2”, …“mn”, según el siguiente modelo:



Todos los documentos (capitales) convergen en un mismo punto (momento 0).

Para poder calcular el importe del nuevo capital N se dependerá de la tasa acordada, el procedimiento a llevarse a cabo:

a) Con tasa vencida "i"

$$\frac{N1}{1+m1\times i}+\frac{N2}{1+m2\times i}+...+\frac{Nn}{1+mn\times i}=\frac{N}{1+m\times i}$$

De donde N resultará de despejarlo:

$$N=\frac{\frac{N1}{1+m1\times i}+\frac{N2}{1+m2\times i}+...+\frac{Nn}{1+mn\times i}}{1+m\times i}$$

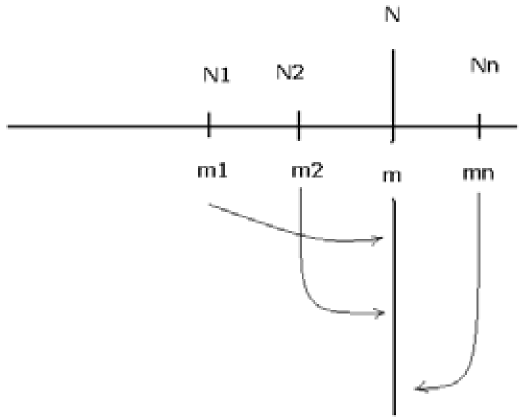
b) Con tasa adelantada "d"

$$N1(1-d\times m1)+N2(1-d\times m2)+...+Nm(1-d\times mn)=N(1-d\times m)$$

Despejando:

$$N=\frac{N1(1-d\times m1)+N2(1-d\times m2)+...+Nm(1-d\times mn)}{(1-d\times m)}$$

Modelo de vencimiento común con vencimientos anteriores y posteriores a la fecha de valuación



La valuación converge en el instante "m"

Empleando la tasa vencida "i"

$$N = N1 \times \left[1 + (m - m1)i\right] + N2\left[1 + (m - m2)i\right] + \ldots + \frac{Nn}{\left[1 + (mn - m)i\right]}$$

Empleando la tasa adelantada "d"

$$N = \left\{ \frac{N1}{\left[1 - (m - m1)d\right]} + \frac{N2}{\left[1 - (m - m2)d\right]} + N\left[1 - (mn - m)d\right] \right\} \times (1 - md)$$

Ejemplo:

Se solicita la refinanciación de una deuda el día 20 de julio, correspondiente a tres documentos de $3.000 cada uno, con vencimientos el 9 de agosto, 19 de agosto y 29 de agosto, respectivamente. Se conviene emplear una tasa adelantada del 4 % mensual y sustituirlos por un único documento nuevo con vencimiento el 18 de septiembre. Calcular el importe de este nuevo valor.

$$N = \left\{ \frac{3000}{1 - \frac{40}{30} \times 0.04} + \frac{3000}{1 - \frac{30}{30} \times 004} + \frac{3000}{1 - \frac{20}{30} \times 0.04} \right\} \times \left(1 - \frac{60}{30} \times 0.04 \right)$$

Rta.: el valor del único documento N que sustituye a los tres indicados será de N = $9.392,30.

CÁLCULO DEL VENCIMIENTO EN COMÚN

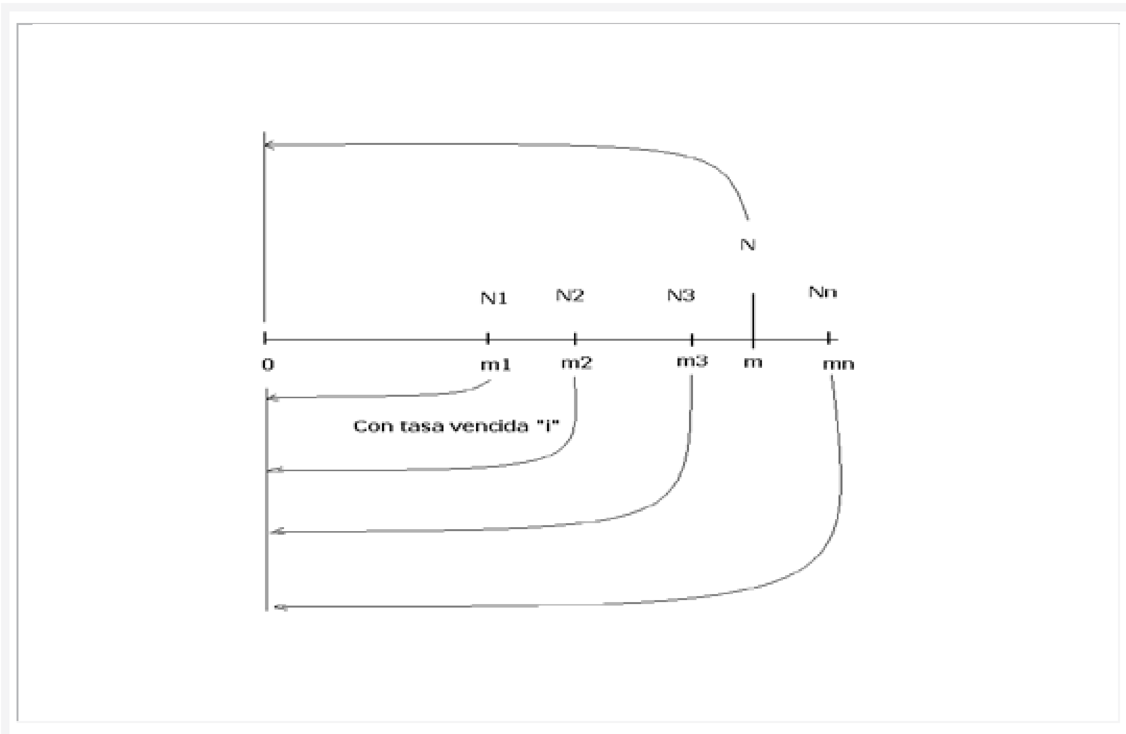
Se fija un momento en común (m) donde vence un cierto documento (N) de valor conocido que sustituirá una serie de documentos N1, N2, N3,…., Nn, con vencimientos respectivos en m1, m2, m3,…,mn.

El valor de N resultará conocido, a partir de allí se buscará la fecha "m" en donde se produzca su vencimiento:

$$N \neq N1, N2, N3, \ldots, Nn$$

Del mismo modo que para el caso del capital en común, resolvemos ahora la incógnita del tiempo o momento del vencimiento de este nuevo documento teniendo en cuenta el tipo de tasa a emplearse en la operación:

a) Con tasa vencida:



$$\frac{N}{1+m\times i}=\frac{N1}{1+m1\times i}+\frac{N2}{1+m2\times i}+\frac{N3}{1+m3\times i}+...+\frac{Nn}{1+mn\times i}$$

Ejemplo:

Se decide canjear tres documentos de \$2.000, \$5.000 y \$7.000 con vencimientos respectivos dentro de cinco, seis y nueve meses por un único documento de \$14.000, y se valúa la operación al 3 % mensual de interés.

SOLUCIÓN:

$$\frac{14000}{1+m\times 0.03}=\frac{2000}{1+5\times 0.03}+\frac{5000}{1+6\times 0.03}+\frac{7000}{1+9\times 0.03}$$

$$\frac{14000}{1+m\times 0.03}=\frac{2000}{1.15}+\frac{5000}{1.18}+\frac{7000}{1.27}$$

$$14000=(1793.13+4237.29+5511.81)\times(1+m\times 0.03)$$

$$\frac{14000}{11488.23}=(1+m\times 0.03)$$

$$1.21864=(1+m\times 0.03)$$

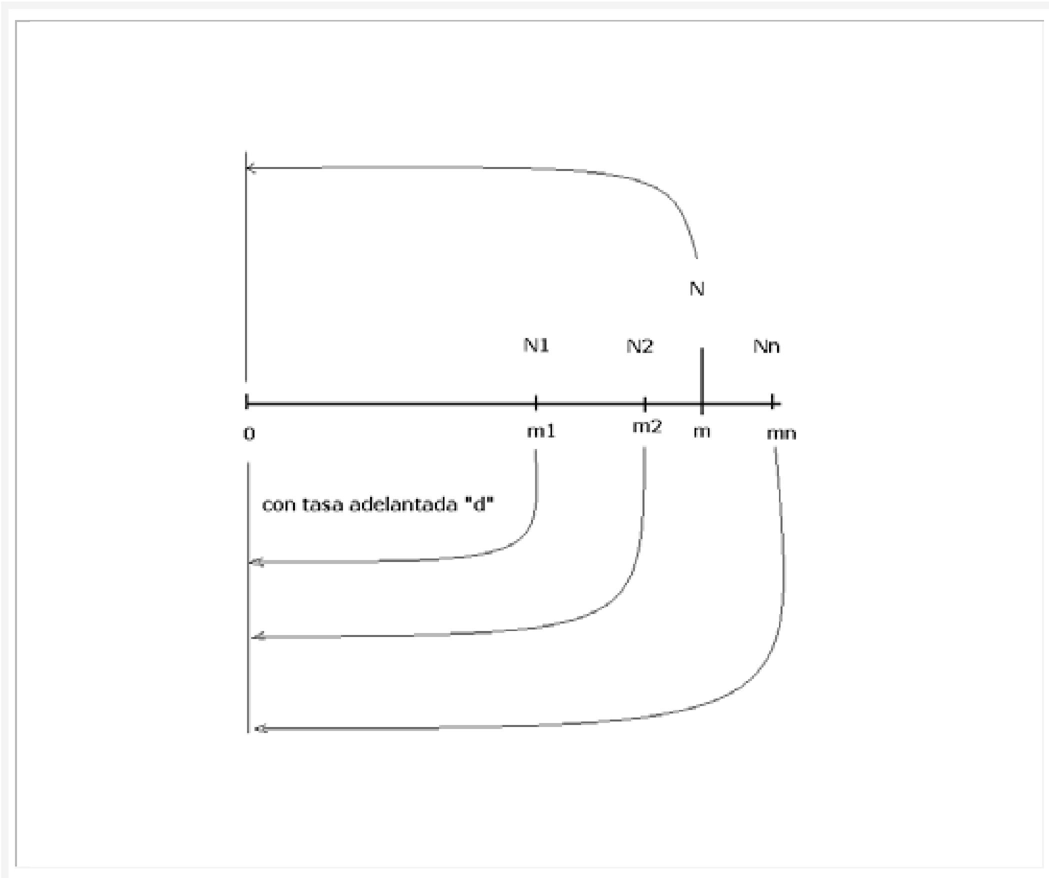
$$m\times 0.03=0.21864$$

$$m=\frac{0.21864}{0.03}$$

$$m=7.288$$

Rta.: el plazo de vencimiento del documento de valor \$14.000 será dentro de siete meses y nueve días.

b) Con tasa adelantada:



$$N(1-m\times d)=N1(1-m1\times d)+N2(1-m2\times d)+...+Nm(1-mn\times d)$$

Aplicando la propiedad distributiva, quitamos los paréntesis:

$$N-N\times m\times d=N1-N1\times m1\times d+N2-N2\times m2\times d+.+Nm-Nm\times mn\times d$$

Reordenando la expresión:

$$-N\times m\times d=N1+N2+...+Nm-d(N1\times m1+N2\times m2+.+Nm\times mn)-N$$

$$(N\times d)\times m=N-N1-N2-..-Nm+d(N1\times m1+N2\times m2+...+Nn\times mn)$$

$$m=(\frac{1}{N\times d})[N-(N1+N2+..+Nm)+d(N1\times m1+N2\times m2+...+Nn\times mn)]$$

$$m=\frac{1}{d}+\frac{\left[\left(N1\times m1+N2\times m2+\ldots+Nm\times mn\right)d-\left(N1+N2+\ldots+Nm\right)\right]}{N\times d}$$

Ejemplo:

Calcular el momento del vencimiento de un documento de \$14.000 que sustituye dos documentos de \$5.000 y \$8.000, cuyos vencimientos operan dentro de tres y cinco meses respectivamente, si toda la operación fue valuada al 4 % mensual adelantado.

SOLUCIÓN:

$$m=\frac{1}{0.04}+\frac{\left[\left(5000\times 3+8000\times 5\right)\times 0.04-(5000+8000)\right]}{14000\times 0.04}$$

m=5.71

Respuesta: el nuevo documento de \$14.000 vencerá dentro de cinco meses y veintiún días.
De otro modo, podemos usar directamente las fórmulas originales:

$$5000\times\left(1-0.04\times 3\right)+8000\times\left(1-0.04\times 5\right)=14000\times\left(1-0.04\times m\right)$$

$$1-\left(\frac{10800}{14000}\right)=0.04\times m$$

de donde

m=5.71, en coincidencia con el resultado anterior.

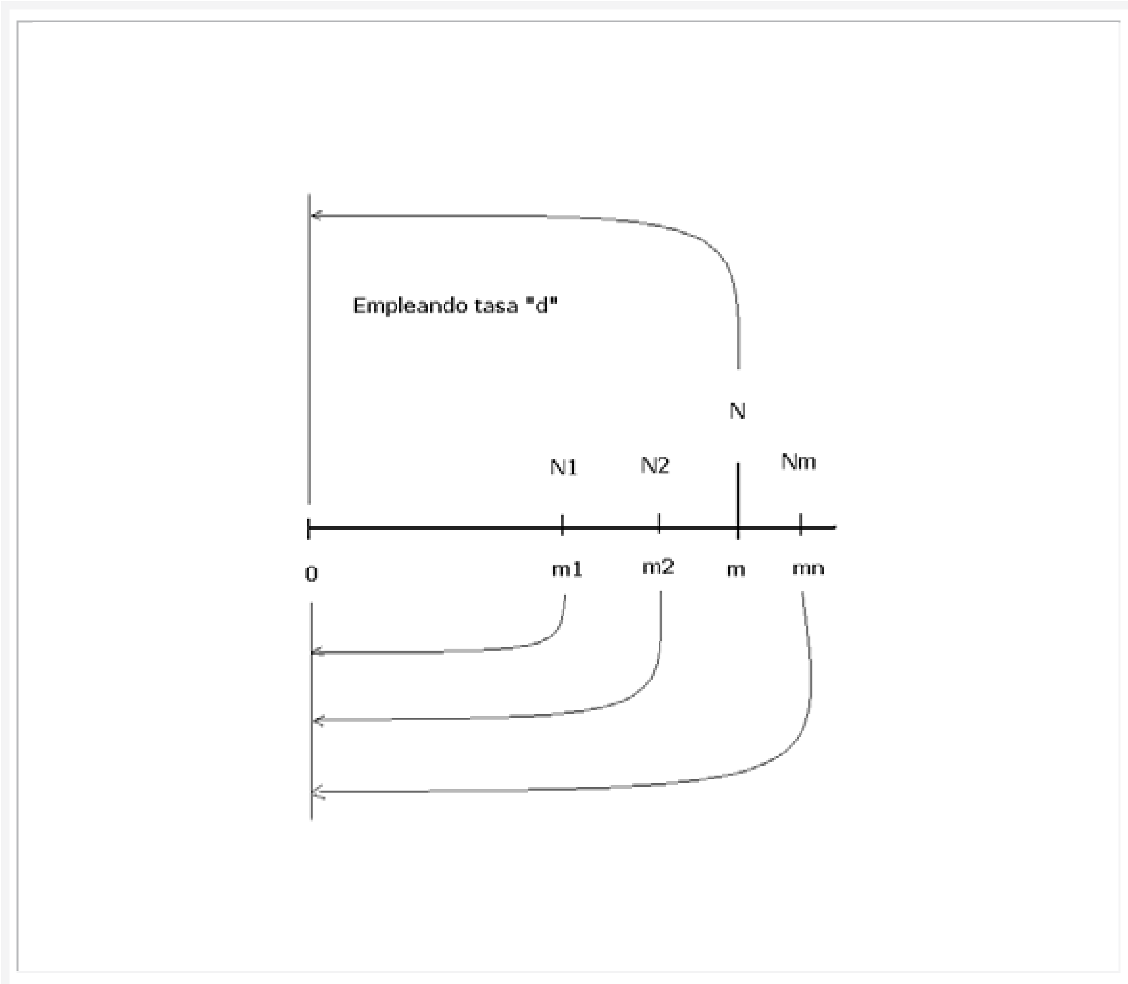
VENCIMIENTO MEDIO DE DOCUMENTOS

A diferencia del vencimiento común, en el vencimiento medio la sumatoria de los valores nominales de los documentos por sustituir deberá coincidir con el importe del nuevo documento:

$$N = N1 + N2 + \ldots + Nn \quad \textbf{\textit{(1)}}$$

Se produce en consecuencia su vencimiento en el momento m, y se sustituye una serie de documentos N1, N2, … Nn, con vencimientos en los momentos m1, m2, …,mn, respectivamente.

Al realizar la sumatoria aritmética de los documentos por sustituir hallaremos el valor del nuevo documento, por lo que, de emplearse la tasa adelantada, la expresión quedaría representada de la siguiente manera:



$$N1\times(1-m1\times d)+N2\times(1-m2\times d)+...+Nm\times(1-mn\times d)=N(1-m\times d)$$

Aplicando propiedad distributiva:

$$N1-N1\times m1\times d+N2-N2\times m2\times d+...+Nn-Nm\times mn\times d=N-N\times m\times d$$

Recordando la expresión inicial indicada como **(1)**

Ahora simplificamos:

$$-N1\times m1\times d-N2\times m2\times d-...-Nm\times mn\times d=-N\times m\times d$$

Simplificando a ambos lados de la igualdad por –d

$$m = \frac{N1 \times m1 + N2 \times m2 + ... + Nm \times mn}{N}$$

De donde se desprende que el vencimiento medio con aplicación de tasa adelantada no es función de la tasa, sino que representa tan solo una media aritmética ponderada por sus plazos de anticipación, esto es que existe independencia del valor que adopte la tasa.

Veamos un ejemplo, donde dos documentos de $5.000 y $3.000 tienen como vencimiento un plazo de dos y cinco meses respectivamente, y se los desea canjear por otro documento de $8.000. Averiguar la fecha de vencimiento en tal caso considerando dos tasas adelantadas distintas: a) 2 % mensual y b) 10 % mensual:

8000xm=5000x2+3000x5

m= 3,125

Si usamos la fórmula original para cada tasa tendremos:

8000x(1-mx0.02)=5000x(1-2x0.02)+3000x(1-5x0.02)

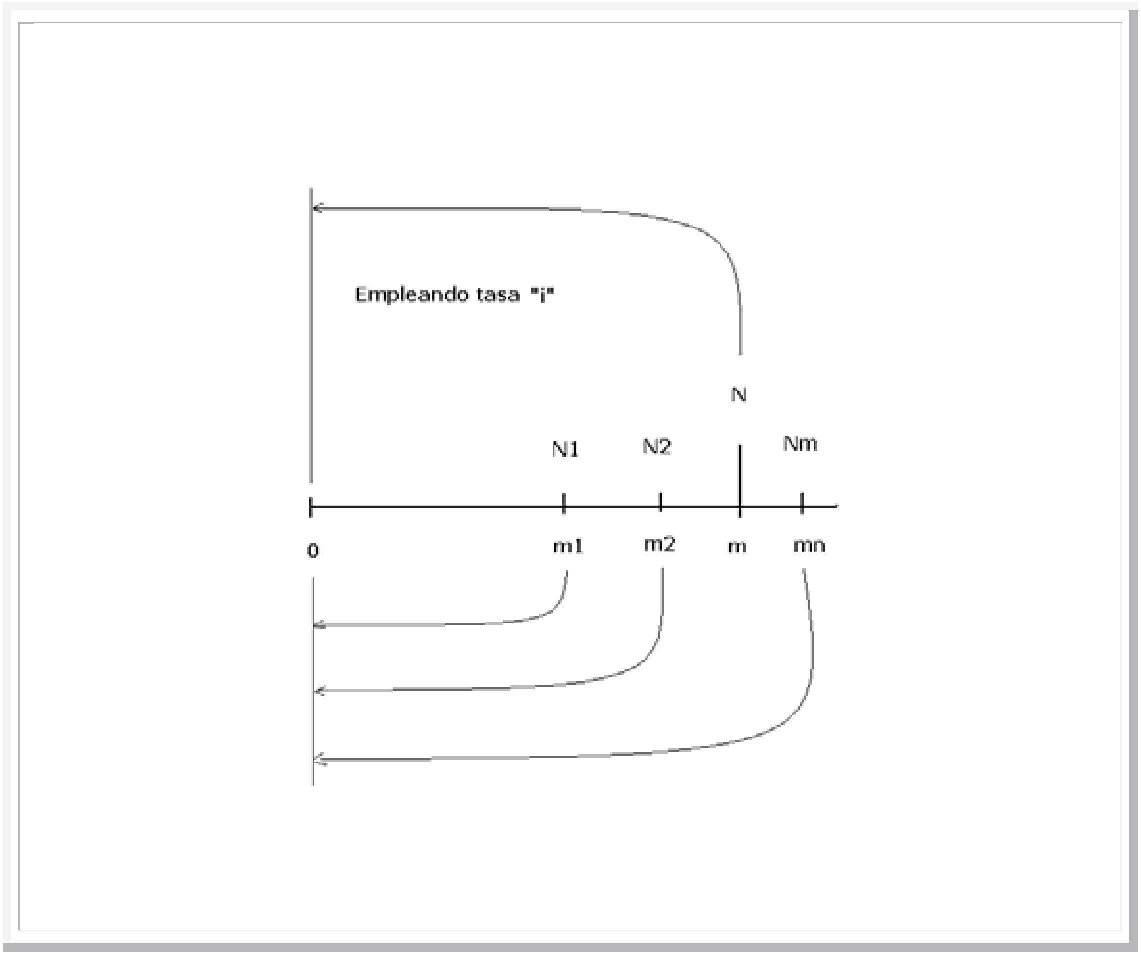
de donde m=3.125

y

8000x(1-mx0.1)=5000x(1-2x0.1)+3000x(1-5x0.1)

de donde m=3.125

No ocurre lo mismo si la operación se vincula a una tasa vencida, puesto que efectivamente resulta importante considerar de qué tasa se trata:



$$\frac{N}{(1+i\times m)}=\frac{N1}{(1+i\times m1)}+\frac{N2}{(1+i\times m2)}+...+\frac{Nm}{(1+i\times mn)}$$

de donde:

$$\frac{N}{(1+i\times m)}=V1+V2+...+Vn$$

$$1+i\times m=\frac{N}{V1+V2+...+Vn}$$

$$m=\frac{\dfrac{N}{V1+V2+\ldots+Vn}-1}{i}$$

RESULTADO FINANCIERO DE LAS OPERACIONES DE DESCUENTO

A efectos de disponer de elementos de juicio objetivo en la decisión de llevar adelante una operación financiera, se presenta el concepto de resultado financiero como aquel que permite comparar el resultado obtenido al cargar intereses al valor actual en el comienzo de una operación, comparado contra aquel que surge de practicar el descuento sobre el valor nominal del documento.

Para establecer el resultado financiero de esta comparación en una operación financiera de descuento anticipado, se podrá calcular de la siguiente manera:

R.F. (positivo o negativo)= $N[1-d\times(n-m)]-V(1+i\times m)$

Donde m = la diferencia entre el plazo original al que se pactó la obligación documentada y el plazo de anticipación provocado por la operación de descuento.

Ejemplo 1:

Se vende una partida de mercaderías valuada de contado en \$12.000, y se documenta contra un pagaré a 90 días de plazo cargándole un interés del 5 % mensual. Una vez recibido y transcurridos 35 días, se descuenta en un banco al 4 % mensual adelantado. Calcular el resultado financiero de la operación.

SOLUCIÓN:

Siendo:

$$V = 12.000$$
$$i_m = 0.05$$
$$n = \frac{90}{30}$$

$$N = 12000 \times (1 + 0.05 \times 3)$$
$$N = 13.800$$

$$R.Financiero = 13800 \times \left[1 - 0.04 \times \left(\frac{90-35}{30}\right)\right] - 12000 \times \left(1 + 0.05 \times \frac{35}{30}\right)$$

$$R.Financiero = 12788 - 12700$$

$$R.Financiero = \$88.-$$

Rta.: el resultado financiero de esta operación fue positivo (\$88)

Ejemplo 2:

Para el caso del ejercicio anterior, definir qué tasa adelantada aplicada por el Banco hubiera alcanzado el equilibrio financiero.

SOLUCIÓN:

La premisa fundamental iguala a cero el resultado financiero:

$$R.Financiero = 0$$

$$0 = 13800 \times \left[1 - d \times \left(\frac{90-35}{30}\right)\right] - 12000 \times \left(1 + 0.05 \times \frac{35}{30}\right)$$

$$0 = 13800 \times \left[1 - d \times 1.8\widehat{3}\right] - 12700$$

$$0 = 13800 - 25300 \times d - 12700$$

$$25300 \times d = 13800 - 12700$$

$$25300 \times d = 1100$$

$$d_{mensual} = \frac{1100}{25300}$$

$$d_{mensual} = 0.043478$$

Rta.: la tasa adelantada que mantiene el equilibrio financiero resultaría del 4,35 %.

EJERCICIOS RESUELTOS DE DESCUENTO SIMPLE

- Una empresa tiene un documento V/N $9.500 que fue firmado originalmente por una venta de mercaderías a nueve meses de plazo. A los cuatro meses de realizada la venta decide descontar el documento en una financiera que percibe un 4 % mensual adelantado. Determinar qué importe recibe la empresa en ese acto.

SOLUCIÓN:

$$9.500x(1-0.04x5)=7.600$$

Rta.: la empresa recibe en el acto del descuento un neto de $7.600.

- Hoy vence un documento de $100.000 que es renovado parcialmente entregando el deudor $20.000 en efectivo, y financiando el saldo con dos documentos de igual valor nominal a 60 y 120 días de plazo, respectivamente. Determinar el valor nominal de dichos documentos sabiendo que toda la operación se realiza al 5 % mensual simple adelantado.

SOLUCIÓN:

El neto financiado mediante dos documentos es de $80.000 (100.000-20.000), por lo que:

$$80000=N[(1-0.05x2)+(1-0.05x4)]$$

$$N_1=N_2=\$47.058.82.-$$

Rta.: Cada uno de los documentos que sustituyen la deuda anterior serán de $47.058,82.

- Para financiar un crédito de $5.000 se firman dos documentos a 60 y 90 días respectivamente, de igual valor nominal, sabiendo que ambos documentos se van a descontar al 4 % mensual simple adelantado. Determinar la tasa de interés mensual simple vencida que debería cargarse a dicha obligación para resultar equivalente.

SOLUCIÓN:

$$5000 = Nx\left[\left(1-0.04X2\right)+\left(1-0.04X3\right)\right]$$

$$N = \$2.777.77$$

Siendo que cada documento valuado originalmente a una tasa adelantada mensual del 4 % simple resultó de $2.777,77, veamos ahora qué tasa simple vencida se ajusta exactamente a esta operación:

$$5000 = 2777.77x\left(\frac{1}{1+2xi}+\frac{1}{1+3xi}\right)$$

operando algebraicamente:

$$1.8 = \frac{2+5xi}{1+5xi+6xi^2}$$

$$1.8+9xi+10{,}8xi^2 = 2+5xi$$

$$0 = 10.8xi^2 + 4xi - 0.2$$

$$\frac{-4 \pm \sqrt{16 + 8.64}}{21.6} = i$$

de donde la solución válida que determina la tasa buscada es:

$$i_{mensual} = 0.0446$$

- Se presenta al Banco Provincia una lista de cinco documentos de acuerdo al siguiente detalle:

DOC.	IMPORTE	VTO.
1	2000,00	20-may
2	3200,00	31-may
3	1800,00	16-jun
4	4000,00	24-jul
5	2600,00	03-ago

Cuál es el importe que se acreditó en nuestra cuenta a la fecha del 3 de abril al ser la tasa de descuento del 5,4 % mensual, y al tener en cuenta una comisión fija de $35, una comisión variable del 1 %, un aforo del 10 % sobre el valor nominal y el impuesto a los débitos y créditos en cuentas bancarias vigente (12 ‰ total).

SOLUCIÓN:

Para simplificar los cálculos, podemos aplicar los métodos de numerales adaptados a la tasa adelantada:

DOC.	IMPORTE	VTO.	Días	Numeral
1	2000,00	20-may	47	94.000
2	3200,00	31-may	58	185.600
3	1800,00	16-jun	74	133.200
4	4000,00	24-Jul	112	448.000
5	2600,00	03-ago	122	317.200
Total	**13.600**		Total	**1.178.000**

Aplicando el método de reducción a la tasa diaria:

$$tasa diaria = \frac{0.054}{30} = 0.0018$$

Siendo el descuento

D = Numeral x tasa diaria

$$D = 1.178.000 \times 0.0018$$

$$D = \$2.120.40$$

Resta definir el importe neto que habrá de acreditarse:

Valor de los documentos	13.600.00
Comisión fija	(35.00)
Comisión variable	(136.00)
Aforo	(1360.00)
Descuento	(2120.40)
Subtotal	*9.948.60*
Impuesto a los movimientos bancarios (12 ‰)	(119.38)
Neto acreditado	**$9.829.22**

- Se dispone de tres documentos cuyos valores nominales son $5.000, $10.000 y $20.000, con vencimiento a los tres, cinco y diez meses respectivamente, la tasa de la operación es del 5 % mensual adelantado. Se canjearán a) por un único documento de $30.000, b) un único documento cuyo vencimiento operará dentro de siete meses. Determinar el vencimiento en la primera opción y el plazo en la segunda.

SOLUCIÓN:

Podemos aplicar la fórmula hallada para resolver los casos de vencimiento común con tasa adelantada:

$$m = \frac{1}{d} + \frac{\left[\left(N1 \times m1 + N2 \times m2 + ... + Nm \times mn\right)d - \left(N1 + N2 + ... + Nm\right)\right]}{N \times d}$$

Para encontrar el momento "m" de vencimiento de un documento cuyo valor es conocido:

$$m = \frac{1}{0.02} + \frac{\left[\left(1000x4 + 2000x8\right)0.02 - \left(1000 + 2000\right)\right]}{4000x0.02}$$

$$m = 50 - \frac{2600}{80}$$

$$m = 17{,}5$$

Del mismo modo, podemos igualar las fórmulas del valor actual para cada documento de la operación:

$$1000x(1-0.02x4)+2000x(1-0.02x8)=4000x(1-0.02xn)$$
$$920+1680=4000-80xn$$

$$80xn=1400$$

$$n=17,5$$

Nuevamente, el resultado determina que el vencimiento del documento que sustituirá la operación original vencerá dentro de 17 meses y medio.

- Un deudor propone cancelar su deuda de $15.000 distribuyéndola en partes iguales mediante la entrega de dos documentos a 60 y 100 días de plazo. Calcular el valor de cada documento si la operación se realizó al 3 % mensual simple vencido.

SOLUCIÓN:

Si la deuda se distribuye en partes iguales significa que sus valores actuales son iguales, por lo tanto, esta condición da lugar a valores nominales que serán distintos:

$$N1=\frac{7500}{1+0.03\times\left(\frac{60}{30}\right)}$$

$$N2=\frac{7500}{1+0.03\times\left(\frac{100}{30}\right)}$$

$\therefore N1 = \$7075.47$

$N2 = \$6818.18$

Rta.: los valores nominales serán de \$7.075,47 y \$6.818,18 respectivamente.

- Una cierta deuda se documenta mediante dos pagarés a 45 y 90 días de plazo respectivamente, y el primero es inferior al segundo en un 20 %. Conociendo que la operación representó un costo financiero total de \$2.000 para el firmante, calcular:

  a) el importe de la deuda original y
  b) el valor de cada documento.

  Considerar que la tasa empleada en dicha operación resultó del 4 % trimestral simple y vencida.

SOLUCIÓN:

Siendo:

$$N2 = \frac{N1}{0.8}$$

$$2000 = N1 + N2 - V$$

$$V = N1 + N2 - 2000$$

$$V = \frac{N1}{1 + 0.04 \times \frac{45}{90}} + \frac{N1}{0.8 \times \left(1 + 0.04 \times \frac{90}{90}\right)}$$

$$V = N1 \times (0.9804 + 1.202)$$

$$V = 2.1823 \times N1$$

$$N1 + 1.25 \times N1 = 2.1823 \times N1 + 2000$$

$$(2.25 - 2.1823) \times N1 = 2000$$

$$N1 = \frac{2000}{0.0677}$$

$$N1 = \$2954210 \qquad\qquad N2 = \$36927.62$$

$$\therefore V = 2954210 + 36927.62 - 2000$$

$$V = 66469.72 - 2000$$

$$V = \$64.469.72. -$$

Rtas.: el primer documento fue firmado por $29.542.10, el segundo por $36.927.62 y la deuda original resultó de $64.469.72.

- La compañía financiera Amanecer recibe listas de cheques de pago diferido de sus clientes y aplica la siguiente política comercial:
  - Percibe una comisión fija por lista de $40
  - Practica aforos del 10 %
  - Cobra una comisión variable del 1 %
  - Utiliza una tasa de descuento del 4 % mensual simple
  - Retiene 1,2 % por el impuesto a los débitos y créditos bancarios

La empresa ELDORADO SRL, cliente de dicha financiera, presentó la siguiente lista de documentos el 4 de octubre del corriente:

Vencimiento	Importe VN($)
12-11	11.000
21-11	14.000
13-12	21.400
26-12	18.600
03-01	13.700

Se solicita que determine el neto a acreditarse en la cuenta de ELDORADO SRL aplicando el método de numerales.

SOLUCIÓN:

Realizamos la plantilla matriz para desarrollar los numerales de la operación:

Documento (N)	Días de anticipación	Numeral
11000	39	429000
14000	48	672000
21400	70	1498000
18600	83	1543800
13700	91	1246700
78700	**<<totales>>**	**5389500**

Aplicando el *método de reducción a la tasa diaria* para una tasa adelantada mensual:

$$d_{diaria} = \frac{0.04}{30}$$

$$Descuento = Numeral \times d_{diaria}$$

$$Descuento = 5389500 \times 0.001\widehat{3}$$

$$Descuento = \$7.186.-$$

Para calcular el neto a acreditar en cuenta debemos realizar la siguiente operación y considerar la particularidad de cada ítem, puesto que algunos se calculan a partir del valor actual (matemático) o del valor nominal total:

$$\sum Documentos \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 78.700.00$$

$$\begin{array}{ll}
Comisión.fija \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (40) & \\
Aforo \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7870) & \\
Comisión.Variable \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (787) & \\
Descuento \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7186) & \\
Subtotal \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 62.817.00 & \\
\mathrm{Im}puesta \ldots\ldots [62817 \times (1-0.012)] \ldots\ldots (753.80) & \\
Neto.a.acreditar \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \$62.063.20.- &
\end{array}$$

- El laboratorio Farmalópolis SA ha recibido hace cuatro meses dos documentos de $50.000 cada uno, firmados a tres y cinco meses respectivamente. Hoy necesita descontarlos en el Banco donde opera, el que cobra una tasa adelantada del 4,5 % mensual simple. Determinar el importe que se le habrá de acreditar en la cuenta, conociendo adicionalmente que:

a) El Banco percibe una comisión fija de $60 por este tipo de operaciones.

b) Se practica el impuesto a los débitos y créditos bancarios del 12 ‰ (doce por mil) sobre el total.

SOLUCIÓN:

$$\left\{50000\times\left[\left(1-0.045\times\frac{90}{30}\right)+\left(1-0.045\times\frac{150}{30}\right)\right]-60\right\}\times(1-0.012)=V$$

Despejando:

$$V=\$80.956.72.-$$

Rta.: el importe que se acreditará en la cuenta será de $80.956.72.

Capítulo 7

El régimen compuesto de capitalización

CAPITALIZACIÓN COMPUESTA

Habiendo visto ya la operatoria financiera en el régimen simple, donde los intereses se generan de periodo en periodo siempre a partir del mismo capital original (Co), y recordando que el concepto de capitalización de intereses consiste en incorporar los intereses devengados en un cierto periodo de tiempo al capital preexistente (como hecho aislado o esporádico), el proceso conocido como capitalización compuesta se sustenta en sucesivas capitalizaciones a intervalos regulares de tiempo, coincidentes con la unidad de tiempo de la tasa pactada.

Esto significa que el inversor podrá verificar un incremento de su patrimonio de modo más que proporcional en cada ciclo, dado que, a medida que se incorporen intereses a su capital, los próximos intereses serán calculados por ese nuevo monto, no ya por el capital original, esto es que resultan productivos.

Calcular una operación por el régimen de capitalización compuesta en lugar de hacerlo por el régimen de capitalización simple permite transformar los rendimientos finales puesto que, tanto el monto (Cn) alcanzado como el interés (I) final variará en distinta proporción. Esto ocurre porque en el monto compuesto los intereses se calculan sobre capitales distintos.

La fórmula utilizada para evitar la repetición innecesaria de cálculos reiterativos se obtiene del cuadro de la página siguiente al referirnos a un periodo de tiempo genérico definido como “n”, y es la siguiente:

Fórmula general del monto a interés compuesto:

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

Cuadro de evolución de un capital Co desde el periodo "0" hasta el periodo "n"

n	Capital	Interés: Cxi	Monto: C+i
0	C_0	0	C_0
1	C_0	$C_o \times i$	$C_1 = C_0 + C_0 \times i = C_0(1+i)$
2	C_1	$C_1 \times i$	$C_2 = C_1 + C_1 \times i = C_1(1+i) = C_0(1+i)^2$
3	C_2	$C_2 \times i$	$C_3 = C_2 + C_2 \times i = C_0(1+i)^2 \times (1+i) = C_0(1+i)^3$
…			
n-1	C_{n-2}	$C_{n-2} \times i$	$C_{n-1} = C_{n-2} + C_{n-2} \times i = C_0(1+i)^{n-2} \times (1+i) = C_0(1+i)^{n-1}$
n	C_{n-1}	$C_{n-1} \times i$	$C_n = C_{n-1} + C_{n-1} \times i = C_{n-1}(1+i) = C_0(1+i)^{n-1} \times (1+i) = C_0(1+i)^n$

Para reconocer el interés percibido por el inversor al concluir la operación financiera realizada en el régimen de capitalización compuesta, recordaremos la expresión que vincula al monto con el capital:

$$I = C_n - C_0$$

Por lo que, reemplazando la fórmula del monto compuesto en Cn, obtendremos:

$$I = C_0(1+i)^n - C_0$$

$$I = C_0[(1+i)^n - 1]$$

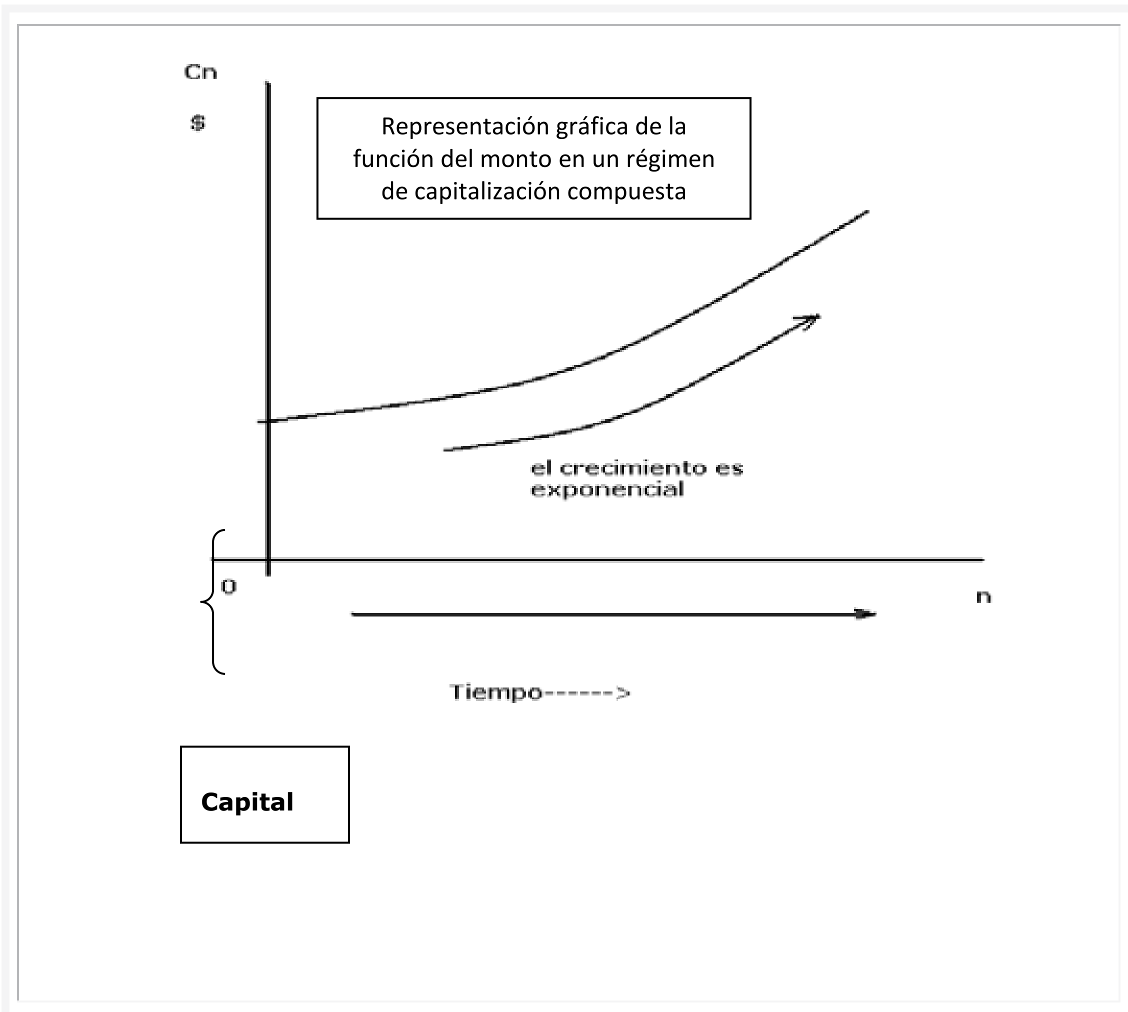
Podemos invertir la expresión del monto compuesto despejando el capital, donde:

$$C_0 = C_n(1+i)^n$$

Para obtener el interés compuesto a partir de Cn:

$$I = C_n - C_n(1+i)^n$$

$$I = C_n[1-(1+i)^{-n}]$$



La función del monto evoluciona en forma exponencial, los intereses que se van capitalizando al término de cada periodo contribuyen a incrementar de manera más que proporcional el capital a lo largo del tiempo, a diferencia de lo ocurrido en el régimen simple de capitalización donde la evolución se mantiene constante, ya que se parte siempre del valor adoptado por Co.

Lo propio ocurre si se observa la función del interés compuesto. Se origina al igual que el simple a partir de 0 (cero), pues en el instante inicial de la operación el capital original aún no ha devengado interés alguno pero rápidamente, luego de haberse alcanzado el primer periodo, es decir, un ciclo completo correspondiente a la unidad de tiempo en que fuera pactada la tasa de la operación, la aceleración del proceso de capitalización permite distanciar los resultados del interés simple, en sentido figurado "mientras uno camina por las escaleras, el otro viaja en ascensor".

COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS ENTRE EL INTERÉS SIMPLE Y EL INTERÉS COMPUESTO

Cabe aclarar que, al contrario de lo que se supone "a primera vista", *no necesariamente siempre* será mayor el resultado final usando una tasa efectiva (régimen compuesto) que otra simple del mismo valor y frecuencia temporal, pues antes deberemos verificar la relación entre la unidad de tiempo propia de la tasa pactada con el plazo de exposición en cada operación.
Podemos aseverar que, en relación a "t" (plazo de exposición del capital en la operación), cuando:

a) El plazo de exposición se encuentra comprendido entre el instante de origen y el límite definido por la unidad de tiempo de la tasa pactada:

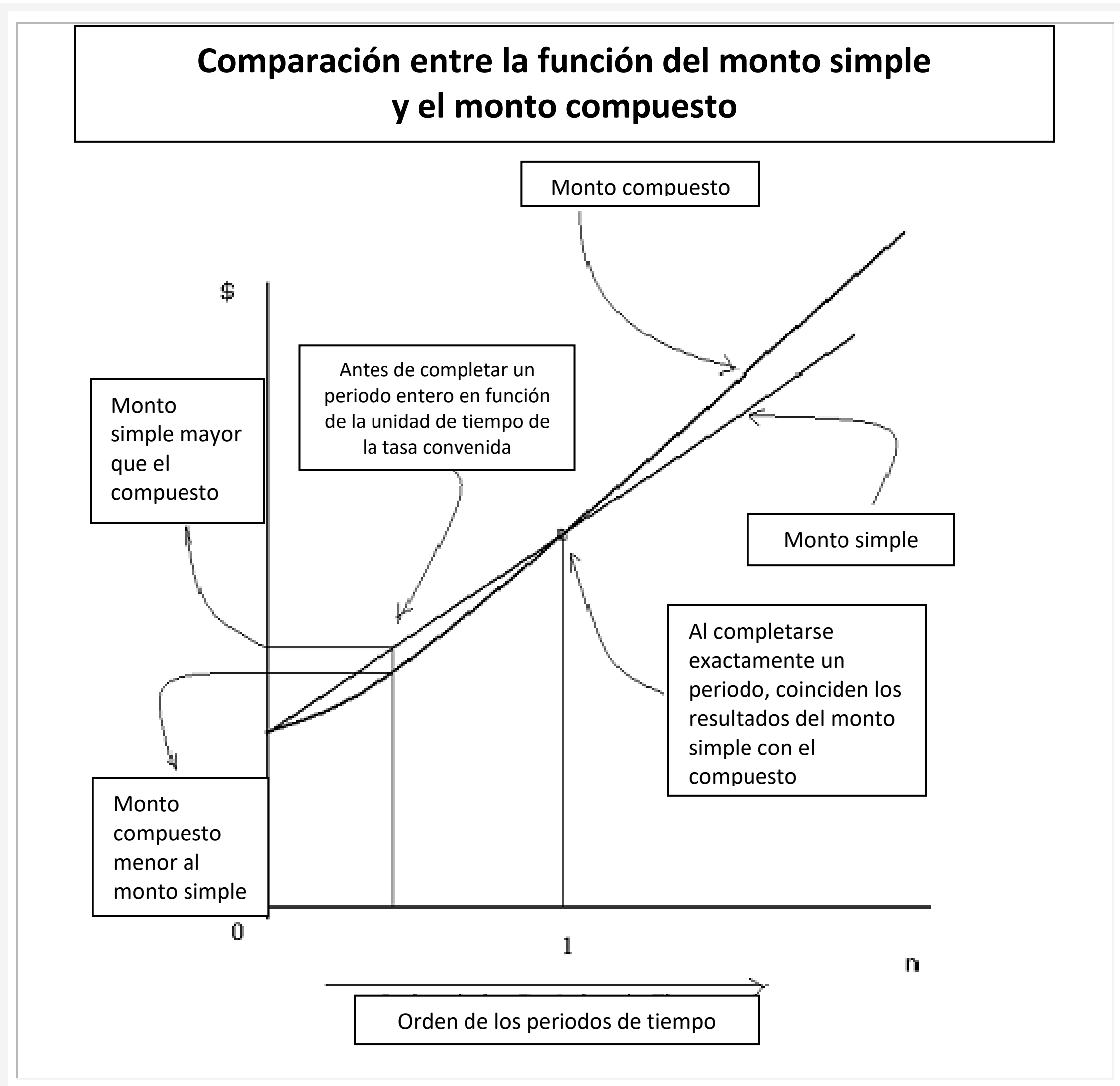
0< t <1 <u>el monto simple es mayor que el compuesto</u>

b) El plazo de exposición es "0" o coincide con el instante en que se cumple la unidad de tiempo de la tasa: "1":
0= t =1 <u>el monto simple es igual al compuesto</u>

c) El plazo de exposición supera el límite definido por la unidad de tiempo de la tasa:

t >1 <u>el monto compuesto es superior al simple</u>

El siguiente gráfico nos muestra qué ocurre en cada momento:



Ejemplo:

Calcular el monto del que podrá disponer un inversor que deposita $10.000 durante cinco meses, si en la operación pacta una tasa del 40 % anual (año comercial) bajo los siguientes supuestos:

a) Régimen simple (tasa simple)
b) Régimen compuesto (tasa efectiva)

SOLUCIÓN:

a) $$10000 \times \left(1 + 0.40 \times \frac{5}{12}\right) = 11.666.67$$

b) $$10000 \times (1 + 0.40)^{\frac{5}{12}} = 11.505.00$$

Rtas.: en régimen simple la operación devuelve un monto de $11.666,67 mayor al monto compuesto de $11.505,00.

EJERCICIOS RESUELTOS EN RÉGIMEN COMPUESTO

- Se colocan $10.000 durante 11 meses y se obtiene un monto de $89.116,50 al utilizar una cierta tasa mensual capitalizable mensualmente. Calcular los intereses ganados en los últimos cinco meses.

SOLUCIÓN:

Independientemente de la tasa indicada en el enunciado, para responder a lo pedido podemos usar cualquier tasa efectiva por lo que podríamos elegir una tasa para cinco meses sin alterar el resultado final:

$$89116.50 = 10000 \times \left(1 + i_5\right)^{\frac{11}{5}}$$

$$i_5 = \left(\sqrt[11]{8.91165}\right)^5 - 1$$

$$i_5 = 1.70271$$

Luego de conocer una tasa para esta operación, podríamos ubicarnos en el sexto mes para saber el valor del capital a ese momento:

$$10000 \times (1 + 1.70271)^{\frac{6}{5}} = C_6$$

$$C_6 = \$32.973.04$$

Para conocer el interés del último periodo de cinco meses de la operación podríamos utilizar la tasa hallada, dado que devengará el interés indicado efectivamente al cumplirse un ciclo completo de su propia unidad de tiempo (cinco meses):

$$I_{11-6} = C_6 \times i_5$$

$$I_{11-6} = 32973.04 \times 1.70271$$

$$I_{11-6} = \$56.143.52.-$$

También bastaría con definir la diferencia entre el monto final y el capital disponible al terminar el sexto periodo:

$$I_{11-6} = C_{11} - C_6$$

$$I_{11-6} = 89.116.50 - 32.973.04$$

$$I_{11-6} = \$56.143.52$$

- Un capital ha producido en diez meses al 8 % mensual efectivo de interés, un monto que supera en \$2.000 al que hubiera logrado en igual lapso y condiciones de tasa a interés simple. Determinar de qué capital se trata y cuál hubiera sido la tasa que a interés simple igualara el monto logrado a interés compuesto.

SOLUCIÓN:

El planteo requiere igualar ambos montos:

$$C_n = M + 2.000$$

$$C_0 (1 + 0.08)^{10} = C_0 (1 + 0.08 \times 10) + 2.000$$

$$2.158925C_0 = 1.8C_0 + 2000$$

$$0.358925C_0 = 2.000$$

$$C_0 = \frac{2000}{0.358925}$$

$$C_0 = \$5.572.19.-$$

Para obtener la tasa mensual simple de la operación que le permita al inversor reunirse con $12.029,95:

$$12.029.95 = 5.572.19 \times (1 + i_m \times 10)$$

$$i_m = \frac{2.1589 - 1}{10}$$

$$i_m = 0.11589$$

La tasa mensual simple sería del 11,589 %

- Un capital colocado a interés compuesto rinde al cabo de diez meses un monto de $11.894, en cambio, si es colocado por 36 meses el monto asciende a $18.674. Encontrar el capital colocado y la tasa bimestral utilizada.

SOLUCIÓN:

Se debe cumplir que:

$$C_0 = C_n(1+i)^{-n}$$

$$11894(1+i_b)^{-5} = 18674(1+i_b)^{-18}$$

$$\frac{18674}{11894} = \frac{(1+i_b)^{18}}{(1+i_b)^{5}}$$

$$1.57 = (1+i_b)^{18-5}$$

$$\sqrt[13]{1.57} - 1 = i_b$$

$$i_b = 0.035307$$

Rta.: la tasa bimestral efectiva utilizada en dicha operación fue del 3,5307 %

Para calcular el capital original partimos de cualquiera de los montos:

$$11894(1+0.035307)^{-5} \cong \$10.000$$

$$18674(1+0.035307)^{-18} \cong \$10.000$$

- Se depositaron $1.000 en una cuenta al 5 % efectivo mensual durante un año, sin embargo al cumplirse cuatro meses de la colocación inicial se efectúa un retiro de \$200 y a los siete meses del depósito inicial se realiza una adicional de depósito de \$250. Determinar el monto final de la operación.

SOLUCIÓN:

$$C_n = 1000(1+0.05)^{12} - 200(1+0.05)^{8} + 250(1+0.05)^{5}$$

$$C_n = 1795.86 - 295.49 + 319.07$$

$$C_n = \$1.819.44.-$$

Otra manera de llegar al mismo resultado:

$$C_n = \left\{\left[1000 \times (1+0.05)^4 - 200\right] \times (1+0.05)^3 + 250\right\} \times (1+0.05)^5$$

$$C_n = (1015.51 \times 1.1576 + 250) \times 1.27628$$

$$C_n = \$1.819.44.-$$

- Un inversor realiza un depósito de \$12.000 en una cuenta que capitaliza intereses mensualmente, durante 180 días. La tasa pactada en dicha operación resultó inicialmente del 21 % trimestral, incrementándose un 26,25 % luego de 70 días de comenzada la operación. Calcular el total de intereses una vez finalizada la colocación.

SOLUCIÓN:

Observamos que las tasas indicadas resultan ser en ambos casos tasas nominales, por lo que debemos ajustarlas transformándolas a tasas efectivas para poder realizar nuestros cálculos:

$$I = 12.000 \times \left(1 + \frac{0.21 \times 30}{90}\right)^{\frac{70}{30}} \times \left(1 + \frac{0.2625 \times 30}{90}\right)^{\frac{110}{30}} - 12000$$

Rta.: el interés neto de la operación es: $I = \$7.112.49.-$

- Durante una operación financiera cuya duración se extendió por diez meses el interés devengado en el último bimestre resultó ser 1/3 del capital originalmente depositado. La tasa vigente durante el primer semestre fue del 8 % bimestral adelantada. Calcular la tasa bimestral adelantada posterior, sabiendo que se desarrolla en un régimen compuesto.

SOLUCIÓN:

Definimos el planteo de acuerdo al enunciado propuesto:

$$\frac{C_0}{3} = C_0 \times (1 - 0.08)^{-3} \times (1 - d)^{-1} \times \left[(1 - d)^{-1} - 1\right]$$

$$0.25956 \times \frac{\cancel{C_0}}{\cancel{C_0}} = (1 - d)^{-1} \times (1 - d)^{-1} - (1 - d)^{-1}$$

$$0.25956 = (1 - d)^{-2} - (1 - d)^{-1}$$

siendo:

$$(1-d)^{-1} \equiv \frac{1}{X}$$

$$0.25956 = \frac{1}{X^2} - \frac{1}{X}$$

$$0.25956 = \frac{X - X^2}{X^3}$$

$$0.25956\frac{X^3}{X} + \frac{X^2}{X} - \frac{X}{X} = \frac{0}{X}$$

$$0.25956X^2 + X - 1 = 0$$

Operando convenientemente a partir de una expresión cuadrática, obtenemos el valor de "X" válido:

X=0.8238

Reemplazando en (1-d) obtenemos la respuesta:

$$d_{bimestral} = 0.1761646$$

- Se depositaron durante 180 días $8.600 que generaron un monto de $10765,60. En su transcurso se emplearon tres tasas efectivas y mensuales, del 3, 4 y 5 % respectivamente, la primera de ellas permaneció vigente el doble de tiempo que la última. Calcular los sucesivos plazos de capitalización.

SOLUCIÓN:

La variable a identificar es el plazo t, recordamos que $n=\frac{t}{ut}$, por lo tanto, si asignamos al último plazo el valor t, el primer plazo será $2t$ y el segundo, $180-3t$, en consecuencia la ecuación quedaría armada de la siguiente forma:

$$10765{,}60 = 8600\times 1{,}03^{\frac{2t}{30}}\times 1{,}04^{\frac{180-3t}{30}}\times 1{,}05^{\frac{t}{30}}$$

Aplicando logaritmos:

$$\ln\left(\frac{10765{,}60}{8600}\right)=\frac{2t}{30}\times\ln 1{,}03+\frac{180-3t}{30}\times\ln 1{,}04+\frac{t}{30}\times\ln 1{,}05$$

Operando:

$$30\times 1{,}251814 = 2t\times 0{,}0295588+(180-3t)\times 0{,}0392207+t\times 0{,}0488$$

$$6{,}738 = 0{,}0591176t+7{,}05973-0{,}117663t+0{,}0488t$$
$$0{,}0097454t = 0{,}32173$$
$$t\cong 33.dias$$

$$\therefore \begin{array}{l} 1er.plazo\_3\% \Rightarrow 2t = 66.dias \\ 2doplazo\_4\% \Rightarrow 180-3t = 81.dias \\ 3er.plazo\_5\% \Rightarrow t = 33.dias \end{array}\therefore$$

Capítulo 8

La capitalización continua

LA CAPITALIZACIÓN CONTINUA

El concepto de tasa está asociado con la rapidez o velocidad de cambio de un fenómeno como el capital, pero también existen otros fenómenos que se modifican con el tiempo como hemos definido oportunamente al referirnos a las variables temporales, tal es el caso de los nacimientos, crecimientos, muerte, etc., todos en función o en relación con alguna unidad de tiempo.

Diversas disciplinas utilizan el concepto de tasa instantánea, puesto que resulta más preciso que observar la evolución de estas variables en forma discreta, es decir, en un lapso de tiempo. Así la medicina y en general todas las ciencias biológicas, los informes actuariales y de seguros, entre otras, las emplean constantemente.

En teoría, puede calcularse una tasa instantánea cuando la diferencia de tiempo en la que se observa el cambio es solo un punto, no un rango.

Se produce entonces una capitalización continua cuando la frecuencia en que se practican las capitalizaciones resulta a intervalos muy próximos entre sí, tanto que los intereses se capitalizan en forma instantánea.

Partiendo del factor unitario de capitalización

$$(1+i) = e^{\sigma}$$

Por lo que, para un monto Cn:

$$C_n = C \times e^{n \times \sigma}$$

Despejando el capital original:

$$C = C_n \times e^{-n \times \sigma}$$

Lo propio al calcular el interés:

$$I = C \times e^{n \times \sigma} - C$$

$$I = C(e^{n \times \sigma} - 1)$$

Al representar gráficamente la función vemos que se trata de una evolución exponencial, que en el inicio de la operación el mínimo valor que adopta es "1" puesto que para n=0 encontrado en el exponente del número "e", cualquier valor elevado a la potencia cero es uno:

$$e^{0 \times \sigma} = 1$$

Ejemplo:

Dada la tasa efectiva anual del 60 % calcular la tasa instantánea.

Siendo:

$$(1 + i) = e^{\sigma}$$

$$(1+0.60)=e^{\sigma}$$

$$\ln 1.60=\sigma\times\ln e$$

$$\sigma=0.47$$

Rta.: la tasa instantánea correspondiente es del 47 %.

Ejemplo:

Calcular el interés obtenido durante siete meses si un capital de $8.000 se depositó para beneficiarse con una tasa instantánea del 5 % mensual.

$$I=C\times\left(e^{n\times\sigma}-1\right)$$

$$I=8000\times\left(e^{7\times0.05}-1\right)$$

$$I=8000\times\left(2.718282^{7\times0.05}-1\right)$$

$$I=8000\times0.419067$$

$$I=\$3.352{,}54.-$$

El interés obtenido en la operación resultó de $3.352,54.

Capítulo 9

El descuento compuesto

DESCUENTO COMPUESTO

Si de la operación financiera surgen varias actualizaciones sucesivas, estas pueden efectuarse en base a una tasa de interés o en base a una tasa de descuento y dar origen a dos clases de operaciones de descuento compuesto:

1. Operaciones financieras de descuento compuesto en base a tasas de interés.

2. Operaciones financieras de descuento compuesto en base a tasas de descuento.

OPERACIONES DE DESCUENTO COMPUESTO EN BASE A TASAS DE INTERÉS

En estas operaciones el descuento es igual al interés compuesto que devengará un capital, denominamos en estas operaciones al valor actual.

Recordemos que, en concordancia con el monto compuesto, obtenemos el valor nominal capitalizando el valor actual por la tasa de interés durante "n" periodos de tiempo:

$$N = V(1+i)^n$$

Del mismo modo podemos despejar el valor actual:

$$V = N\left(1+i\right)^{-n}$$

Obtenemos el descuento en base al conocimiento del valor actual:

$$D = V\left[(1+i)^n - 1\right]$$

Disponiendo del valor nominal el descuento racional resultará:

$$D = N - N(1+i)^{-n}$$

de donde:

$$D = N\left[1-(1+i)^{-n}\right]$$

OPERACIONES DE DESCUENTO COMPUESTO EN BASE A TASAS DE DESCUENTO

Parte del valor nominal y mediante la utilización de la tasa de descuento queda la siguiente expresión:

$$V = N(1-d)^n$$

Igualmente válida resultaría la expresión:

$$N = V(1-d)^{-n}$$

Disponiendo del valor actual el descuento comercial resultará:

$$D = V(1-d)^{-n} - V$$

finalmente:

$$D = V\left[(1-d)^{-n} - 1\right]$$

Ahora, disponiendo del valor nominal sería:

$$D = N - N(1-d)^{n}$$

Operando:

$$D = N\left[1-(1-d)^{n}\right]$$

EJERCICIOS DE DESCUENTO EN RÉGIMEN COMPUESTO

- Se contrae una deuda de $22.000 por la que se pacta entregar tres documentos a 60, 90 y 120 días de plazo, de los cuales cada uno resulta de $1.000 superior al anterior. Si para dicha operación se pactó una tasa efectiva y vencida del 8 % bimestral, calcular el importe de dichos documentos.

SOLUCIÓN:

Siendo:

$$N_3 = N_1 + 2000$$
$$N_2 = N_1 + 1000$$
$$N_1 = N_1$$

$$22000 = \frac{N_1}{(1+0.08)} + \frac{N_1 + 1000}{(1+0.08)^{1,5}} + \frac{N_1 + 2000}{(1+0.08)^2}$$

$$22000 = 0.925926N_1 + 0.89097(N_1 + 1000) + 0.857339(N_1 + 2000)$$
$$2.674235N_1 = 22000 - 890.97 - 1714.68$$

$$N_1 = \frac{19394.35}{2.674235}$$

$$N_1 = \$7.252.30.-$$
$$\therefore N_2 = \$8.252.30.-$$
$$\therefore N_3 = \$9.252.30.-$$

- Se vende un electrodoméstico cuyo valor de contado es de $980, se entregó $200 de contado y el resto será financiado con dos documentos a 30 y 60 días de plazo de igual importe entre sí, cargándoles $120 de intereses. Calcular qué tasa adelantada mensual se empleó en la operación al considerar que se trata de actualizar en régimen compuesto.

SOLUCIÓN:

Consideramos que la financiación se realiza sobre $780 (980-200):

$$780 = 450 \times \left[(1-d) + (1-d)^2\right]$$

$$1.73 = (1-d) + (1-d)^2$$

sí:

$$1-d = X$$

$$1.73X^0 = X + X^2$$

$$0 = X^2 + X - 1.73X^0$$

Resolvemos y encontramos el valor de la tasa buscada:

$$d_{mensual} = 0.0917$$

- Se conoce que el interés devengado en el último bimestre de una operación financiera pactada a diez meses resultó ser de 1/3 del capital originalmente depositado. La operación se pactó a dos tasas adelantadas consecutivas, la primera de ellas válida durante el primer semestre, del 8 % bimestral. Calcular el valor de la segunda tasa adelantada y bimestral que se empleó en la operación, sabiendo que se realizó en un régimen compuesto.

SOLUCIÓN:

Relacionamos el dato del enunciado con la evolución de un capital en los diez meses de duración de la operación:

$$\frac{C}{3} = C \times (1-0.08)^{-3} \times (1-d)^{-1} \times \left[(1-d)^{-1} - 1\right]$$

Hemos adaptado la expresión ajustándola a una tasa adelantada, ahora podemos simplificar C a ambos lados de la igualdad y ordenamos la expresión:

$$0.\widehat{3} = 1.2842 \times (1-d)^{-1} \times \left[(1-d)^{-1} - 1\right]$$

definiendo al factor de actualización (1-d)=X

$$0.\widehat{3} = 1.2842 \times \left(\frac{1}{X}\right) \times \left[\left(\frac{1}{X}\right) - 1\right]$$

reagrupando:

$$0.25956 = \left(\frac{1}{X^2}\right) - \left(\frac{1}{X}\right)$$

resolviendo:

$$0.25956 = \frac{1 - X}{X^2}$$

$$0 = 0.25956X^2 + X - 1$$

Resolviendo la incógnita:

$$X = 0.8238$$

$$siendo: X = (1 - d)$$

$$0.8238 = 1 - d$$

$$d_{bimestral} = 0.17616$$

Rta.: la tasa efectiva válida para esta operación sería del 17,616 % bimestral adelantada.

- Se firman tres documentos de igual importe a 30, 60 y 90 días de plazo, con el objeto de saldar una deuda de $23.000. La tasa convenida en la operación resultó del 2,5 % efectiva mensual y vencida. Calcular el importe de los documentos y el costo financiero de la operación.

SOLUCIÓN:

$$23000 = N \times \left(\frac{1}{(1 + 0.025)} + \frac{1}{(1 + 0.025)^2} + \frac{1}{(1 + 0.025)^3} \right)$$

$$23000 = N \times (0.97561 + 0.9518 + 0.928599)$$

$$N = \frac{23000}{2.856}$$

$$N = \$8.053.19.-$$

Para conocer el costo total de la operación comparamos la sumatoria de desembolsos contra la deuda original:

$$Costo = 8053.19 \times 3 - 23000$$

$$Costo = \$1159{,}58.-$$

Rtas.: cada documento se firmó por $8.053.19, en tanto el costo total de la operación resultó de $1.159,58.

- El costo financiero de abonar una deuda con tres documentos iguales a 60, 90 y 120 días de plazo fue de $2.000. La tasa de la operación fue del 2 % efectiva mensual y vencida. Calcular el importe de los documentos y de la deuda original.

SOLUCIÓN:

Siendo:

$$3 \times N - V = 2000$$

$$V = 3 \times N - 2000$$

$$3 \times N - 2000 = N \times \left[\frac{1}{(1+0.02)^2} + \frac{1}{(1+0.02)^3} + \frac{1}{(1+0.02)^4} \right]$$

$$3 \times N - 2000 = N \times [0.961169 + 0.94232 + 0.92384]$$

$$3 \times N - 2000 = 2.82733 \times N$$

$$(3 - 2.82733) \times N = 2000$$

$$0.1726656 \times N = 2000$$

$$N = \$11.583.08$$

Si: $3 \times N - V = 2000$

$$V = 3 \times N - 2000$$

$$V = 3 \times 11583.08 - 2000$$

$$V = \$32.749{,}15$$

Rtas.: los documentos fueron firmados por $11.583,08 cada uno y la deuda original fue de $32.749,15.

- Un crédito personal de \$3.600 tomado el 10/1 es financiado en cuatro cuotas, las dos primeras iguales y las dos restantes un 35 % más caras que las primeras con vencimientos el 4/2, el 4/4, el 4/6 y el 4/8 del mismo año. ¿Qué tasa de descuento mensual se aplicó si la tasa de descuento efectiva anual fue del 14,9 %? ¿Cuál fue el costo financiero total?

SOLUCIÓN:

Resolvemos la equivalencia:

$$(1+0.149)=\left(1+i_m\right)^{12}$$

$$i_m=0.01164$$

$$3600=N\times\left[(1-0.0116)^{\frac{25}{30}}+(1-0.0116)^{\frac{84}{30}}\right]+1.35\times N\times\left[(1-0.0116)^{\frac{145}{30}}+(1-0.0116)^{\frac{206}{30}}\right]$$

$$3600=N\times\left(0.99029+0.967748+1.2757+1.2457\right)$$

$$3600=\frac{3600}{4.4794}$$

$$N=\$803.67(N1yN2)$$

$$1.35\times N=\$1.084.95(N3yN4)$$

$$N1+N2+N3+N4=2\times(803.67+1084.95)$$

$$N1+N2+N3+N4=\$3777.24$$

$$Costo=\sum_4^1 N-V$$

$$Costo = 3777.24 - 3600$$

$$Costo = \$177.24.-$$

Rtas.: el valor de los dos primeros documentos es de $803,67 cada uno, los restantes de $1.084,95 cada uno y el costo total de la operación fue de $177,24.

- Conociendo que el descuento practicado en el segundo y tercer documento de una serie de cuatro pagarés de igual importe ascendió a $49,11 y al saber que fueron abonados en forma vencida, mensual y consecutiva, valuados al 1 % efectivo mensual, calcular el valor de cada uno de ellos, así como la deuda que los originó.

SOLUCIÓN:

Siendo:

$$D3 + D4 = 49.11$$

$$D = N - V$$

entonces:

$$D2 = N - \frac{N}{(1+0.01)^2} \quad \text{y} \quad D3 = \frac{N}{(1+0.01)^3}$$

$$D2 = N \times (1 - 0.9803)$$

$$D2 = 0.0197 \times N$$

$$D3 = N \times (1 - 0.9706)$$

y $$D3 = 0.0294 \times N$$

$$49.11 = (0.0294 + 0.0197) \times N$$

$$N = \frac{49.11}{0.049811}$$

$$N = \$1000.-$$

Recomponiendo la expresión para obtener el valor actual:

$$V = \frac{1000}{(1+0.01)} + \frac{1000}{(1+0.01)^2} + \frac{1000}{(1+0.01)^3} + \frac{1000}{(1+0.01)^4}$$

$$V = 990.10 + 980.30 + 970.59 + 960.98$$

Si observamos la diferencia entre los dos valores nominales intermedios (segundo y tercer orden de términos) y la sumatoria del segundo y tercer término de la igualdad precedente:

$$1000 + 1000 - (980.30 + 970.59) = 49.11$$

Comprobamos que se cumple la premisa del enunciado. Restaría finalizar los cálculos para conocer la deuda original:

$$V = \$3901.97.-$$

Capítulo 10

Las tasas equivalentes

TASAS EQUIVALENTES EN RÉGIMEN COMPUESTO

Al referirnos a la equivalencia de tasas en el régimen compuesto debemos recordar las tasas oportunamente estudiadas hasta aquí, tanto en régimen de capitalización simple como en régimen de capitalización compuesta que se emplean con mayor frecuencia, de donde podemos encontrar tasas efectivas y tasas nominales, así como de carácter vencido o de carácter adelantado.

Resultará práctico disponer de un cuadro que las vincule, como el que se expone a continuación:

Capitalización	**Carácter**	**Vencidas**	**Adelantadas**
R. simple	Simples	***i***	***d***
Régimen compuesto	Efectivas Nominales	***i*** ***jm***	***d*** ***fm***

Para definir dos tasas que resulten equivalentes entre sí en régimen compuesto se deben presentar tres condiciones necesarias:

a) Que se obtengan a partir de capitales iguales
b) Que con ambas se puedan alcanzar a igualar sus montos finales
c) Que la comparación sea realizada en el mismo lapso de tiempo (t).

Partiendo de estas premisas, la comparación será efectuada a partir de la igualación de sus montos:

$$C_{n1} = C_{n2} \qquad (1)$$

Con independencia del tipo de operación o tasa aplicada ajustaremos convenientemente la expresión anterior, adecuándola a la tasa empleada.

1.1 Comparación entre dos tasas efectivas y vencidas

Adaptamos la expresión (1):

$$C(1+i1)^{n1} = C(1+i2)^{n2}$$

Lo que significa que, a la tasa denominada i1 (tasa conocida) se mantendrá vigente por n1 periodos, situación equivalente para la tasa por averiguar que denominaremos i2, la que se encontrará vigente por el plazo n2 (igualmente equivalente a n2).

Conociendo que:

$$n = \frac{t}{ut}$$

y simplificando los capitales C, puesto que las comparaciones se harán en función de capitales unitarios, es decir de $1 en cada caso para luego proporcionarlos al capital deseado, se nos representa la comparación solo entre los factores de capitalización como igualmente válida:

$$(1+i1)^{\frac{t}{ut1}} = (1+i2)^{\frac{t}{ut2}}$$

En la expresión precedente, ut1 responde a la unidad de tiempo en la que opera la tasa i1, en tanto ut2 se corresponde con la unidad de tiempo en que actúa la tasa i2. Por otra parte, expresando tanto t, ut1 y ut2 en la misma frecuencia temporal, es decir en forma homogénea, tendremos que resultará uniforme la comparación si tomamos todos estos elementos en días, como si los consideramos todos en meses, años, etc. Por lo que el elemento t resultará igual para cada caso, en concordancia con la condición (c) arriba indicada:

<u>El mismo plazo</u>

$$(1+i1)^{\frac{t}{ut1}} = (1+i2)^{\frac{t}{ut2}}$$

Veamos un ejemplo:

Considerar la tasa que resulta equivalente al 24 % efectivo trimestral que opera en forma bimestral.

SOLUCIÓN:

$$(1+0.24)^{\frac{t}{90}} = (1+i_b)^{\frac{t}{60}}$$

La tasa ib (bimestral) es la tasa que queremos comparar en este caso. Hemos elegido (arbitrariamente) realizar la comparación con plazos diarios, por lo que para la tasa trimestral indicamos que su ut=90, en tanto que para la bimestral ut=60. Resta pues definir algún valor de “t” (plazo de exposición) idéntico para cada una, por lo que podría decidir comparar ambas tasas en el término de 1 solo día, de donde:

$$(1+0.24)^{\frac{1}{90}} = (1+i_b)^{\frac{1}{60}}$$

Resolviendo la expresión anterior y despejando ib, tendremos: ib=0.1542, es decir que la tasa equivalente al

24 % efectivo trimestral resultará ser del 15,42 % efectiva bimestral.

Nótese que en un régimen compuesto no existe proporcionalidad entre las tasas efectivas que resultan ser equivalentes, puesto que el proceso de capitalización al que se ven sometidos los capitales incrementa en modo más que proporcional sus rendimientos.

Por otra parte, ambas tasas pueden utilizarse de manera indistinta por cualquier inversor, independientemente de la cuantía del capital disponible, dando como resultado montos iguales al partir de capitales iguales.

1.2 Comparación entre una tasa efectiva vencida (im) y otra nominal vencida (jm)

De la expresión (1) y considerando a la tasa nominal “jm” de características proporcionales y enunciativas, tendremos:

$$(1+i1)^{n1} = (1+\frac{jm}{m})^{n\times m}$$

Donde “m” nos indica la cantidad de veces que se producen capitalizaciones de intereses dentro de la unidad de tiempo de la tasa nominal. Dado entonces:

$$m = \frac{ut}{fs}$$

Donde fs= frecuencia subperiódica de la tasa nominal dada, tendremos que:

$$(1+i1)^{\frac{t}{ut1}} = (1+\frac{jm\times fs}{ut})^{\frac{t}{fs}}$$

Nótese que al realizar el producto de n*m podemos simplificar ut en el exponente del factor de capitalización de la tasa nominal, ya que:

$$n\times m = \frac{t\times \cancel{ut}}{\cancel{ut}\times fs}$$

Ejemplo:

Considerar la tasa efectiva vencida cuatrimestral equivalente al 18 % semestral con capitalización cada 33 días:

SOLUCIÓN:

La tasa por resolver es la efectiva, partimos del conocimiento de la tasa nominal:

$$\left(1+i_c\right)^{\frac{t}{120}} = \left(1+0.18\times\frac{33}{180}\right)^{\frac{t}{33}}$$

En este caso, ic =tasa efectiva vencida cuatrimestral.

Si elegimos considerar un plazo “t”=33 días:

$$\left(1+i_c\right)^{\frac{33}{120}} = 1.033$$

operando:

$$1.033^{\frac{33}{120}} = 1 + i_c$$

$$i_c = 1.1253 - 1$$

$$i_c = 0.1253$$

Rta.: la tasa efectiva vencida cuatrimestral resultará del 12.53 %.

1.3 Comparación entre una tasa nominal vencida (jm) y otra nominal vencida (jm)

Procedemos análogamente al desarrollo anterior:

$$(1 + \frac{jm1}{m})^{n \times m} = (1 + \frac{jm2}{m})^{n \times m}$$

$$(1 + \frac{jm \times fs}{ut1})^{\frac{t}{fs}} = (1 + \frac{jm \times fs}{ut2})^{\frac{t}{fs}}$$

Ejemplo:

Calcular cuál será la tasa nominal trimestral con capitalización quincenal equivalente al 24 % mensual con capitalización semanal.

$$\left(1+0.24\times\frac{7}{30}\right)^{\frac{t}{7}}=\left(1+j_m\times\frac{15}{90}\right)^{\frac{t}{15}}$$

Considerando el plazo “t”=15

$$1.12385=1+016667\times.j_m$$

$$j_m=\frac{0.12385}{0.16667}$$

$$j_m=0.7431$$

Rta.: la tasa nominal buscada será del 74,31 % trimestral con capitalización quincenal.

1.4 <u>Comparación entre dos tasas efectivas y adelantadas</u>

Para resolver este tipo de tasas debemos recordar la forma en que se expresa su fórmula, puesto que siendo:

$$V=N(1-d)^n$$

y $N=V(1-d)^{-n}$

Análogamente a $V\leftrightarrow C$ y $N\leftrightarrow C_n$

Por lo que:

$$Cn = C(1-d)^{n}$$

Igualando los montos unitarios para respetar la premisa n.º 2:

$$(1-d1)^{-n1} = (1-d2)^{-n2}$$

Por lo que podemos multiplicar por -1 cada exponente:

$$(1-d1)^{n1} = (1-d2)^{n2}$$

$$(1-d1)^{\frac{t}{ut1}} = (1-d2)^{\frac{t}{ut2}}$$

Ejemplo:

Calcular la tasa efectiva mensual adelantada equivalente al 4 % efectivo adelantado bimestral.

SOLUCIÓN:

Para d1=0.04 bimestral como la tasa conocida y d2=dm (tasa efectiva adelantada mensual):

$$(1-0.04)^{\frac{t}{60}} = (1-d_2)^{\frac{t}{30}}$$

Considerando a “t”=30

$$0.96^{\frac{30}{60}} = 1-d_{mensual}$$

$$d_{mensual} = 1 - 0.96^{\frac{1}{2}}$$

$$d_{mensual} = 0.0202$$

Rta.: la tasa efectiva mensual adelantada y equivalente resultaría del 2,02 %.

1.5 <u>Comparación entre una tasa adelantada efectiva y otra adelantada nominal</u>

Recordemos previamente que las tasas adelantadas "actualizan" en lugar de "capitalizan" al momento de referirnos específicamente al procedimiento de equivalencias. Para solucionar este caso debemos hacer lo propio de la siguiente forma:

$$(1-d)^n = (1-\frac{fm}{m})^{n \times m}$$

de donde:

$$(1-d1)^{\frac{t}{ut1}} = (1-\frac{fm \times fs}{ut})^{\frac{t}{fs}}$$

Ejemplo:

Considerar la tasa nominal cuatrimestral con actualización cada 27 días equivalente al 16 % semestral efectiva y adelantada.

$$(1-0.16)^{\frac{t}{180}}=\left(1-f_m\times\frac{27}{120}\right)^{\frac{t}{27}}$$

Para el plazo "t"=27:

$$0.84^{\frac{27}{180}}=(1-f_m\times 0.225)^{\frac{27}{27}}$$

$$0.974186=1-f_m\times 0.225$$

$$f_m\times 0.225=1-0.974186$$

$$f_m=\frac{0.025814}{0.225}$$

$$f_m=0.114729$$

Rta.: la tasa nominal equivalente resultaría del 11,4729 % cuatrimestral con actualizaciones cada 27 días.

1.6 <u>Comparación entre dos tasas nominales adelantadas</u>

Para el supuesto de comparar dos tasas "fm" procederemos a partir de la siguiente expresión:

$$(1-\frac{fs1}{ut1})^{\frac{t}{fs1}}=(1-\frac{fs2}{ut2})^{\frac{t}{fs2}}$$

Ejemplo :

Calcular la tasa nominal trimestral con actualización mensual equivalente al 6 % mensual con actualizaciones diarias.

SOLUCIÓN:

$$\left(1-f_m\times\frac{30}{90}\right)^{\frac{t}{30}}=\left(1-0.06\times\frac{1}{30}\right)^{\frac{t}{1}}$$

Siendo el plazo "t"=1 tendremos que:

$$\left(1-f_m\times 0.333\right)^{\frac{1}{30}}=0.998$$

$$1-f_m\times 0.333=0.998^{30}$$

$$-f_m\times 0.333=0.058292$$

multiplicando ambos términos por -1, y despejando fm:

$$f_m=\frac{0.058292}{0.333}$$

$$f_m=0.174876$$

Rta.: la tasa nominal trimestral con actualizaciones mensuales resultaría del 17.4876 %.

1.7 Comparación entre una tasa efectiva vencida con otra efectiva adelantada

Aquí se debe prestar especial atención, puesto que alguno de los exponentes correspondientes a los factores de capitalización y actualización deberá ser de signo negativo, puesto que los montos de cada uno así lo exigen. Recordemos que para la tasa vencida:

$$Cn = C(1+1)^{n}$$

mientras que para la tasa adelantada:

$$Cn = C(1-d)^{-n}$$

Al igualar sus montos para un capital unitario, sus respectivos factores de capitalización y actualización quedan enfrentados de la siguiente manera:

$$(1+i)^{n} = (1-d)^{-n}$$

Extendiendo los exponentes:

$$(1+i1)^{\frac{t}{ut1}} = (1-d2)^{-\frac{t}{ut2}}$$

Ejemplo:

Conociendo una tasa efectiva vencida mensual del 5 %, calcular la tasa efectiva y adelantada mensual equivalente.

SOLUCIÓN:

$$(1+0.05)^1 = (1-d)^{-1}$$

operando:

$$1.05 = \frac{1}{1-d}$$

$$1-d = \frac{1}{1.05}$$

$$1-d = 0.952381$$

$$-d = -0.047619$$

multiplicando ambos miembros por -1:

d=0.047619

Rta.: la tasa efectiva mensual equivalente buscada sería del 4,7619 % adelantado.

1.8 <u>Comparación entre dos tasas nominales, una vencida (jm) y otra adelantada (fm)</u>

Resolver estas equivalencias nos remite a las explicaciones anteriores:

$$(1+\frac{jm}{m})^{n\times m}=(1-\frac{fm}{m})^{-n\times m}$$

Extendiendo sendas expresiones:

$$(1+\frac{jm\times fs}{ut})^{\frac{t}{fs}}=(1-\frac{fm\times fs}{ut})^{-\frac{t}{fs}}$$

Ejemplo:

Dada la tasa nominal anual con actualización trimestral del 24 %, conocer la tasa nominal semestral con capitalizaciones cada 35 días equivalente (considerar año comercial de 360 días):

SOLUCIÓN:

$$\left(1-0.24\times\frac{90}{360}\right)^{\frac{t}{90}}=\left(1+j_m\times\frac{35}{180}\right)^{\frac{-t}{35}}$$

Nótese que resulta indistinta la ubicación del signo negativo del exponente, puesto que resultan operaciones inversas.

Para "t"=35

$$0.9762245=\left(1+j_m\times 0.02777\right)^{-1}$$

$$\frac{1}{0.9762245}=1+j_m\times 0.02777$$

$$1.0243545 = 1 + j_m \times 0.02777$$

$$j_m \times 0.2777 = 0.0243545$$

$$j_m = 0.877$$

Rta.: la tasa nominal semestral con capitalizaciones cada 35 días que resulta equivalente sería del 87,7 %.

1.9 <u>Comparación entre una tasa instantánea y una tasa efectiva y vencida</u>

Partiendo de la siguiente expresión:

$$Cn = C \times e^{n \times \sigma}$$

ya vista al referirnos a la tasa instantánea igualaremos luego los montos con el factor de capitalización vencido:

$$C(1+i)^n = C \times e^{n \times \sigma}$$

Luego simplificamos los capitales:

$$(1+i)^n = e^{n \times \sigma}$$

Siendo $$n = \frac{t}{ut}$$

$$(1+i1)^{\frac{t}{ut1}} = e^{\frac{t \times \sigma}{ut2}}$$

Siendo ut1 la unidad de tiempo de la tasa efectiva y vencida y ut2 la unidad de tiempo de la tasa instantánea.

Ejemplo:

Dada la tasa vencida con capitalizaciones mensuales del 6 %, calcular la tasa instantánea semestral equivalente.

$$(1+0.06)^{\frac{t}{30}} = e^{\frac{t \times \sigma}{180}}$$

Si elegimos que t=180 días, entonces

$$(1+0.06)^{6} = e^{\sigma}$$

aplicando logaritmos:

$$\ln 1.418519 = \sigma \times \ln e$$

$$\sigma = 0.3496$$

Rta.: la tasa instantánea equivalente será del 34,96 %.

1.10 Comparación entre una tasa instantánea y una tasa efectiva y adelantada

Partiendo de la siguiente expresión:

$$Cn = C \times e^{n \times \sigma}$$

vista al referirnos a la tasa instantánea, igualaremos los montos:

$$C(1-d)^{-n} = C \times e^{n \times \sigma}$$

Luego simplificamos los capitales:

$$(1-d)^{-n} = e^{n \times \sigma}$$

Siendo $n = \dfrac{t}{ut}$

$$(1-d1)^{-\frac{t}{ut1}} = e^{\frac{t \times \sigma}{ut2}}$$

Siendo ut1 la unidad de tiempo de la tasa efectiva y adelantada y ut2 la unidad de tiempo de la tasa instantánea.

Ejemplo:

Dada la tasa instantánea del 50 % trimestral, calcular la tasa efectiva y adelantada bimestral que resulte equivalente.

$$(1-d_1)^{\frac{-t}{ut_1}} = e^{\frac{t\times\sigma}{ut_2}}$$

$$(1-d_1)^{\frac{-t}{60}} = e^{\frac{t\times 0.5}{90}}$$

Si elegimos que t=60 días, entonces

$$(1-d_1)^{\frac{-60}{60}} = e^{\frac{60\times 0.5}{90}}$$

$$\frac{1}{1-d_1} = 1.395612425$$

despejando (1-d1):

$$1-d_1 = \frac{1}{1.395612425}$$

$$1-d_1 = 0.71653131$$

$$-d_1 = -0.283468689$$

multiplicando por -1:

$$d_1 = 0.283468689$$

Rta.: la tasa efectiva bimestral adelantada equivalente será del 28.35 %.

EJERCICIOS DE TASAS EQUIVALENTES

- Se realiza un cierto depósito en una cuenta durante un año, una vez cumplido el plazo se pudo retirar de esta \$32.500. Calcular el capital inicial si la operación se pactó en las siguientes condiciones: durante los primeros 100 días la tasa convenida fue del 20 % efectivo trimestral vencido, por los siguientes 110 días la tasa empleada fue del 36 % cuatrimestral con capitalizaciones bimestrales, por último, se usó una tasa adelantada efectiva del 16 % cada 70 días.

SOLUCIÓN:

$$32.500 = V_0 \times (1+0.2)^{\frac{100}{90}} \times \left(1+\frac{0.36x60}{120}\right)^{\frac{110}{60}} \times (1-0.16)^{\frac{-155}{70}}$$

$$V_0 = \frac{32.500}{1.224557 \times 1.3545 \times 1.47105}$$

$$V_0 = \frac{32.500}{2.4402}$$

$$V_0 = \$13.319.81.-$$

- Determinar la tasa nominal anual con actualización cada 55 días que fuera empleada en una operación financiera dónde se depositó \$11.560 durante cinco meses para retirar al término de la operación la suma de \$14.120.

SOLUCIÓN:

Siendo:

$$V = N(1-d)^n$$

y usando una tasa nominal transformada:

$$11560 = 14120 \times \left(1 - \frac{j_m \times 55}{365}\right)^{\frac{150}{55}}$$

$$0.8187^{\frac{55}{150}} = 1 - 0.150685 \times j_m$$

$$0.150685 \times j_m = 1 - 0.929278$$

$$j_m = 0.4693$$

Rta.: la tasa nominal anual (año civil) empleada en dicha operación fue del 46,83 % con actualizaciones cada 55 días.

Capítulo 11

Apéndice de problemas propuestos para operaciones en régimen simple y compuesto

INTERÉS SIMPLE

Ejercitación

1. Un inversor deposita $20.000 en una cuenta durante seis meses y obtiene un cierto monto al finalizar la operación. Si la tasa convenida resultó del 1,8 % mensual, determinar el dinero reunido.

2. Se logró obtener luego de 100 días de haberse depositado un cierto capital un interés total de $2.600. Considerar el capital que lo originó sabiendo que la operación se realizó al 4 % trimestral simple.

3. El Dr. Villarino desea obtener $20.000 luego de diez meses de realizar un único depósito de $17.200. ¿Qué tasa trimestral simple debería obtener en dicha operación para satisfacer su requerimiento?

4. De acuerdo al enunciado del ejercicio anterior, calcular las siguientes tasas que cumplen con la condición prevista:

    4.1. Cuatrimestral simple
    4.2. Semestral simple
    4.3. Bimestral simple

5. Habiéndose depositado en una cuenta $12.000 se alcanzó a reunir luego de 130 días un monto de $14.100. Calcular la tasa simple mensual utilizada.

6. Para obtener un interés de $1.240 un inversor debió depositar $10.000 en una cuenta durante un cierto tiempo. Si la tasa convenida resultó del 1,1 % mensual simple, calcular en cuánto tiempo alcanzará su objetivo.

7. Agrícola Pampeana SRL realizó un depósito de $45.000 durante siete meses en una cuenta de ahorros al 1,4 % mensual simple. Luego de cuatro meses retiró de esta $2.200. Conociendo que pudo retirar al término de la operación un total de $47.216,83, calcular el momento en que se debió producir una capitalización de intereses para obtener dicha suma.

8. Calcular los intereses totales obtenidos en la operación anterior.

DESCUENTO SIMPLE

Ejercitación

1. ¿Qué descuento corresponde efectuar a un documento de $12.000 que fuera valuado al 3 % mensual simple adelantado, descontándolo 45 días antes de su vencimiento?

2. ¿Cuánto tiempo antes del vencimiento fue descontado al 120 % anual adelantado un documento de $15.500 por el que hoy se recibieron $9.900?

3. Un documento de $22.000 es descontado 44 días antes de su vencimiento y se reciben $18.400. ¿Cuál fue la tasa de interés bimestral vencida utilizada en la operación?

4. ¿Cuál es la tasa de descuento anual equivalente al 110 % anual de interés en operaciones a un año de plazo?

5. ¿Cuál es la tasa adelantada correspondiente al 96 % anual vencido en operaciones a 150 días?

6. ¿Qué suma se recibe si se descuenta en un Banco un pagaré de $100.000 a 190 días si cobra una tasa adelantada de 21 % anual?

7. ¿A qué tasa efectiva de interés se encuentran valuados dos documentos de $3.950 cada uno de valor nominal que vencieron a los cuatro y a los ocho meses, si por ambos recibieron $6.150?

8. ¿A qué tasa bimestral efectiva adelantada se valuó un documento si luego de diez meses se obtuvo por todo concepto un 70 % más que su valor actual?

9. Para cancelar una deuda de $120.000 se propone realizar tres pagos mensuales, vencidos y consecutivos, a 30, 60 y 90 días, de igual importe entre sí. La tasa acordada con el acreedor para dicha operación resultó del 3 % mensual simple. Calcular el importe de tales pagos.

10. ¿A qué tasa bimestral adelantada fue negociado un documento de $8.000 si 50 días antes de su vencimiento la operación originó un quebranto financiero de $497, y sabiendo que el documento incluía un 7,5 % mensual de interés a 90 días?

11. Un señor efectúa una compra de $ 5.000, abona el 20 % al contado y entrega un documento a 69 días en el cual se incluye el 10 % mensual de interés. Se desea saber a qué tasa quincenal adelantada se debería descontar el documento 20 días después para no sufrir quebranto financiero alguno.

12. Una cierta deuda se documenta mediante dos pagarés a 45 y 90 días de plazo respectivamente, el primero es superior al segundo en un 20 %. Conociendo que la operación representó un costo financiero total de $3.000 para el firmante, calcular:

    a. el importe de la deuda original y
    b. el valor de cada documento.

Considerar que la tasa empleada en dicha operación resultó del 3 % trimestral simple y adelantada.

13. Un deudor ha suscripto dos documentos de $4.000 cada uno de valor nominal, con vencimiento el 9/2/2005 y el 9/4/2005 respectivamente. Llegada la fecha del primer vencimiento, y ante la imposibilidad de cumplir con la obligación, el deudor solicita refinanciar la operación y entrega a cambio tres nuevos

documentos de igual valor, con vencimientos el 19/5/2005, el 9/6/2005 y el 13/7/2005. Calcular el importe por el que se emitirán los nuevos documentos, siendo que toda la operación se valúa:

a. Con la tasa del 9,5 % mensual vencida de interés.
b. Con una tasa del 11 % mensual adelantada.

Definir cuál tasa resulta más ventajosa para el acreedor.

14. En cancelación de una deuda de $1.900 el deudor entregará tres documentos de igual valor nominal con fecha de vencimiento dentro de 30, 60 y 85 días. Sabiendo que de inmediato dichos documentos son descontados al 8 % mensual adelantado, se desea saber a qué tasa mensual de interés se debe realizar la primera operación para no sufrir quebranto alguno.

15. Un documento de $36.000 que vence en la fecha es sustituido por tres documentos de igual valor nominal a 35, 50 y 65 días de plazo. ¿Cuál es el valor nominal de estos si la operación se realiza al 9 % mensual adelantado?

16. Como canje de una deuda de $50.000 que vence hoy, el deudor nos entrega dos documentos de $27.933 cada uno, y el segundo documento vence 45 días más tarde que el primero. Calcular cuántos días después del origen de la deuda vence el primer documento siendo que la operación se realizó al 6 % mensual adelantado.

17. Como consecuencia de una deuda originada en la fecha, de $10.000 se recibe un documento de terceros por el mismo importe que fue firmado hace 45 días, y cuyo vencimiento operará dentro de 120 días contados desde el momento de la firma. Por la diferencia el deudor ofrece pagar 30 días después del vencimiento del primer documento el saldo final. ¿Cuál será este si la operación se calcula al 9 % mensual adelantado?

18. ¿Cuál será el valor por el que se debe emitir un cheque a 91 días para que una vez descontado en un banco al 11 % anual de descuento produzca un importe neto de $20.000, y al tener presente que dicha institución financiera cobra el impuesto a los débitos del 1 % y una comisión del 4 % sobre el total del cheque?

19. En reemplazo de un documento que vence el 9/11 de $2.000 se entrega un documento de $2.000 y otro de $1.000 que tienen una diferencia entre ambos de 59 días. ¿En qué fecha ocurrirá el primer vencimiento, si se sabe que la operación se halla valuada a una tasa del 18 % bimestral de descuento?

20. Se ha obtenido un préstamo personal por $38.000 a 270 días por el cual cobra el 22 % anual adelantado. La suma recibida es prestada 60 días después, por la que se obtiene un documento que vencerá el mismo día que el préstamo original. En estas condiciones, averiguar qué tasa mensual de interés deberá incluirse en el segundo documento si se desea obtener un beneficio total final del 8 % sobre la suma prestada.

21. Como consecuencia de la venta de una máquina por $11.600 el adquiriente paga el 34 % al contado y el resto en dos documentos, de los cuales el primero es un quinto del segundo, cuyos vencimientos ocurren a 90 y 180 días de plazo. La tasa de interés trimestral es del 13 %. ¿A qué tasa quincenal se pueden descontar bancariamente para no sufrir quebranto alguno?

22. Como requisito para la difusión de un producto novedoso en el mercado, una empresa necesita invertir $200.000 de los que se cuenta con un 15 % en efectivo, y obtiene para la financiación del proyecto el resto a través de un préstamo bancario por el cual le cobran un 5 % como gastos administrativos y un 1,5 de impuestos

de sellos que son incluidos en la financiación. La deuda así calculada será cancelada mediante cuatro cuotas documentadas semestrales de igual valor con una tasa de descuento del 2 % bimestral.

Una vez pagado el segundo documento, pasados 90 días se presenta la necesidad de refinanciar la deuda. Luego de arduas negociaciones se consigue canjear los valores restantes por tres nuevos documentos a los que se aplica una tasa vencida del 1 % mensual. En estas condiciones, determinar el costo adicional provocado por el canje de documentos entre ambas operaciones si los nuevos valores se firmaron a 180, 240 y 300 días respectivamente.

23. Se recibe un cheque posdatado de $4.295 cuyo vencimiento opera el día 11 de diciembre del corriente año. La factura que le dio origen a la operación tenía 15 días de gracia y su importe total era de $3.996. Si la tasa de descuento pactada era del 14 % cuatrimestral, ¿de qué fecha data la deuda?

24. Si a un documento librado el 5 de marzo para dentro de 360 días se le incluye interés simple al 18 % anual partiendo de una deuda de $23.000, ¿cuál será la fecha en que se debiera depositar si la entidad financiera en donde será descontado opera con una tasa adelantada simple del 1,27 % anual para no sufrir quebranto alguno?

INTERÉS COMPUESTO

Ejercitación

1. Un inversor desea depositar en una cuenta que capitaliza intereses mensualmente $80.000 durante seis meses. Si la tasa convenida para dicha operación resultó del 1,5 % efectiva mensual, calcular el monto que podrá retirar una vez concluida dicha operación.

2. Para adquirir una finca se abonan $120.000 de contado y por el resto un único pago cancelatorio que se deberá hacer efectivo 31 meses después, se pacta una tasa efectiva cuatrimestral del 2,8 %. Calcular el costo total por la financiación que asume el deudor.

3. Una partida de alimentos envasados es adquirida por un comerciante mayorista en $7.200. Conviene con su proveedor abonar el 25 % contra entrega, y hacer efectivos dos pagos consecutivos iguales, a 20 y 40 días de plazo para saldar su deuda. En la operación se cargaron intereses al 7 % efectivo trimestral. Calcular el desembolso total que debe afrontar el mayorista.

4. ¿Qué suma deberíamos depositar hoy para obtener un beneficio de $4.000 luego de ocho meses, si la operación se pactará al 5 % efectivo trimestral?

5. ¿Qué tasa efectiva cuatrimestral sería necesario conseguir para duplicar un capital al cabo de dos años?

6. Un capital de $15.000 para reunir un cierto interés fue depositado durante 20 meses a las siguientes tasas efectivas y vencidas:
2 % mensual durante 200 días
4 % trimestral durante 230 días

6 % cuatrimestral el resto del tiempo.
Calcular el beneficio que se espera reunir.

7. Para triplicar un cierto capital al cabo de 36 meses un inversor podría conseguir dos tasas consecutivas, la primera 2 puntos superior a la segunda, ambas efectivas mensuales. ¿De qué tasas se trata si se conoce que la primera permaneció vigente por los primeros 18 meses de la operación?

8. Se realizó un depósito de $40.000 a 14 meses de plazo, previéndose realizar tres retiros a los cinco, nueve y once meses respectivamente, de igual importe entre sí para, al finalizar la operación, disponer aún de un saldo de $5.000. Calcular el importe de los respectivos retiros si en todo momento se aplicó una tasa trimestral efectiva y vencida del 2,2 %.

9. Se decide adquirir un monitor de plasma de 19" en una tienda especializada, cuyo valor de contado es de $2.600. El vendedor nos propone financiarlo en tres pagos mensuales vencidos, iguales y consecutivos, previo anticipo contado del 25 %. La propuesta incluye una tasa efectiva mensual del 3,2 %. Calcular el costo financiero de concretarse la operación.

10. Se decide financiar una deuda de $13.000 mediante cuatro pagos consecutivos, los dos primeros un 25 % superior a los restantes. Si los pagos se pactaron con vencimiento cada 40 días, determinar sus respectivos valores si toda la operación se realizó al 5 % efectivo trimestral y vencido.

11. El costo de financiar una deuda de $30.000 mediante dos pagos bimestrales y consecutivos de igual importe ascendió a $2.100. Indicar la tasa efectiva quincenal que se utilizó en dicha operación.

12. Un capital de $17.000 devengó al cabo de 12 meses un interés de $7.044,06 y se emplearon tres tasas efectivas mensuales y consecutivas, del 2 %, 3 % y 4 % respectivamente. Determinar el tiempo que permaneció colocada cada tasa, conociendo que la segunda estuvo vigente el doble de tiempo que la primera.

DESCUENTO COMPUESTO

Ejercitación

1. Para cancelar una cierta deuda se pactó la entrega de dos documentos, a 70 y 100 días de plazo respectivamente, de $8.000 cada uno. Si la tasa convenida resultó del 8 % efectiva trimestral, calcular el valor de la deuda original suponiendo que se trata de una tasa adelantada.

2. El costo financiero de abonar con tres documentos iguales a 30, 60 y 90 días de plazo una cierta deuda resultó de $2.500, se conoce que la operación se perfeccionó al aplicar una tasa adelantada del 2 % efectiva mensual; calcular la deuda original y el importe de cada documento.

3. Calcular el valor de la deuda del ejercicio anterior con la tasa del 8 % efectiva trimestral y vencida. Indicar aquella que resulta más favorable para el deudor y la diferencia monetaria que se suscita.

4. Se adquiere una herramienta industrial cuyo valor de contado inmediato asciende a $14.130,43. Es política del vendedor descontar un 8 % sobre el precio de lista en estos casos, excepto en las condiciones de financiación. Nuestra empresa propone entregar tres documentos consecutivos, a 45, 60 y 75 días de plazo, de los cuales cada uno resulte superior al anterior en $1.000. La financiación acordada mantiene para toda la operación la tasa de interés efectiva mensual del 4 %. Calcular de este modo el valor de los documentos.

5. El 30/7 se firmaron tres documentos a 60, 85 y 110 días de plazo de igual importe entre sí para cancelar el 70 % adeudado por la venta de un equipamiento de oficina en $17.000 y se financió la operación al 4,5 % efectivo, mensual vencido. El 22/8 se entregan los tres documentos a una compañía financiera que descuenta valores al 5 % efectivo mensual adelantado. Calcular el importe que se recibió en ese acto.

7. En ocasión de la venta de una partida de televisores LCD valuada en $210.000 a una importante cadena de venta de electrodomésticos se recibieron cuatro cheques de pago diferido de igual importe, a 90, 120, 150 y 180 días de plazo, y se les cargó un interés mensual del 1,5 % efectivo. En ocasión de producirse el segundo vencimiento nos informan la imposibilidad de cumplir con la cancelación prevista, y se solicita una refinanciación. Pactamos incrementar la tasa original en un 15 % y extender los plazos, por lo que se acordó canjear los valores por tres nuevos compromisos a 45, 60 y 80 días de plazo. Calcular el costo adicional financiero que significa para el deudor el proceso de refinanciación.

8. Al descontar bancariamente el 8/4 tres documentos de igual importe cada uno, cuyos vencimientos operaban el 11/6, 11/7 y 25/8 recibimos $12.600 netos. Calcular el importe de la deuda original al 31/3, ocasión donde se le cargó a los documentos la tasa efectiva del 3 % mensual bajo los siguientes supuestos: el Banco percibe una tasa efectiva mensual del 4 %, además de una comisión fija de $40 por estas operaciones, otra variable del 1 % retiene un aforo del 10 % hasta la efectiva cobranza de los valores y practica la retención que establece el impuesto a los débitos y créditos bancarios del 1,2 %.

9. El Banco del Litoral ha acreditado en el día de la fecha la suma de $11.250 en la cuenta corriente de Avícola Entrerriana SRL, tras haberse presentado una lista de tres documentos de $2.000, $6.200 y $7.100 con vencimientos respectivos dentro de tres, cuatro y seis meses. Teniendo en cuenta los siguientes supuestos, determinar la tasa adelantada mensual simple que se consideró en la operación:

   a) Se debitan gastos de correo por $12 por documento
   b) Se practica un aforo del 8 % por cada lista presentada en concepto de garantía
   c) Existe una comisión directa del 1,5 %

   Se ha practicado la retención del 1,2 % correspondiente al impuesto sobre los débitos y créditos.

EJERCICIOS INTEGRADORES

Ejercitación

1. Dadas tres tasas de interés nominales anuales del mismo valor, con capitalización semestral, trimestral y mensual respectivamente, indique:

   a) Cuál de ellas producirá el mayor monto al cabo de un año.
   b) Cuál de ellas tendrá la mayor tasa efectiva anual de interés.

2. Hace diez meses se realizó un cierto depósito en una cuenta que capitaliza intereses cada 45 días al 21,09 % nominal anual, con la intención de agotarla con tres retiros de igual importe realizados a los cinco, siete y dieciocho meses del depósito inicial. Hoy se extrae el monto obtenido y se lo presta contra dos documentos de un valor nominal de $16.850 cada uno, a sesenta y a noventa y cinco días de plazo respectivamente, y se carga a los documentos una tasa de interés del 3 % efectivo mensual. Una vez cobrado el primero de ellos, dicho importe es entregado como anticipo para la compra de un rodado y se financia el saldo de la siguiente forma: se endosa el documento pendiente de cobro, y además se firma un nuevo documento a 60 días de plazo cuyo valor nominal es de $2.500.
Se pide:

   a) Calcular el importe retirado de la primera operación.
   b) Calcular el importe del depósito original y de los retiros.
   c) Calcular el valor de contado del rodado si en ambos documentos se pactó aplicar una tasa del 2,5 % efectivo mensual de descuento.

3. El 20/04 se realiza una venta por $7.000 en pago de la cual nos entregan tres documentos de igual valor nominal con vencimientos el 15/05, 28/05 y 02/06 y a los que se les incluyen intereses calculados a una tasa de interés simple del 3 % mensual. El 30/04 nos vemos en la necesidad de descontar los documentos en cartera en una financiera que nos aplica una tasa de descuento simple del 2,5 % mensual. El dinero obtenido se utiliza para cancelar una deuda que asciende a $8.000. Se pide:

a) Determine de cuánto es la diferencia que se debe abonar al contado para la cancelación total.

b) Determine el resultado financiero de la operación de descuento realizada.

c) Determine qué tasa de descuento mensual simple no genera resultado financiero.

4. El siguiente listado es un detalle de las ventas efectuadas en cuenta corriente a un cliente:

11/08/05	$1.390
23/08/05	$3.560
30/08/05	$2.165
12/09/05	$1.960
18/09/05	$2.465

Se pide que determine el total adeudado por este cliente al 30/09/05 si la empresa cobra el 15 % trimestral simple vencido por financiar las operaciones a plazo (resolver aplicando numerales).

5. Calcular las siguientes tasas equivalentes:

- j: semestral capitalizable bimestralmente a j: 0.21 anual capitalización cada 21 días.

- j: cuatrimestral capitalizable quincenalmente a f: 0.15 bimestral con actualización semanal.
- d: efectiva trimestral a i: 0.02 efectiva i: efectiva

6. Hace 40 días Ud. otorgó un préstamo por $50.000 a devolver en tres documentos de igual valor nominal, con vencimiento a 50, 100 y 150 días de plazo a una tasa de interés efectiva mensual del 1,2 %. Hoy pacta con su deudor la refinanciación de la deuda en tres documentos de igual valor actual, con vencimiento a los 40, 80 y 120 días de plazo respectivamente. Siendo la tasa de interés de mercado utilizada en la refinanciación del 7 % anual capitalizable cada 40 días. Determine:
   a) Valor nominal de los documentos originales.
   b) Valor según la tasa pactada el día de la refinanciación.
   c) Valor de mercado el día de la refinanciación.
   d) Valor nominal de los nuevos documentos.

7. Se depositó un capital de $15.760,30 en una cuenta que capitaliza intereses trimestralmente a tres años de plazo, y se aplican las siguientes tasas: 15 % anual los primeros diez meses, 9 % semestral los 14 meses siguientes y al 6 % cuatrimestral por el resto del plazo. Determinar:
a) Suponiendo que a los ocho meses de realizada la inversión inicial se practicó un retiro de $4.250, qué suma se debió haber depositado 12 meses después del retiro para reunir el monto esperado en las condiciones originales.
b) Determinar los intereses devengados los últimos diez meses de la operación.
c) Suponiendo que el saldo de la cuenta se agotó con tres retiros de igual importe, el primero a los nueve meses, el segundo a los 17 meses y el tercero a los 25 meses, calcule el importe de cada retiro.
Cada punto es independiente entre sí.

8. Un comerciante realiza un depósito en una cuenta durante cuatro periodos de 30 días cada uno (total de 120 días) por $12.327, y recibe en el primer periodo un interés de $60, en el segundo $85, en el tercero $130 y en el cuarto $165. Determine:

A) La tasa de interés efectiva mensual del primer periodo
B) La tasa de interés nominal anual del segundo periodo
C) La tasa efectiva adelantada del tercer periodo
D) El rendimiento real de punta a punta, si la inflación de los cuatro meses fue del 5 %

9. Ud. compra mercadería y paga con tres documentos de $1.800 cada uno a 60, 90 y 120 días de plazo respectivamente. La tasa de interés de financiación de su proveedor es del 2,5 % efectivo mensual. Transcurridos 45 días de la compra pide refinanciar los documentos por no poder hacerles frente. El proveedor le acepta dos nuevos documentos a 90 y 120 días a partir de entonces. Si en ese momento la tasa de interés de mercado es del 5 % efectiva mensual, calcular el importe de contado de la mercadería.

10. En cancelación de una deuda contraída el 08/06/03 se firman dos documentos de $9.760 c/u a vencer el 19/08/03 y el 20/09/03, diez días antes del vencimiento del primer documento ambos son descontados en un Banco al 2 % simple adelantado mensual. Lo obtenido es utilizado como anticipo para la compra de una máquina que tiene un precio de contado de $45.000, el resto se abona en dos pagos mensuales de $13.492,95 c/u. En estas condiciones determinar:

10.1 La tasa efectiva vencida utilizada en la operación de compra de la máquina.

10.2 En el caso de que la operación de descuento hubiera originado un quebranto de $126, cuál sería el valor de la deuda original.

11. Se depositan $12.000 en una cuenta que capitaliza intereses mensualmente durante 200 días. En su transcurso, se emplearon tres tasas efectivas mensuales del 3 %, 4 % y 5 % respectivamente. El monto reunido al finalizar la operación fue de $16.131. Determinar el plazo al que permaneció colocado el capital a cada tasa bajo el supuesto de que la segunda de ellas permaneció vigente el doble de tiempo que la primera.

12. Se pide un préstamo de $8.400 al 36 % nominal anual capitalizable mensualmente, a devolver en tres pagos a 30, 60 y 90 días. Para ello se firman tres documentos de igual valor actual. Transcurridos 45 de la operación su prestamista le ofrece devolverle los documentos a vencer si le paga en ese momento $5.750. Si la tasa de interés vencida efectiva de mercado en el momento del ofrecimiento es del 4 %, determine: a) el valor de mercado de la deuda en el momento del ofrecimiento, b) cuál de las dos partes se vería beneficiada con la operación y en cuánto.

13. En cancelación de una deuda de $16.700 se firmaron dos documentos a 60 y 85 días de plazo, de manera tal que el valor nominal del segundo es un 10 % mayor que el primero, ambos incluyen intereses al 33 % anual simple vencido. Después de 30 días de recibidos los documentos el deudor abona en efectivo la deuda correspondiente del primer documento y por el segundo decide descontarlo a una tasa simple mensual adelantada del 36 %, operación que generó un beneficio financiero de $95. El remanente fue depositado en una cuenta al 7 % efectivo vencido quincenal con la intención de agotarlo con tres retiros iguales a los cuatro, nueve y doce meses del depósito inicial: determine el importe de cada retiro, cuánto abonó por el primer documento y el valor actual original del 2.^{do}. documento.

14. Se realiza una cierta inversión con el fin de retirar el monto a los 235 días de su depósito. Las tasas que ofrece la entidad financiera Junios SA son las siguientes:

- Para los primeros 110 días 18 % semestral capitalizable semanalmente.
- Para los 95 días restantes 8 % cuatrimestral efectiva vencida.
- Para el resto de la operación 5 % bimestral efectiva adelantada.

Se solicita determinar:

a) la tasa mensual efectiva vencida implícita en toda la operación,

b) la tasa semestral simple adelantada implícita en toda la operación.

15. Se realiza la venta de un rodado cobrando 25 % de contado, se recibe por el resto un documento de $15.000 con vencimiento a los 18 meses, al cual se le cargaron intereses a una tasa mensual efectiva vencida. A los 11 meses de recibido el documento se descuenta en el Banco Rivera SA, y se recibe un importe de $10.400, lo que nos representa $400 de quebranto financiero.
Se solicita determinar:

a) el precio total del rodado al momento de la venta
b) ¿Por cuánto se hubiera firmado el documento si se hubiera optado por una tasa del 22 % cuatrimestral con actualización cada 92 días?

16. Se realiza un depósito de $70.000 con el fin de agotarlo mediante 3 (tres) retiros de igual importe realizados a los 4, 9 y 16 meses respectivamente, contados desde el momento en que se hace efectivo el depósito inicial a una tasa del 8 % cuatrimestral capitalizable bimestralmente.
Determinar:

a) Total de intereses obtenidos hasta un mes después de hacerse efectivo el retiro número 1.

b) Saldo en la cuenta al momento de culminar la operación si se tiene en cuenta que no se realizan los retiros número dos y tres (el retiro número uno se hace efectivo).
c) Determinar el total de intereses al tener en cuenta que se realizaron los retiros de acuerdo a las condiciones pactadas inicialmente.

17. Un comerciante dispone de $10.000 en efectivo por el término de 90 días y resuelve efectuar las siguientes operaciones:

a. El 25 % lo deposita a plazo fijo en un banco que le ofrece una tasa del 8 % anual con capitalización cuatrimestral.

b. El 45 % en una institución que le ofrece una tasa efectiva anual del 10 % para depósitos a 90 días.

c. Con el resto compra un documento que vence a los 90 días cuyo valor nominal es de $3.200.

Utilice año comercial e indique:

a) ¿Cuál es la tasa promedio que produce la inversión?
b) ¿Cuál es la tasa efectiva anual correspondiente?
c) Si se hubiese decidido emplear toda la suma inicial en descontar un documento, ¿a qué tasa nominal anual adelantada debería haberlo hecho para tener el mismo rendimiento?

Capítulo 12

Rentas

RENTAS

Se denomina renta a toda sucesión de pagos o depósitos que permite, o bien constituir un fondo de ahorro hacia el futuro, o bien cancelar una deuda del pasado.

Así como hasta este momento habíamos observado la evolución de un único capital valuado a una cierta tasa en el tiempo (o pocos capitales, como ocurre al descontar dos o tres documentos en alguna institución bancaria), al hablar de rentas consideraremos la administración de muchos capitales equivalentes.
No nos apartamos de los conceptos estudiados en el régimen compuesto, pero consideraremos la posibilidad de trabajar con algunas pocas fórmulas que nos permitan simplificar los cálculos.
Tengamos en cuenta como ejemplo un préstamo bancario que se cancela mediante 60 cuotas, dicha operación financiera, independientemente de sus condiciones particulares, podría desarrollarse a partir de los conceptos ya vistos, no obstante, requeriría de un esfuerzo de cálculos reiterativos realizados en sesenta oportunidades. Es así que, teniendo en cuenta ciertas características que debemos respetar, resulta mucho más simple la aplicación de una fórmula genérica que nos devuelva la incógnita requerida en un solo paso.
Para entender la mecánica de estas operaciones consideremos inicialmente los elementos que componen una renta, distribuidos en dos grupos:

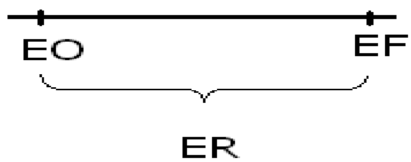
a) Tangibles
   $V_{n]} i$= valor actual de la renta
   $A_{n]} i$=valor final de la renta, imposición o anualidad
   C= cuota
   n= cantidad de términos que componen la renta
   i=i tasa efectiva pactada

b) Ideales

Resultan ser abstractos pero relevantes:

EO= época de origen (de la renta)
EF= época de finalización (de la renta)
ER= época de la renta (sus límites son EO y EF)
EV= época de valuación (momento donde se concentra el cálculo)
Estos elementos resultan imprescindibles a efectos de "interpretar" la renta para proceder a su cálculo y aplicar la formula correcta.

En el siguiente esquema se indica la ubicación de los tres primeros, en tanto que el último elemento señalado (EV) podría ser ubicado en cualquier punto, anterior, posterior o interior a la ER:



Esto tiene su explicación en el hecho de que, tanto la EO como la EF, y en consecuencia, la ER, son fijados arbitrariamente por quien realizara los cálculos financieros que arriben a un resultado válido, y al tener como premisa la exacta ubicación que se le asigne a la EV. Un mismo planteo devolverá una única solución, interpretada aun de modos distintos.

Clasificación de las rentas

Para su mejor comprensión, resulta fundamental conocer cuál es la tipología de renta que se habrá de calcular, para lo cual se desarrolla una clasificación a continuación. Cabe aclarar, asimismo, que una renta contiene más de uno de cada elemento clasificatorio, por lo que esta clasificación identifica con precisión la renta.

A. Temporales o perpetuas: en función de la duración de la renta, serán temporales aquellas de las que tengamos conocimiento cuando finalizan y la cantidad de términos que la componen, siendo perpetuas aquellas cuyo número de términos tiende a infinito.

B. Ciertas o contingentes: en función de la certeza de su existencia, serán ciertas cuando puedan reconocerse previamente, en tanto serían contingentes en la medida en que su ejecución dependa de algún hecho ajeno a sí misma.

C. Sincrónicas o asincrónicas: en función de la tasa pactada, serán sincrónicas cuando la frecuencia de capitalización de la tasa pactada coincida con la frecuencia en que se suceden los pagos o depósitos.

D. Enteras o fraccionadas: en función del modo en que se ejecute su desembolso, siendo enteras cuando dicho pago se realice en un solo acto, y fraccionadas cuando cada cuota se fraccione en partes menores. Cabe aclarar que la distribución de dichos pagos parciales que complementan la cuota deberán mantener la misma frecuencia temporal entre cada uno de ellos, asimismo, sus importes serán iguales entre sí. Es un caso particular de renta asincrónica, pues habrá que calcular la tasa correspondiente a esa subdivisión temporal.

E. Constantes o variables: en función del valor que adopte cada cuota, se considera renta de cuotas constantes cuando cada una de ellas mantiene el mismo valor a lo largo de la renta, y serían variables cuando dichos importes se modifiquen. Tales variaciones, a efectos de poder calcularlas adecuadamente y aplicar un método, deberán obedecer a alguna sucesión matemática conocida, por lo que se reconocen especialmente a las rentas que evolucionan en progresiones aritméticas o geométricas. Obviamente, una sucesión de carácter aleatoria no podría calcularse previamente.

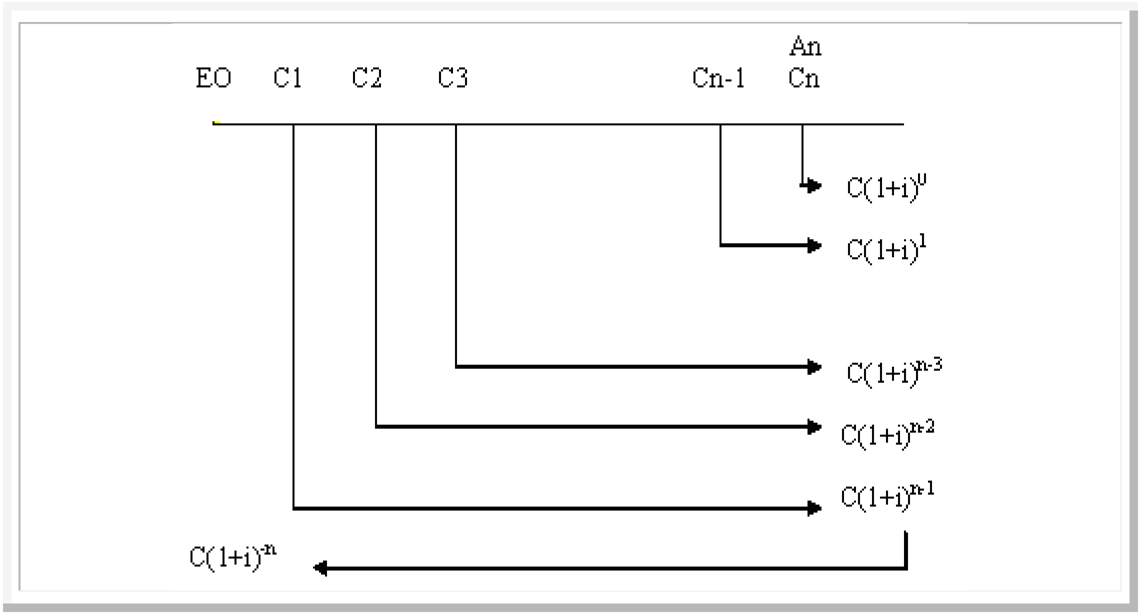
F. Inmediatas, diferidas o anticipadas: en función del momento de valuación, se denominan rentas inmediatas aquellas en que la EV concuerda con la EO, serán diferidas cuando la EV resulte anterior a la EO, por último, se consideran anticipadas cuando la EV es posterior a la EO.

G. De pagos adelantados o de pagos vencidos: en función del momento en que se efectivizan los pagos para cada periodo, serán de pagos adelantados cuando cada pago se realice al comienzo de cada periodo, y siendo de pagos vencidos cuando estos se concreten al finalizar cada periodo.

Desarrollo de la fórmula del valor final de una renta de pagos vencidos

Reconocemos en el siguiente gráfico la sucesión de n pagos que representan las cuotas de la renta, efectuados al término de cada periodo.

Dicha serie se encuentra valuada en un momento en común al finalizar la operación donde será retirado el valor final, ajustadas según una única tasa, efectiva y sincrónica:



De dicha sucesión se establece la siguiente igualdad:

$$A_{n\rangle i} = C + C(1 = i)^1 + ...+ C(1+i)^{n-3} + C(1+i)^{n-2} + C(1+i)^{n-1}$$

Multiplicando a cada término por un factor (1+i) obtenemos:

$$A_{n\rangle i}(1+i) = C(1+i) + C(1+i)^2 + ...+ C(1+i)^{n-2} + C(1+i)^{n-1} + C(1+i)^n$$

Descontando de esta segunda expresión la anterior igualdad, restando término a término, simplificando aquellos términos que resulten iguales, y aplicando propiedad distributiva en A por el factor (1+i), nos queda:

$$\cancel{A}_{n\rangle i} + A_{n\rangle i} \times i - \cancel{A}_{n\rangle i} = C(1+i)^n - C$$

Simplificando A a la izquierda de la igualdad, despejando el segundo término de "i", y operando convenientemente sobre C alcanzamos la fórmula buscada, valor final de una renta de n pagos vencidos:

$$A_{n\rangle i} = C \times \frac{\left[(1+i)^n - 1\right]}{i}$$

Para referirnos al valor final de una renta de pagos adelantados bastará con multiplicar toda la expresión por un factor (1+i), puesto que al adelantarse los pagos todos se encuentran un periodo más alejado de la época de valuación con el consiguiente beneficio adicional en los intereses; para distinguirla de la anterior agregamos un apóstrofe a A:

$$A'_{n\rangle i} = C \times \frac{\left[(1+i)^n - 1\right]}{i} \times (1+i)$$

Cálculo de intereses para el valor final:

$$(TI) = A_{n\rangle i} - n \times C$$

Ejemplo:

- Se contrata una renta donde serán depositados, al término de cada mes, doce pagos de $3.000 cada uno. Si la tasa propuesta se fijó en el 24 % anual, calcular el importe que se hará disponible para el inversor cuatro meses después de abonado el último de ellos.

SOLUCIÓN:

Comenzamos por resolver la tasa que resulte sincrónica con la frecuencia de los pagos:

$$1{,}24^{\frac{1}{12}} - 1 = i_{mensual}$$
$$i_{mensual} = 0{,}018088$$

Luego, operamos a partir de la fórmula del valor final:

$$A_{n>i} = \frac{3000}{0{,}018088} \times \left(1{,}018088^{12} - 1\right) \times 1{,}24^{\frac{4}{12}}$$
$$A_{n>i} = \$42.764{,}41$$

Casos especiales de valuación de rentas anticipadas

Recordemos que en este grupo clasificatorio se encuentran todas aquellas rentas cuya época de valuación resulta posterior al origen. Por lo tanto, quedarán comprendidas las imposiciones o anualidades, tanto sean consideradas de pagos vencidos o de pagos adelantados, durante el desarrollo de la serie, al finalizar esta o con posterioridad a este momento.
Dado que la fórmula que nos permite calcular su valor está preparada para agrupar una serie de cuotas iguales y valuadas a una misma tasa de interés, en la medida en que se pacten operaciones con distintas cuotas o más de una tasa de interés, deberemos agruparlas en forma homogénea de modo tal que frente a cambios de esta naturaleza, serán considerados distintos términos que luego, en conjunto, resolverán el problema en particular.

Dos situaciones particulares se reconocen, a saber:

a) Valor final de una renta pactada en cuotas que varían sus importes en el transcurso.

b) Valor final de una renta pactada a distintas tasas de interés.

Ejemplos:

- Se pacta realizar ocho depósitos mensuales, los primeros cuatro de $300 cada uno, y los restantes de $500 cada uno. Será retirado el total acumulado al momento de efectuarse el último depósito. Tasa de la operación: 0,03 efva. mensual.

SOLUCIÓN:

Como es habitual a este tipo de operaciones, nos encontramos con distintos caminos para llegar a un mismo resultado, aquí veremos dos opciones considerando que operamos con rentas de pagos vencidos (cosa que no es excluyente), la primera opción sería agrupar cuotas iguales donde la expresión quedaría representada de la siguiente forma:

$$A_{n\rangle i} = \frac{300}{0,03}\left[(1+0,03)^4 - 1\right] \times (1+0,03)^4 + \frac{500}{0,03} \times \left[(1+0,03)^4 - 1\right]$$

$$A_{n\rangle i} = 1412,61 + 2091,81$$

$$A_{n\rangle i} = 3504,43$$

Observando el primer término de la ecuación, podemos notar que la serie de las primeras cuatro cuotas, valuadas como serie de pagos vencidos, se capitalizan cuatro periodos mensuales para hacer coincidir la fecha de valuación con la última de las cuatro cuotas de la segunda serie.

La segunda posibilidad de resolución consistiría en tomar las ocho cuotas de $300 en forma consecutiva e incorporarle una serie "superpuesta" de cuatro cuotas finales de $200 (que completarían los depósitos realmente pactados):

$$A_{n\rangle i} = \frac{300}{0{,}03}\left[(1+0{,}03)^{8} - 1\right] + \frac{200}{0{,}03} \times \left[(1+0{,}03)^{4} - 1\right]$$

$$A_{n\rangle i} = 2667{,}70 + 836{,}73$$

$$A_{n\rangle i} = 3504{,}43$$

Con esta alternativa de solución, el primer término se desprende de la capitalización adicional, puesto que la serie así interpretada, concluye al mismo tiempo que la serie de cuatro cuotas de $200.

- Se pacta realizar siete depósitos mensuales de $600 cada uno. Será retirado el total acumulado 30 días después de efectuado el último depósito. Tasas de la operación: 0,04 efva. mensual, vigente hasta ocho días después de practicado el depósito de la cuota tres, con posterioridad se pactó utilizar la tasa del 0,05 mensual.

SOLUCIÓN:

Para resolver este problema, debemos tratar de agrupar la mayor cantidad de cuotas contenidas por una misma tasa:

$$A_{n\rangle i} = \frac{600}{0{,}04}\left[(1+0{,}04)^{3} - 1\right](1+0{,}04)^{\frac{8}{30}} \times (1+0{,}05)^{\frac{142}{30}} + \frac{600}{0{,}05}\left[(1+0{,}05)^{4} - 1\right](1+0{,}05)$$

$$A_{n\rangle i} = 2384{,}33 + 2715{,}38$$

$$A_{n\rangle i} = 5099{,}71$$

Observamos que el primer término incluye las tres primeras cuotas, valuadas al 4 %, para continuar valuando la renta ocho días adicionales a la misma tasa, y 142 días al 5 % para concluir esta serie, en tanto que la segunda serie contenida en el segundo término abarca las últimas cuatro cuotas, todas valuadas al 5 % como una renta de pagos adelantados.

Cálculo de las cuotas

- Se desea conformar un fondo de ahorros de $7.000 que será valuado al 2,5 % mensual mediante el depósito de siete cuotas mensuales iguales y consecutivas, y se retirará lo producido tres meses después de realizado el último depósito.

SOLUCIÓN:

Despejamos la variable cuota de la fórmula correspondiente, teniendo en cuenta que el retiro se realiza tres meses después de finalizada la serie:

$$C = \frac{7000 \times 0{,}025}{\left[(1+0{,}025)^7 - 1\right]} \times (1+0{,}025)^{-3}$$

$$C = 861{,}25$$

- Calcular a cuántas cuotas se pactó una renta por la cual se realizaron depósitos mensuales de $836,88 valuados al 1,5 % mensual, si el objetivo es alcanzar $8.000 junto con el último de los depósitos.

SOLUCIÓN:

La variable a despejar será la cantidad de pagos:

$$1-\frac{8000\times 0{,}015}{836{,}88}=(1+0{,}015)^{n}$$

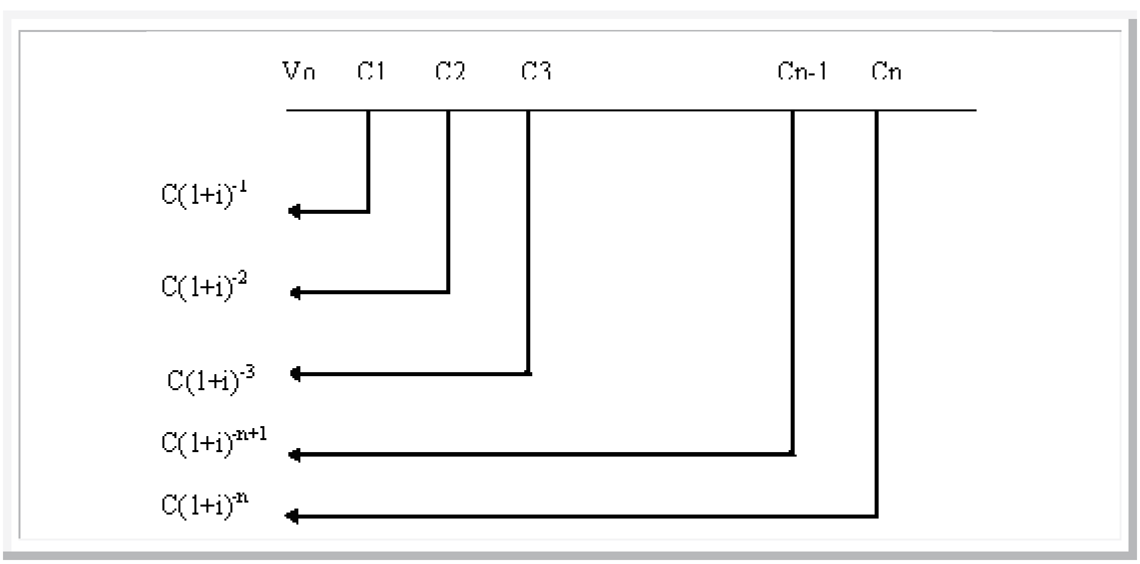
$$\ln 1{,}143389733 = n \times \ln 1{,}015$$

$$n=\frac{0{,}1339973}{0{,}014888612}$$

$$n = 9.cuotas$$

<u>Desarrollo de la fórmula del valor actual de una renta inmediata y de pagos vencidos</u>

Reconocemos en el siguiente gráfico la sucesión de n pagos que representan las cuotas de la renta, efectuados al término de cada periodo. Dicha serie se encuentra valuada en un momento en común al inicio de la operación donde se entregara el valor actual, ajustadas según una única tasa, efectiva y sincrónica:



De dicha sucesión se establece la siguiente igualdad:

$$V_{n\rangle i} = C(1=i)^{-1} + C(1+i)^{-2} + C(1+i)^{-3} + ...+ C(1+i)^{-n+1} + C(1+i)^{-n}$$

Multiplicando a cada término por un factor (1+i), obtenemos:

$$V_{n\rangle i}(1+i) = C + C(1=i)^{-1} + C(1+i)^{-2} + ...+ C(1+i)^{-n+2} + C(1+i)^{-n+1}$$

Descontando de esta segunda expresión la anterior igualdad, restando término a término y simplificando aquellos términos que resulten iguales, y aplicando propiedad distributiva en V por el factor (1+i), nos queda:

$$\cancel{V}_{n\rangle i} + V_{n\rangle i} \times i - \cancel{V}_{n\rangle i} = C - C(1+i)^{-n}$$

Simplificando V a la izquierda de la igualdad, al despejar el segundo término de "i", y al operar convenientemente sobre C alcanzamos la fórmula buscada, valor actual de una renta de n pagos vencidos:

$$\boxed{V_{n\rangle i} = C \times \frac{\left[1-\left(1+i\right)^{-n}\right]}{i}}$$

Para referirnos al valor actual de una renta de pagos adelantados bastará con multiplicar toda la expresión por un factor (1+i), puesto que al adelantarse los pagos, todos se encuentran un periodo más próximos a la época de valuación, para distinguirla de la anterior agregamos un apóstrofe a V:

$$\boxed{V'_{n\rangle i} = C \times \frac{\left\lfloor 1-(1+i)^{-n} \right\rfloor}{i} \times (1+i)}$$

Cálculo del total de intereses para el valor actual:

$$(TI) = n \times C - V_{n\rangle i}$$

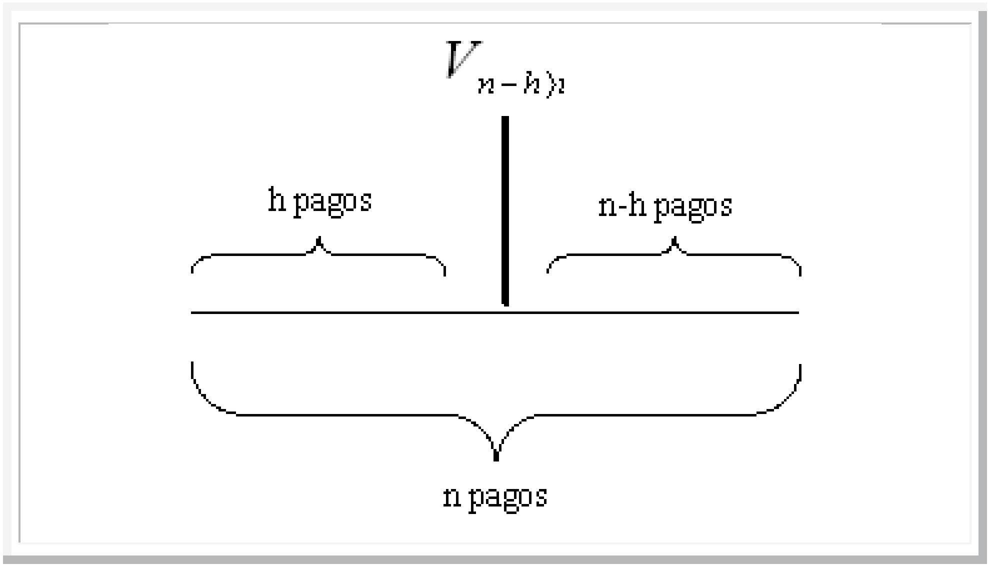
<u>Saldo de deuda</u>

La necesidad de cancelaciones anticipadas por distintas razones resulta ser práctica habitual en las operaciones financieras que manejan rentas. Tanto sea por modificaciones en el valor de las tasas originales durante el transcurso de una operación, lo que implica reformular el valor de las cuotas posteriores, como el deseo del deudor de finalizar una deuda, este concepto resulta ser imprescindible.

Se define de la siguiente forma:

Dada una renta compuesta de n pagos, y habiéndose cancelado h pagos de la serie, se denomina saldo de deuda (o de renta) al valor actual de las "n-h" cuotas aún impagas.

Gráficamente:



La fórmula quedará desarrollada de la siguiente forma:

$$V_{n-h\rangle i} = \frac{C}{i} \times \left[1 - (1+i)^{-(n-h)}\right]$$

Ejemplo:

- Se contrata una deuda de $4.000 a cancelarse en 36 pagos mensuales y vencidos, y se valúa la operación al 3,2 % mensual, una vez abonada la cuota n.º 19 el deudor solicita la cancelación anticipada al acreedor. ¿Qué suma habrá de entregar adicionalmente para cumplir con su obligación?

SOLUCIÓN:

En primer lugar, debemos calcular el valor de las cuotas de la renta:

$$C = \frac{4000 \times 0,032}{\left[1-(1+0,032)^{-36}\right]}$$
$$C = 188,72$$

Una vez hallada la cuota de la operación, la consideramos dato para el cálculo del saldo de deuda:

$$V_{36-19\rangle i} = \frac{188,72}{0,032} \times \left[1-(1+0,032)^{-36+19}\right]$$
$$V_{17} = 2445,21.-$$

- Se contrata una renta por \$100.000 para ser cancelada en 48 cuotas mensuales y vencidas, y se valúa la operación al 1,7 % mensual. El día de vencimiento de la cuota n.º 26, el deudor solicita que se le informe la suma total adeudada, a efectos de cancelar la deuda. ¿Cuánto dinero deberá disponer para esa acción?

SOLUCIÓN:

Nuevamente, corresponde calcular la cuota de la sucesión de pagos:

$$C = \frac{100000 \times 0,017}{\left[1-(1+0,017)^{-48}\right]}$$

$$C = 3064,39$$

Luego, procederemos a calcular el saldo de deuda que, en este caso, podrá ser interpretado de dos formas con idéntico resultado:

a) Calcular el saldo de deuda de las 23 cuotas pendientes al momento del vencimiento de la cuota 26, incluyéndola en una renta de pagos adelantados:

$$V'_{48-25\rangle i} = \frac{3064,39}{0,017} \times \left[1-(1+0,017)^{-48+25}\right] \times (1+0,017)$$

$$V_{17} = 58.918,68.-$$

b) Calcular el saldo de 22 cuotas vencidas e incorporarle el importe de la cuota 26 que vence ese mismo día:

$$V_{48-26\rangle i} = \frac{3064,39}{0,017} \times \left[1-(1+0,017)^{-48+26}\right] + 3064,39$$

$$V_{17} = 58.918,68.-$$

Con ambas interpretaciones se arriba al mismo resultado.

Otro enfoque que permite calcular el saldo de deuda:

A la fórmula de la sumatoria de una serie geométrica podemos utilizarla para otras aplicaciones en rentas, para un nuevo “paradigma” a partir de una nueva deducción del concepto del saldo de deuda.

Considerando que el desarrollo del progreso de la amortización de la deuda en dicho sistema no es lineal, sino que representa una progresión geométrica en sí misma *-de razón* $(1+i)$ - podemos identificar el saldo de deuda en cualquier estado de su evolución:

$$SD = V_0 - t_1 \times \frac{1-(1+i)^h}{1-(1+i)}$$

Siendo que el segundo término que descontamos, corresponde a dicha progresión (cuyo primer elemento es precisamente t_1 o primera amortización practicada en la serie) y constituye desde el punto de vista financiero el total amortizado hasta el periodo “h”, quedando ordenada finalmente de la siguiente forma:

$$SD = V_0 + \frac{t_1}{i} \times \left[1-(1+i)^h\right]$$

Si deseamos profundizar aún más este desarrollo del saldo de deuda, podríamos llegar a calcular dicho concepto sin necesidad de contar con el valor de la cuota de servicio a partir del siguiente razonamiento:

Siendo

$$t_1 = C - V_0 \times i \qquad \text{y} \qquad C = \frac{V_0 \times i}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$\therefore \qquad t_1 = V_0 \times i \times \left[\frac{1}{1-(1+i)^{-n}} - 1\right]$$

Sabemos además que:

$$Total.Amortizado.hasta"h" = \frac{t_1}{i} \times \left[1-(1+i)^h\right]$$

Reemplazamos en t_1

$$Total.Amortizadohasta"h" = \frac{V_0 \times i}{i} \times \left[\frac{1}{1-(1+i)^{-n}} - 1\right] \times \left[1-(1+i)^h\right]$$

Conocemos que:

$$Saldode.Deuda = V_0 - Total.Amortizadohasta"h"$$

Por ello:

$$Saldode.Deuda = V_0 - V_0 \times \left[\frac{1}{1-(1+i)^{-n}}\right] \times \left[1-(1+i)^h\right]$$

$$Saldode.Deuda = V_0 \times \left\{1 - \left[\frac{1}{1-(1+i)^{-n}} - 1\right] \times \left[1-(1+i)^h\right]\right\}$$

$$Saldode.Deuda = V_0 \times \left\{\cancel{1} - \frac{1-(1+i)^h}{1-(1+i)^{-n}} + (1+i)^h - \cancel{1}\right\}$$

Finalmente, ordenando:

$$Saldode.Deuda = V_0 \left\{(1+i)^h + \frac{1-(1+i)^h}{1-(1+i)^{-n}}\right\}$$

$$Saldode.Deuda = V_0 \times \frac{\left[1-(1+i)^{-n}\right] \times (1+i)^h + 1 - (1+i)^h}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$Saldode.Deuda = V_0 \times \frac{(1+i)^h - (1+i)^{-n+h} + 1 - (1+i)^h}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$\boxed{Saldo\,de\,Deuda = V_0 \frac{1-(1+i)^{-n+h}}{1-(1+i)^{-n}}}$$

Ejemplo

- Calcular qué suma originó su devolución en una serie de siete depósitos mensuales, iguales y vencidos, valuados al 3 % efectivo mensual, al conocer que luego de canceladas las cuatro primeras cuotas de la renta el saldo de deuda ascendía a $1.816,04.

SOLUCIÓN:

Aplicando esta fórmula no necesitamos reconocer primero el importe de las cuotas, despejamos solo la variable necesaria:

$$V_0 = \frac{1816{,}04 \times \left[1-(1+0{,}03)^{-7}\right]}{1-(1+0{,}03)^{-7+4}}$$

$$V_0 = \$4000.-$$

CÁLCULO DE LA TASA POR FÓRMULA DE BAILY

Una última consideración se presenta al momento de reconocer cuál es la tasa que se aplicó a una determinada operación, para lo cual existen distintos métodos que nos aproximan al valor de la tasa desconocida a partir de la utilización de distintas fórmulas. En el presente desarrollo, observaremos la aplicación de una de ellas, denominada fórmula de **Baily.**

Donde primero debemos establecer un valor denominado "h", siendo:

$$h = \left(\frac{C \times n}{V} \right)^{\frac{2}{n+1}} - 1$$

Una vez obtenido este valor, lo reemplazamos en la siguiente igualdad para obtener definitivamente la tasa:

$$i = \frac{12 \times (n+1) - \left(n^2 - 1\right) \times h}{12 \times (n+1) - 2 \times \left(n^2 - 1\right) \times h} \times h$$

NOTA: estas expresiones resultan válidas para aplicarse a deudas por sistema francés, en donde la primera cuota se cancela en forma vencida, sin diferimientos (renta inmediata).

Ejemplo:

Resolver el ejercicio siguiente, averiguar la tasa mensual aplicada al conocer los restantes elementos:

Vo=$179,00

n=12

C= $19,53

i=?

$$h=\left(\frac{19.53\times 12}{179}\right)^{\frac{2}{12+1}}-1$$

h= 0,042329

$$i=\frac{12\times(12+1)-\left(12^{2}-1\right)\times 0.042329}{12\times(12+1)-2\times\left(12^{2}-1\right)\times 0.042329}\times 0.042329$$

Rta=i=0.044m (esta tasa incluye el IVA sobre intereses de bienes muebles financiados en el mercado argentino como parte del costo de financiación, por lo que la tasa neta efectiva realmente pactada resultó un 21 % menor): $\frac{0.044}{1.21}$

Rta. => **i=0,0364**

Aplicación de la fórmula de Baily para rentas no inmediatas

Para soluciones de rentas diferidas, anticipadas y valor final o imposiciones incorporamos un elemento denominado "m" que corresponde a la medida temporal (en cantidad de periodos) de diferimiento o anticipación con respecto al origen de la renta, utilizando la tabla indicada a continuación, según sea el tipo de renta de que se trate:

Valoración de "m"		
Tipo de renta	**Vencida**	**Adelantada**
Inmediata	*0*	*-1*
Diferida	*m*	*m-1*
Anticipada	*-m*	*-m-1*
V. final o imposición	*-n*	*-n-1*

Para considerar el valor de “h” incorporamos “m” a la fórmula según el tipo particular de renta, de acuerdo con la tabla precedente:

$$h = \left(\frac{C \times n}{V} \right)^{\frac{2}{2m+n+1}} - 1$$

Posteriormente, hacemos lo propio con la fórmula final:

$$i = \frac{12 \times (2m+n+1) - \left(n^2 - 1\right) \times h}{12 \times (2m+n+1) - 2 \times \left(n^2 - 1\right) \times h} \times h$$

Cabe aclarar que, para una renta inmediata y de pagos vencidos, basta con sustituir el valor de “m” por cero, tal como lo indicado en el ejemplo anterior.

Imagen de un folleto de compras de la tienda Walmart

RENTAS PERPETUAS

La aplicación de las rentas perpetuas se halla ampliamente difundida en tanto corresponde a un valor actual, cuya serie de cuotas equivalentes tienden a infinito.

Partiendo de la formula del valor actual de una renta temporaria de pagos vencidos oportunamente desarrollada, aplicamos el concepto de límite para n tendiendo a infinito, de donde:

$$V_{n\to\infty\rangle i} = \frac{C}{i}\left[1-(1+i)^{-n}\right]$$

operando sobre el límite:

$$V_{\infty\rangle i} = \frac{C}{i}\left[1-(1+i)^{-\infty}\right]$$

$$V_{\infty\rangle i} = \frac{C}{i}\left[1-\frac{1}{(1+i)^{\infty}}\right]$$

$$V_{\infty\rangle i} = \frac{C}{i}\left[1-\frac{1}{\infty}\right]$$

$$V_{\infty\rangle i} = \frac{C}{i}\left[1-0\right]$$

finalmente, la expresión que permite calcular la renta perpetua de pagos vencidos es:

$$V_{\infty\rangle i} = \frac{C}{i}$$

Si despejamos C de la fórmula, podemos ver cómo se conforma la cuota de esta particular renta:

$$C_{\infty} = V_{\infty\rangle i} \times i$$

Esto resulta razonable, dado que para garantizar la existencia a perpetuidad de dicha renta solo podrán otorgarse como cuota los intereses del valor actual, puesto que si este comenzara a amortizarse terminaría por extinguirse en algún momento conocido, transformándose en renta temporal.

Para conocer el valor actual de la renta perpetua de pagos adelantados bastará incorporar a la expresión inicial el factor de capitalización (1+i):

$$V'_{\infty\rangle i} = \frac{C}{i} \times (1+i)$$

Ejemplo

- ¿Qué suma podrá otorgarse mensualmente a perpetuidad si se cuenta con un capital de $100.000 y la operación se valúa al 36 % anual?

SOLUCIÓN:

Previamente, se deberá realizar la equivalencia de tasas, puesto que se trata de una operación asincrónica:

$$(1+0{,}36)^{\frac{1}{12}} = (1+i_m)^{\frac{1}{1}}$$

$$i_m = \sqrt[12]{1{,}36} - 1$$

$$i_m = 0{,}0259548$$

aplicando la fórmula:

$$C_\infty = 100.000 \times 0{,}0259548$$

$$C_\infty = 2595{,}48$$

RENTAS VARIABLES EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA

En este caso, abordaremos al subgrupo de rentas correspondiente al conjunto de capitales cuyas cuantías varían periodo tras periodo, y obedecen a la ley de las sucesiones aritméticas, es decir, donde cada término resulta ser el anterior incrementado (o disminuido) en una misma cantidad denominada "razón de la progresión" que refleja un valor monetario que denominaremos "d".

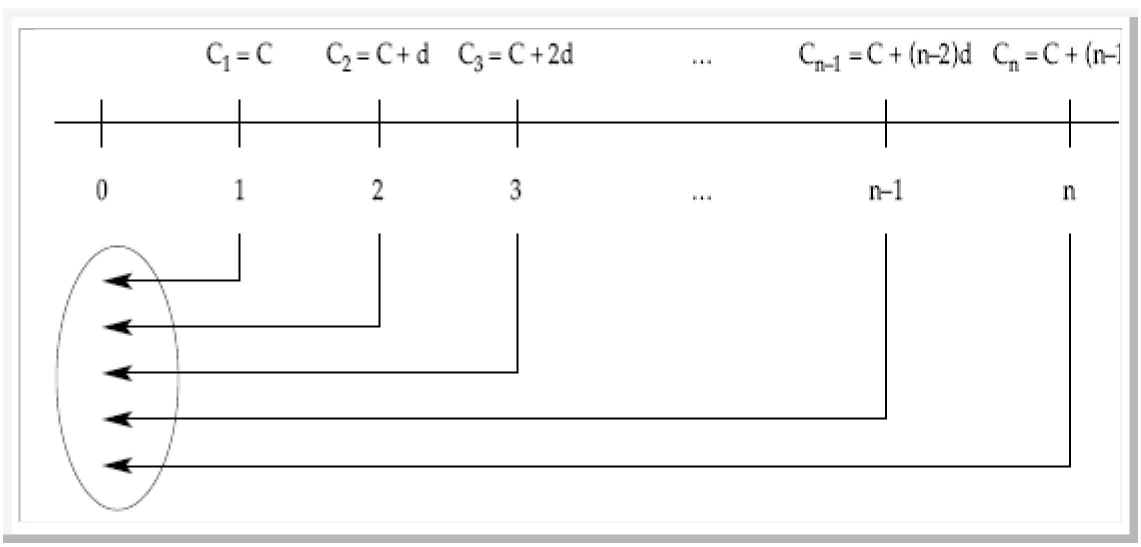
Para reconocer cualquier término resulta necesario contar con los valores de C1 y dicha razón "d".

RENTA VARIABLE EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA, TEMPORAL, DE PAGOS VENCIDOS, INMEDIATA Y ENTERA

Se trata de aquella renta variable en progresión aritmética, temporal (tiene un número determinado de capitales), de pagos vencidos o "pospagable" (los términos vencen al final del periodo), inmediata (valuamos la renta en su origen y su final), entera (cada pago se efectúa en un único momento para cada periodo) y sincrónica (tanto los términos como la tasa están en la misma unidad de tiempo).

Cálculo del valor actual

La representación gráfica de la renta anteriormente citada es la siguiente:



Aplicando la definición de valor actual y actualizando los términos uno a uno hasta su época de valuación, descontada en régimen compuesto valuando a la tasa i, se obtiene el valor actual, que se nota con la siguiente terminología V(c;

d)n/i, expresión que además de recoger la información de la renta, recoge la información de la progresión (c; d):

$$v_{(c,d)n>i} = \frac{C}{1+i} + \frac{C+d}{(1+i)^2} + \frac{C+2d}{(1+i)^3} + ...+ \frac{C+(n-2)d}{(1+i)^{n-1}} + \frac{C+(n-1)d}{(1+i)^n}$$

de donde finalmente se puede obtener la siguiente expresión:

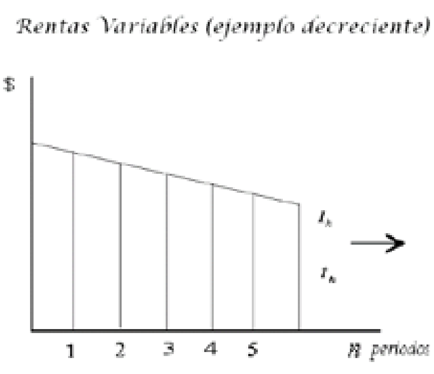
$$V_{(c,d)n>i} = \left(C_1 + \frac{d}{i}\right) \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{n \times d \times (1+i)^{-n}}{i}$$

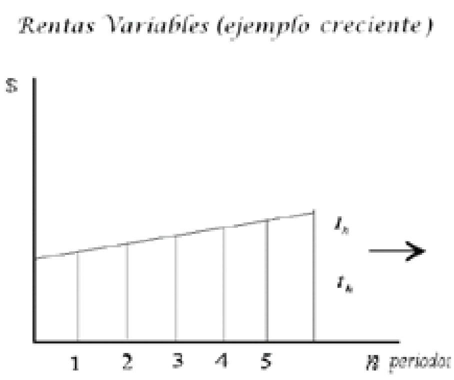
Pudiéndose resumir en esta otra fórmula de cálculo:

$$V_{(c,d)n>i} = \left(C_1 + \frac{d}{i} + n \times d\right) \times v_{n>i} - \frac{n \times d}{i}$$

Cálculo del total de intereses

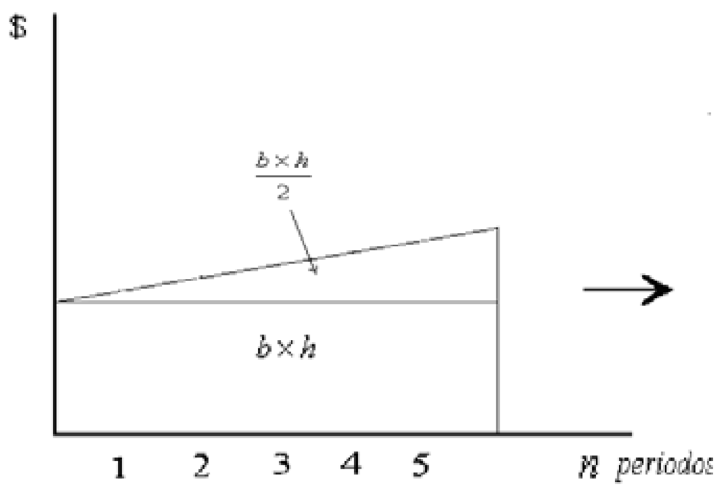
Aquí podemos recordar la figura de la representación gráfica de la renta variable en progresión aritmética (crece o decrece en forma constante):





Observamos que en ambos casos se presentan dos figuras conocidas y adyacentes (un triángulo y un rectángulo), recordemos las fórmulas que permiten reconocer sus respectivas superficies, tomando como ejemplo la representación creciente será:

Rentas Variables (ejemplo creciente)



Interpretamos que la altura del rectángulo obedece al valor de C_1, la altura del triángulo adyacente, la diferencia entre C_n y C_1, y la base estará dada por la cantidad de cuotas o términos de la renta, por lo tanto, el total de desembolsos para cualquier renta en progresión variable aritmética resultará:

$$Total\ de\ Desembolsos = C_1 \times n + \frac{(C_n - C_1)}{2} \times n$$

$$Total\ de\ Desembolsos = n \times \left[C_1 + \frac{(C_n - C_1)}{2} \right]$$

Siendo por lo tanto el total de intereses:

$$Total.de.Intereses = n \times \left[C_1 + \frac{(C_n - C_1)}{2} \right] - V_0$$

Ejemplo:

Conocido que \$100 resultó ser la primera cuota de una renta variable en progresión aritmética de cuatro términos con una razón de \$10 y valuada al 5 % efvo. periódico, calcular el total de intereses y su valor actual, y confeccionar el cuadro de marcha para su comprobación:

Calculamos el valor actual aplicando la correspondiente fórmula:

$$V_{(c,d)n>i} = \left(C_1 + \frac{d}{i} + n \times d \right) \times v_{n>i} - \frac{n \times d}{i}$$

$$V_{(c,d)n>i} = \left(100 + \frac{10}{0,05} + 4 \times 10 \right) \times \frac{1 - (1 + 0,05)^{-4}}{0,05} - \frac{4 \times 10}{0,05}$$

$$V_{(c,d)n>i} = \$405,62$$

Calculamos el total de desembolsos:

$$Total.de\ Desembolsos = n \times \left[C_1 + \frac{(C_n - C_1)}{2} \right]$$

$$Total.de\ Desembolsos = 4 \times \left[100 + \frac{(130 - 100)}{2} \right]$$

$$Total.de\ Desembolsos = \$460$$

Por lo tanto, el total de intereses asciende a:

$$Total.de.Intereses = 460 - 405{,}62$$

$$Total.de.Intereses = \$54{,}38$$

Comprobación a través del cuadro de marcha:

n	Vn/i	Ch	th	Ih
0	405,62			
1	325,90	100,00	79,72	20,28
2	232,20	110,00	93,70	16,30
3	123,81	120,00	108,39	11,61
4	0,00	130,00	123,81	6,19
		460,00	405,62	**54,38**

Cálculo del valor final

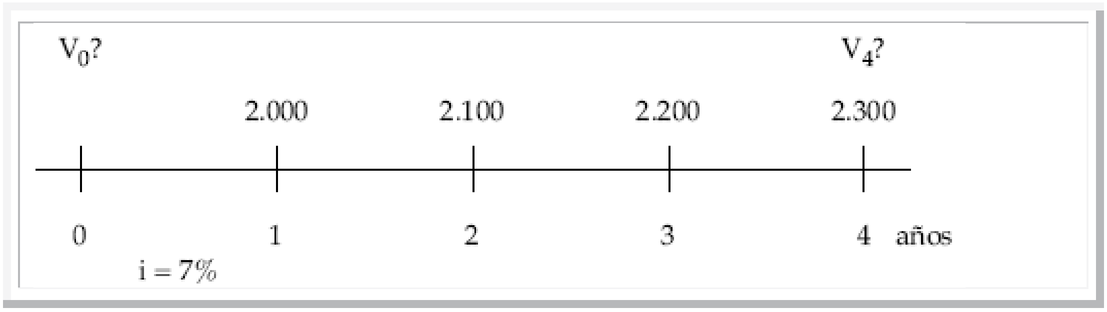
A partir del valor actual se podrá proyectar hacia cualquier otro momento de valuación, al utilizar la relación que existe entre los diferentes valores financieros en el tiempo:

Valor final:

$$A_{(c,d)n>i} = V_{(c,d)n>i} \times (1+i)^n$$

Ejemplo:

Hallar el valor actual y final de una corriente de gastos anuales vencidos de un negocio que el primer año van a ser de $2.000 y se espera que aumenten $100 cada año, se supone una tasa del 7 % y para un horizonte temporal de cuatro años.



• Valor actual:

$$V_{(2000,100)4>0,07} = \left(2000 + \frac{100}{0,07} + 4 \times 100\right) \times \frac{1-1,07^{-4}}{0,07} - \frac{4 \times 100}{0,07} = 7253,89$$

• Valor final:

$$A_{(2000,100)4>0,07} = V_{(2000,100)4>0,07} \times 1,07^{4} = 9508,38$$

Cálculo del total de intereses para una renta variable en progresión geométrica

Recordamos la expresión que permite reconocer la sumatoria de términos de una serie en progresión geométrica, siendo:

$$S_n = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

Y reconociendo que del reemplazo de las variables descriptas en la simbología financiera las distinguimos como:

$a_1 = C_1$ (cuota de orden 1)

$q =$ razón geométrica de la progresión

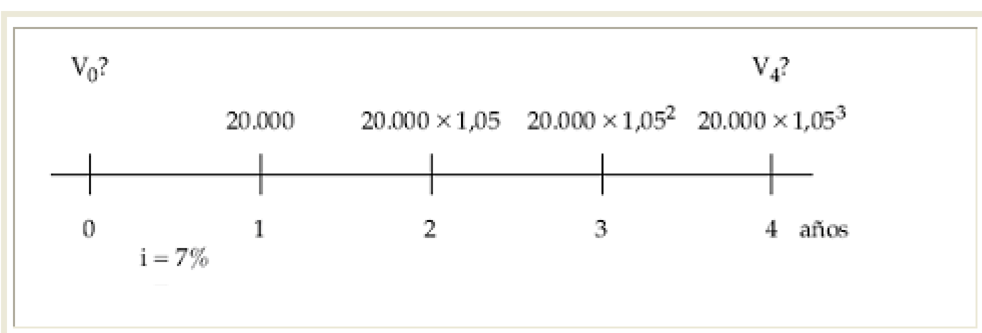
$S_n =$ sumatoria del total de reembolsos de la renta

Finalmente, el total de intereses para una renta en progresión geométrica será:

$$TI_{geometrica} = C_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} - V_0$$

Ejemplo:

Hallar el valor actual de una progresión geométrica de pagos anuales y vencidos cuya primera cuota de servicio es de $20.000 y se espera que crezca un 5 % anual de forma acumulativa para un horizonte temporal de cuatro años, suponiendo una tasa de interés del 7 %. Calcular el total de intereses en forma analítica.



Valuando al 7 %:

$$V_{(20000;1,05)4>0,07} = 20000 \times \frac{1-1,05^4 \times (1+0,07)^{-4}}{1+0,07-1,05} = \$72.696,10$$

Aplicando la fórmula del total de intereses:

$$TI_{geometrica} = C_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} - V_0$$

$$TI_{geometrica} = 20000 \times \frac{1-1,05^4}{1-1,05} - 72696,10$$

$$TI_{geometrica} = \$13506,40$$

Comprobación a través del cuadro de marcha:

n	Vn/i	Ch	th	Ih
0	72696,10			
1	57784,83	20000,00	14911,27	5088,73
2	40829,76	21000,00	16955,06	4044,94
3	21637,85	22050,00	19191,92	2858,08
4	0,00	23152,50	21637,85	1514,65
		86202,50	72696,10	**13506,40**

Nota: en las rentas variables en progresión geométrica decreciente la razón resultará ser un número menor a la unidad, como podemos observar en la siguiente serie compuesta de cuatro términos:

1000, 800, 640, 512

La razón aquí utilizada es 0,8 siendo que:

$$Total.de.Desembolso = 1000 \times \frac{1-0,8^4}{1-0,8}$$

$$Total.de.Desembolsos = \$2952$$

RENTAS VARIABLES DE PAGOS ADELANTADOS

En este caso, basta con multiplicar por (1 + i) el valor actual o final (según corresponda) de la renta de pagos adelantados:

$$V_{(c,d)n>i} = V_{(c,d)n>i} \times (1+i)$$
$$A_{(c,d)n>i} = A_{(c,d)n>i} \times (1+i)$$

RENTAS PERPETUAS

El cálculo de la renta en progresión aritmética perpetua se realiza, como para cualquier renta perpetua, a través del límite cuando la cantidad de términos (n) tiende a infinito:

$$V_{(c,d)n>i} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(c+\frac{d}{i}\right)\times v_{n>i} - \frac{nd(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$V_{(c,d)n>i} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(c+\frac{d}{i}\right)\times v_{n>i} - \lim_{n\to\infty}\frac{nd(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

resultando finalmente:

$$V_{(c,d)\infty>i} = \left(c + \frac{d}{i}\right) \times \frac{1}{i}$$

Nota: en caso de tratarse de una variabilidad decreciente bastará con invertir el signo positivo de la razón (d) para reflejar dicha disminución.

RENTAS VARIABLES EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

En este caso, abordaremos al subgrupo de rentas correspondiente al conjunto de capitales cuyas cuantías varían periodo tras periodo obedeciendo a la ley de las sucesiones geométricas, es decir, donde cada término resulta ser el anterior multiplicado por un mismo número denominado "razón de la progresión geométrica", que denominaremos "q".

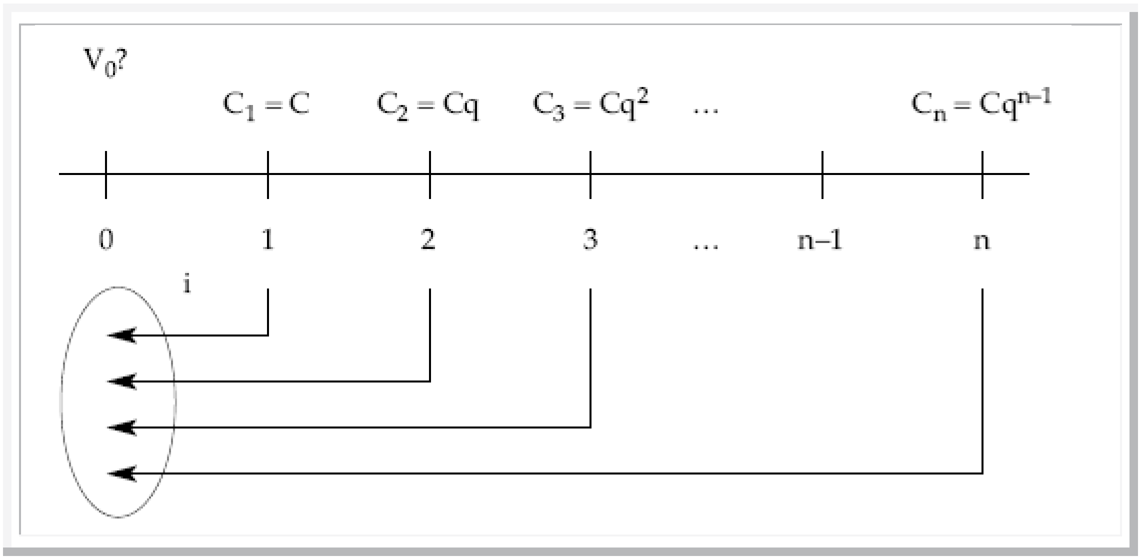
Para calcular cualquier término basta con conocer, por tanto, el primero de ellos (c) y la razón de la progresión (q).

RENTA VARIABLE EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA, TEMPORAL, DE PAGOS VENCIDOS, INMEDIATA Y ENTERA

Vamos a estudiar una renta variable (términos que siguen una progresión geométrica), temporal (tiene un número determinado de capitales), de pagos vencidos o "pospagable" (los términos vencen al final del periodo), inmediata (valuaremos la renta en su origen) y entera, y sincrónica (tanto los términos como la tasa están expresados en la misma unidad de tiempo). Calculándose en régimen compuesto.

Cálculo del valor actual

La representación gráfica de la renta anteriormente citada es la siguiente:



Se trata de valuar en el origen todos los términos que componen la renta. Para ello, los actualizaremos uno a uno descontando en régimen compuesto a la tasa que fuera valuada la renta (i), desde donde está cada capital hasta el origen, obteniéndose el valor actual que se nota con la siguiente terminología: V(c;q)n/i, expresión que recoge la información de la renta (n términos, valuados a la tasa i) y también datos de la progresión que siguen los capitales: primer término (C) y razón de la progresión (q):

$$V_{c,q)n>i} = \frac{C}{1+i} + \frac{Cq}{(1+i)^2} + \frac{Cq^2}{(1+i)^2} + ... + \frac{Cq^{n-2}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{Cq^{n-1}}{(1+i)^n}$$

Sacando factor común:

$$\frac{C}{(1+i)}$$

se obtiene:

$$V_{(c,q)n>i} = \frac{C}{1+i} \times \left[1 + \frac{q}{1+i} + \frac{q^2}{(1+i)^2} + ... + \frac{q^{n-1}}{(1+i)^{n-1}} \right]$$

donde el corchete es la suma de n términos en progresión geométrica creciente de razón:

$$r = \frac{q}{1+i}$$

Aplicando la expresión que suma términos para esta ley:

$$S = \frac{a_1 - a_n \times r}{1-r}$$

siendo a_1 el primer término de la progresión, a_n el último término y r la razón.

Aplicando dicha fórmula a los términos actualizados de la renta, el valor actual de la renta queda de la siguiente forma:

$$V_{(c,q)n>i} = \frac{C}{1+i} \times \left[\frac{1 - \frac{q^{n-1}}{(1+i)^{n-1}} \times \frac{q}{1+i}}{1 - \frac{q}{1+i}} \right]$$

$$V_{(c,q)n>i} = \frac{C}{1+i} \times \frac{1 - \frac{q^{n}}{(1+i)^{n}}}{\frac{1+i-q}{1+i}}$$

de donde finalmente se puede obtener:

$$V_{(c,q)n>i} = C \times \frac{1 - q^{n} \times (1+i)^{-n}}{1+i-q}$$

expresión que solamente se podrá utilizar cuando q ≠ 1 + i.

Cuando se cumple: q = 1 + i, la expresión del valor actual quedará de la siguiente forma:

$$V_{(c,q)n>i} = \frac{C}{1+i} + \frac{C(1+i)}{(1+i)^{2}} + \frac{C(1+i)^{2}}{(1+i)^{3}} + \ldots + \frac{C(1+i)^{n-1}}{(1+i)^{n}}$$

sacando factor común:

$$V_{(c,q)n>i} = \frac{C}{1=i}\left[1+\frac{1+i}{1+i}+\frac{(1+i)^2}{(1+i)^2}+....+\frac{(1+i)^{n-1}}{(1+i)^{n-1}}\right]$$

Dentro del corchete, al simplificarse, obtenemos la suma aritmética de n veces la unidad, siendo:

$$V_{(c,q)n>i} = \frac{n\times C}{1+i}$$

Para identificar el total de intereses de las rentas variables en progresión geométrica recurrimos a la siguiente igualdad:

$$T.Intereses = T.Desembolsos - V_0$$

El total de desembolsos puede calcularse aplicando los criterios de una progresión geométrica como vimos oportunamente, donde:

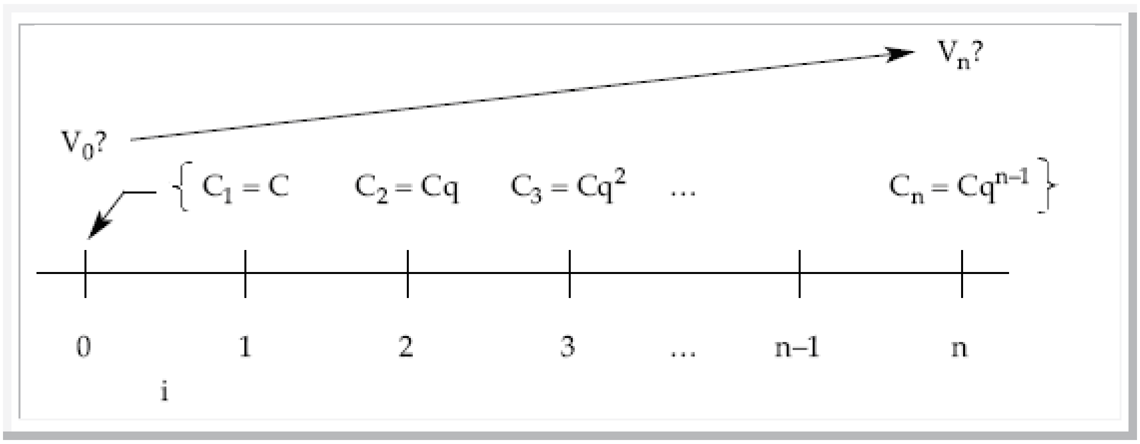
$$Total.de.Desembolsos = C_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

Por lo tanto:

$$T.Intereses = C_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} - V_0$$

Cálculo del valor final

A partir del valor actual se podrá calcular el valor de la renta en cualquier otro momento, al utilizar la relación que existe entre los valores financieros en los diferentes momentos de tiempo. Es decir, capitalizaremos el valor actual a la tasa de referencia hasta alcanzar el momento del valor final.

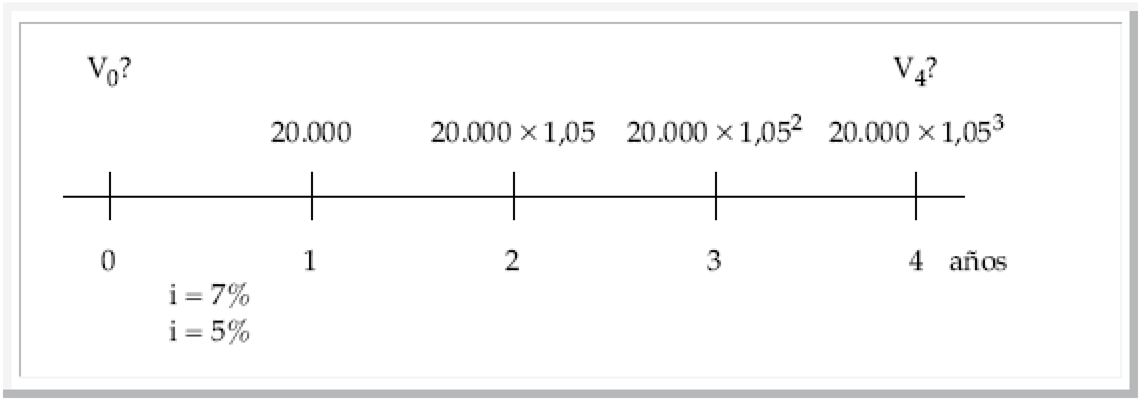


$$A_{(c,q)n>i} = V_{(c,q)n>i} \times (1+i)^n$$

Ejemplo:

Hallar el valor actual y final de los ingresos anuales vencidos de un trabajador que el primer año va a ganar $20.000 y espera que crezcan un 5 % anual de forma acumulativa para un horizonte temporal de cuatro años.

a) Suponiendo una tasa de interés del 7 %
b) Suponiendo una tasa del 5 %



a) Valuando al 7 %:

$$V_{(20000;1,05)4>0,07} = 20000 \times \frac{1 - 1{,}05^4 \times (1 + 0{,}07)^{-4}}{1 + 0{,}07 - 1{,}05} = 72.696{,}10$$

$$A_{(20000;1,05)4>0,07} = 72696{,}10 \times 1{,}07^4 = 95289{,}76$$

b) Valuando al 5 %:

$$V_{(20000;1,05)4>0,05} = \frac{4 \times 20000}{1 + 0{,}05} = 76.190{,}48$$

$$A_{(20000;1,05)4>0,05} = 76.190{,}48 \times 1{,}05^4 = 92.610{,}00$$

EJERCICIOS RESUELTOS DE RENTAS

- Se otorga un crédito de $17.000 que será cancelado en diez cuotas iguales, valuándose la operación al 2 % efectivo mensual. Si se otorgara un plazo de gracia de cinco meses, calcular el valor de cada cuota de servicio, así como el total de intereses que genera la operación.

SOLUCIÓN:

Tengamos en cuenta que el plazo de gracia establece la distancia temporal entre el momento en que se otorga el crédito y el instante en que se abona la primera cuota, por lo que si consideramos resolverlo con la expresión de las rentas de pagos vencidos, el origen de la operación se fijaría un periodo antes del desembolso de dicha cuota, por lo que el diferimiento sería de cuatro meses:

$$C = \frac{17000 \times 1{,}02^{4} \times 0{,}02}{1 - 1{,}02^{-10}}$$

$$C = \$2048{,}56$$

Para identificar el total de intereses:

$$TI = n \times C - V_0$$

$$TI = 10 \times 2048{,}56 - 17000$$

$$TI = \$3485{,}58.-$$

- Para devolver la suma de $14.000 se pactó entregar ocho pagos vencidos, mensuales y consecutivos de $2.000 cada uno. Calcular la tasa efectiva y mensual pactada en dicha operación.

SOLUCIÓN:

Utilizamos la fórmula de Baily:

$$h = \left(\frac{2000 \times 8}{14000}\right)^{\frac{2}{9}-1}$$

$$h = 0{,}030118$$

$$i = \frac{12 \times (8+1) - (8^2 - 1) \times 0{,}030118}{12 \times (8+1) - 2 \times (8^2 - 1) \times 0{,}030118} \times 0{,}030118$$

$$i = 0{,}0307$$

- Se decide realizar 12 depósitos mensuales y consecutivos de $800 valuados al 2 % efectivo mensual, para retirar el total al momento de efectuar el último depósito. Calcular el total de intereses que genera la operación.

SOLUCIÓN:

$$A_{n>i} = \frac{800}{0{,}02} \times \left(1{,}02^{12} - 1\right)$$

$$A_{n>i} = 10729{,}67$$

$$TI = A_{n>i} - n \times C$$

$$TI = 10729{,}67 - 12 \times 800$$

$$TI = \$1129{,}67$$

- Un inversor desea reunir $15.000 mediante el depósito de nueve cuotas mensuales y consecutivas. Calcular el importe de dichas cuotas si se empleó una tasa mensual del 2,4 % y el retiro se realizará 35 días después del último depósito.

SOLUCIÓN:

$$15000 = \frac{C}{0{,}024} \times \left(1{,}024^{9} - 1\right) \times 1{,}024^{\frac{35}{30}}$$
$$C = \$1471{,}70$$

- Con el propósito de efectuar un viaje por Europa el próximo año, la Sra. González está decidida a reunir la suma de \$27.000. ¿Qué importe deberá depositar mensualmente durante los próximos 11 meses si planea retirar sus ahorros tres meses después de efectuado el último de ellos? Luego de notificarse que omitió abonar la cuota de orden cinco, ¿cuál sería la suma realmente conseguida? Tasa de la operación: 3 % efectiva mensual.

SOLUCIÓN:

Calculamos el importe de los depósitos mensuales previstos para reunir \$27.000:

$$27000 = \frac{C}{0{,}03} \times \left(1{,}03^{11} - 1\right) \times 1{,}03^{3}$$
$$C = \$1929{,}20$$

Bajo el supuesto de la omisión de la cuota de orden cinco, recibiría tan solo:

$$Suma\ \mathrm{Re}cibida = 27000 - 1929{,}20 \times 1{,}03^{9}$$
$$Suma\ \mathrm{Re}cibida = \$24482{,}83$$

- El Sr. Sánchez abonó el 1.ro de abril la cuota n.º 14 correspondiente a una serie de 30 depósitos mensuales y consecutivos que le permitirán obtener un beneficio de $3.000 valuada la operación al 1 % efectivo mensual. Calcular el importe de las cuotas que abona y el total que prevé reunir.

SOLUCIÓN:

$$3000 = A_{n>i} - 30 \times C$$
$$A_{n>i} = 3000 + 30 \times C$$
$$30 + 0{,}3 \times C = 0{,}3478489 \times C$$
$$C = \frac{30}{0{,}0478489}$$
$$C = \$626{,}97$$

Para calcular el total, reemplazamos el importe obtenido en la fórmula inicial:

$$A_{n>i} = 3000 + 30 \times C$$
$$A_{n>i} = 3000 + 30 \times 626{,}97$$
$$A_{n>i} = \$21809{,}10$$

Podríamos usar la fórmula del valor final para alcanzar igual resultado:

$$A_{n>i} = \frac{626{,}97}{0{,}01} \times \left(1{,}01^{30} - 1\right)$$
$$A_{n>i} = \$21809{,}10$$

- Se decide realizar diez depósitos mensuales de $2.000 cada uno en una cuenta para, una vez efectuado el último, prestar el 60 % de lo obtenido a un tercero, quien pagará por dicha suma cuatro cuotas trimestrales e iguales entre sí, abonándose la primera de ellas tres meses después de finalizada la primera operación. Si la tasa pactada en ambas operaciones fue del 2 % efectivo mensual, calcular el total de intereses que podrá reunir el inversor.

SOLUCIÓN:

Calculamos inicialmente la tasa sincrónica:

$$1{,}02^3 - 1 = i_{trimestral}$$
$$i_{trimestral} = 0{,}061208$$

$$A_{n>i} = \frac{2000}{0{,}02} \times \left(1{,}02^{10} - 1\right)$$
$$A_{n>i} = \$21899{,}44$$

A continuación, el inversor destina el 60 % para prestar (retiene el 40 % para sí como parte del recupero):

$$21899{,}44 \times 0{,}60 = \frac{C}{0{,}061208} \times \left(1 - 1{,}061208^{-4}\right)$$
$$C = \$3802{,}49$$

Procedemos por último a calcular el total de intereses:

$$TI = 0{,}4 \times 21899{,}44 + 4 \times 3802{,}49 - 20000$$
$$TI = \$3969{,}74$$

- Contratada una renta de \$15.000 por la que se pactó abonar 18 cuotas mensuales e iguales valuadas al 3 % efectivo mensual, se desea conocer qué importe se debería adicionar a la última cuota para cancelar la deuda si se conoce que inmediatamente después de abonada la cuota nueve se interrumpieron los pagos por cuatro meses, y se los reanudó normalmente a partir de ese momento.

SOLUCIÓN:

$$C = \frac{15000 \times 0{,}03}{1 - 1{,}03^{-18}}$$
$$C = \$1090{,}63$$

La interrupción por cuatro periodos posteriores al desembolso de la novena cuota incluye tres periodos impagos (dado que la reanudación se verifica con la cuota 13, cancelada en tiempo y forma); se trata de las cuotas de orden 10, 11 y 12.
Calcularemos la imposición de tres cuotas iguales (valuadas al momento de vencimiento de la cuota 12) y capitalizada seis periodos para hacerla coincidir con el último pago:

$$Pago\ Sustitutivo = \frac{1090{,}63}{0{,}03} \times \left(1{,}03^{3} - 1\right) \times 1{,}03^{6}$$

$$Pago\ Sustitutivo = \$4025{,}18$$

- La Srta. Rodríguez decide depositar mensualmente, 12 cuotas de \$600 cada una para iniciar un ahorro. La tasa de la operación es del 3,5 % efectivo mensual. Calcular el importe que podrá reunir dos meses después de efectuado el último. Suponiendo que olvidó abonar la cuota n.º 8, ¿qué importe debería adicionar junto con el último depósito para concretar su objetivo inicial?

SOLUCIÓN:

Para conocer el importe que desea conseguir:

$$A_{n>i} = \frac{600}{0{,}035} \times \left(1{,}035^{12} 1\right) \times 1{,}035^{2}$$
$$A_{n>i} = \$9385{,}19$$

Para determinar la suma compensatoria por la cuota omitida:

$$reposicion = 600 \times 1{,}035^{4}$$
$$reposicion = \$688{,}51$$

La siguiente expresión también devuelve el valor requerido:

$$9385{,}19 = \frac{600}{0{,}035} \times \left[\left(1{,}035^{7} - 1\right) \times 1{,}035^{7} + \left(1{,}035^{4} - 1\right) \times 1{,}035^{2}\right] + X \times 1{,}035^{2}$$
$$siendo$$
$$X = \$688{,}51$$

- Se piden prestados $13.800 que serán abonados en seis pagos mensuales iguales y consecutivos, valuados al 2 % efectivo mensual. Determinar el importe de dichas cuotas.

SOLUCIÓN:

$$C = \frac{V_{0} \times i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$
$$C = \frac{13800 \times 0{,}02}{1 - 1{,}02^{-6}}$$
$$C = \$2463{,}66$$

- Dada una serie de 12 cuotas mensuales y vencidas de $1.600 cada una, calcular la suma que origina la operación si se valúa al 2 % efectivo mensual.

SOLUCIÓN:

$$V_{n>i} = \frac{C}{i} \times \left[1-(1+i)^{-n}\right]$$
$$V_{n>i} = \frac{1600}{0{,}02} \times \left(1-1{,}02^{-12}\right)$$
$$V_{ni} = \$16920{,}55$$

- El Sr. Pérez recibe \$3.600 que serán devueltos en nueve cuotas mensuales y vencidas al valuar la operación al 1,5 % mensual. Calcular el costo financiero de dicha operación y el valor de las cuotas que habrá de abonar.

SOLUCIÓN:

$$TI = n \times C - V$$
$$TI = 3600 \times \left(\frac{9 \times 0{,}015}{1-1{,}015^{-9}} - 1\right)$$
$$TI = \$275{,}36$$

De la primera fórmula, despejamos el valor de la cuota:

$$275{,}36 = 9 \times C - 3600$$
$$9 \times C = 3600 + 275{,}36$$
$$C = \frac{3875{,}36}{9}$$

Su

$$C = \$430{,}60.-$$

- ¿Qué pago extraordinario debe efectuarse junto con la cuota mensual número 12 de una renta de \$132.000 cancelable en 30 cuotas mensuales vencidas para reducir el plazo de la operación en ocho meses? Tasa de interés 19 % cuatrimestral capitalizable quincenalmente.

SOLUCIÓN:

Inicialmente, sincronizamos la tasa dada con la frecuencia de los pagos:

$$\left(1+\frac{0{,}19\times 15}{120}\right)^{\frac{30}{15}}=\left(1+i_{menual}\right)^{\frac{30}{30}}$$

$$i_{mensual}=0{,}04806$$

Luego, calculamos el valor de cada cuota según se proyectó en el inicio:

$$C=\frac{13200\times 0{,}0406}{1-1{,}04806^{-30}} \qquad C=\$8397{,}52$$

Según el enunciado, se deberá reducir el plazo original en ocho meses, lo que implica calcular una renta de pagos vencidos de ocho cuotas y actualizar el conjunto hasta el momento en que se abona la cuota de orden 12 (es decir, diez periodos mensuales):

$$P\_Exrtraordinario=\frac{8397{,}52}{0{,}04806}\times\left(1-1{,}04806^{-8}\right)\times 1{,}04806^{-10}$$

$$P\_Extraordinario=\$34209{,}83$$

- Un deudor que abonó la cuota 16 por $400 decide cancelar anticipadamente su deuda en ese mismo instante. ¿Qué suma adicional debería depositar para cumplir su objetivo si la deuda se pactó cumplir en 24 cuotas valuando la operación al 2,5 % efectivo mensual? ¿Cuál fue el importe originalmente recibido? ¿Cuál resultó ser la economía de intereses?

SOLUCIÓN:

La deuda original:

$$V_0 = \frac{400}{0,025} \times \left(1 - 1,025^{-24}\right)$$
$$V_0 = \$7154$$

La suma que debería adicionar en ese momento corresponde al saldo de deuda por las cuotas pendientes:

$$SD = \frac{400}{0,025} \times \left(1 - 1,025^{-8}\right)$$
$$SD = \$2868,08$$

Para calcular el ahorro de intereses, cotejamos este importe contra las ocho cuotas de servicio pendientes:

$$ahorro = 8 \times 400 - 2868,08 \qquad ahorro = \$331,94$$

- Una serie de 12 depósitos mensuales valuados al 2 % mensual se realizaron en una institución financiera para reunir un cierto importe dos meses después de efectuado el último de ellos. Si se conoce que los pagos impares fueron de \$500 cada uno y los pares de \$1.000 cada uno, calcular el importe alcanzado.

SOLUCIÓN:

Tenemos distintas formas para solucionar este problema, en cualquier caso, nos está faltando conocer el valor de la tasa bimestral equivalente:

$$(1+i_b)^{\frac{1}{2}} = (1+0{,}02)$$
$$i_b = 0{,}0404$$

$$A_{n>i} = \frac{500}{0{,}0404}\times\left(1{,}0404^6-1\right)\times 1{,}02^3+\frac{1000}{0{,}0404}\times\left(1{,}0404^6-1\right)\times 1{,}02^2$$
$$A_{n>i} = (500\times 1{,}02+1000)\times\frac{\left(1{,}0404^6-1\right)\times 1{,}02^2}{0{,}0404}$$
$$A_{n>i} = \$10430{,}91$$

Asimismo, podemos considerar una renta de 12 depósitos mensuales de $500 más una segunda renta "superpuesta" de $500 bimestrales para los periodos pares de pagos adelantados:

$$A_{n>i} = 500\times 1{,}0404\times\left\{\left[\left(1+0{,}02^{12}-1\right)\right]\times\frac{1}{0{,}02}+\left[(1+0{,}0404)^6-1\right]\times\frac{1}{0{,}0404}\right\}$$
$$A_{n>i} = \$10430{,}91$$

- Calcular el valor del capital amortizado correspondientes a las cuotas 14 a 18, ambas inclusive, de una renta cuya cancelación se pactó en 48 cuotas mensuales si se considera que el costo financiero de la operación ascendió a $6.480, se otorgó un plazo de gracia de cinco meses en el inicio y la tasa efectiva de la operación fue convenida al 18 % nominal anual.

SOLUCIÓN:

Siendo $TI = n \times C - V_0$ $\qquad 6480 = 48 \times C - V_0$

$$V_0 = 48 \times C - 6480$$

$$48 \times C - 6480 = \frac{C}{0{,}015} \times \left(1 - 1{,}015^{-48}\right) \times 1{,}015^{-4}$$
$$48 \times C - 32{,}07436 \times C = 6480$$
$$C = \$406{,}89$$

Reemplazamos:

$V_0 = 48 \times 406{,}89 - 6480$ $\qquad V_0 = \$13050{,}72$

- Conociendo que entre las cuotas 41 a 44, ambas inclusive, de una cierta renta pactada a cancelarse en 60 cuotas mensuales se amortizaron $1.200 y se conoce adicionalmente que la tasa empleada en la operación que ascendió al 2 % mensual, determine el capital original de dicha operación.

SOLUCIÓN:

Calculamos el valor de la cuota de servicio constante a partir de los datos del enunciado:

$$1200 = V_{(60-20)} - \frac{C}{0{,}02} \times \left(1 - 1{,}02^{-16}\right)$$
$$1200 = \frac{C}{0{,}02} \times \left[\left(1 - 1{,}02^{-20}\right) - \left(1 - 1{,}02^{-16}\right)\right]$$
$$1200 \times 0{,}02 = C \times \left(\cancel{1} - 1{,}02^{-20} - \cancel{1} + 1{,}02^{-16}\right)$$
$$C = \$432{,}62$$

Para averiguar V_0:

$$V_0 = \frac{432,62}{0,02} \times \left(1 - 1,02^{-60}\right)$$

$$V_0 = \$15038,25$$

- Se pacta depositar una serie de 20 cuotas mensuales e iguales entre sí con el propósito de retirar $20.000 una vez depositada la última de ellas. Las tasas pactadas a tales efectos se fijaron en el 3 % efectivo mensual, que se mantendría vigente hasta el momento del depósito de la décima cuota para luego incrementarse en un punto. Una vez concluido el plazo previsto, se verifica que el aportante omitió el desembolso de los sucesivos depósitos inmediatamente después de abonada la cuota n.º 8, durante cuatro meses.
  Se solicita determinar qué suma deberá ingresar junto con el último depósito para alcanzar el objetivo.

  SOLUCIÓN:

  Averiguaremos inicialmente el importe de las cuotas de la renta:

$$20000 = C\left\{\frac{1}{0,03}\left[(1+0,03)^{10} - 1\right](1,04)^{10} + \frac{1}{0,04}\left[(1+0,04)^{10} - 1\right]\right\}$$

$$C = \frac{20000}{28,97544896}$$

$$C = 690,24$$

Según lo indicado en el ejercicio, y suspendidos los pagos durante cuatro meses, significa que se retoman los pagos normalmente con la cuota de orden n.º 12, por lo que se omitieron las intermedias, es decir, cuotas nueve, diez y once; las dos primeras valuadas al 3 % pueden incluirse en una renta de dos cuotas de pago vencidos (no podría considerarse una imposición de pagos adelantados puesto que se verían afectadas a dos tasas diferentes), en tanto, la cuota n.º 11 deberá valuarse sola por regirse al 4 %.

$$Suma.a.ingresar = 690,24\left\{\left[(1+0,03)^2 - 1\right] \times \frac{1}{0,03} \times (1+0,04)^{10} + (1+0,04)^9\right\}$$

$$Suma.a.Ingresar = \$3056,53$$

- Se contrata una renta a pagarse con 15 cuotas mensuales y constantes de $250 cada una para retirar lo producido luego de cuatro meses de efectuado el último depósito. Las tasas vigentes en dicha operación fueron del 3 % mensual hasta quince días posteriores al pago de la cuota nueve, para luego ascender al 4 %. Dada una suspensión de los pagos de cuatro meses luego de haberse depositado la cuota siete, se generó una deuda que sería cancelada mediante tres cuotas bimestrales y vencidas, posteriores a la última cuota de la primera serie. Calcular:
  1. el importe de dichos pagos sabiendo que resultarán iguales entre sí,
  2. el valor reunido al finalizar toda la operación,
  3. el valor efectivamente disponible en la fecha final inicialmente estipulada,
  4. el incremento en los intereses producidos por la prórroga en la cancelación.

SOLUCIÓN:

1. El importe de dichos pagos sabiendo que resultarán iguales entre sí:

$$\frac{250}{0.03}\times\left(1.03^{2}-1\right)\times\sqrt{1.03}\times 1.04^{5,5}+250\times 1.04^{5}=C\times\frac{1-1.0816^{-3}}{0.0816}$$

Nota: al calcular el valor de la cuota C se consideró la tasa efectiva sincrónica (bimestral) equivalente al 4 % efectivo mensual indicado.

$$C=\$367,06.-$$

2. El valor reunido al finalizar toda la operación:

$$\frac{250}{0.03}\times\left(1.03^{7}-1\right)\times 1.03^{2.5}\times 1.04^{11,5}+\frac{250}{0.04}\times(1.04^{5}-1)\times 1.04^{6}+367.06\times\frac{1.0816^{3}-1}{0.0816}=\$6144.88.-$$

Considerando que las cuotas bimestrales sustituyeron las cuotas omitidas oportunamente, al mismo resultado se hubiera llegado al presentar el siguiente cálculo:

$$250\times\left[\frac{\left(1,03^{9}-1\right)}{0,03}\times\sqrt{1,03}\times 1,04^{11,5}+\frac{\left(1,04^{6}-1\right)}{0,04}\times 1,04^{6}\right]=\$6144,88.-$$

3. El valor efectivamente disponible en la fecha final inicialmente estipulada:

$$\frac{250}{0.03}\times\left(1.03^{7}-1\right)\times 1.03^{2.5}\times 1.04^{9.5}+\frac{250}{0.04}\times(1.04^{5}-1)\times 1.04^{4}+367.06\times\frac{1.0816^{2}-1}{0.0816}=\$5341,91.-$$

4. El incremento en los intereses producido por la prórroga en la cancelación:

Para este cálculo consideramos comparar lo efectivamente reunido contra lo que hubiéramos conseguido de haberse desarrollado correctamente la operación tal como se previó originalmente.

$$6144.87-\left\{\frac{250}{0.03}\times\left(1.03^{9}-1\right)\times 1.03^{0.5}\times 1.04^{9.5}+\frac{250}{0.04}\times(1.04^{6}-1)\times 1.04^{4}\right\}=\$463.59.-$$

- Se procede a cancelar un saldo de deuda con $42.611 once días después de abonada la cuota 23 sobre un total de 31 cuotas. La operación se perfeccionó con dos tasas anuales del 28 y 34 %, ambas efectivas, vigente la primera de ellas hasta el depósito de la cuota 14. Dicho saldo de deuda incluye el importe de la cuota n.º 6, no cumplimentada en su oportunidad. Se desea conocer el importe de la deuda original.

SOLUCIÓN:

En primer lugar, calculamos las tasas que corresponden por tratarse de una renta asincrónica:

$$\left(1+0{,}28\right)^{\frac{1}{12}}=(1+i_1)$$
$$i_1=\sqrt[12]{1{,}28}-1$$
$$i_1=0{,}02078$$

$$(1+0{,}34)^{\frac{1}{12}}=(1+i_2)$$
$$i_2=\sqrt[12]{1{,}34}-1$$
$$i_2=0{,}02469$$

Valuando el saldo de deuda:

$$42611 = C\times 1{,}02078^{8}\times 1{,}02469^{\frac{281}{30}} + C\times \frac{\left[1-(1+0{,}02469)^{-8}\right]}{0{,}02469}\times 1{,}02469^{\frac{11}{30}}$$

$$C = \frac{42611}{8{,}725524031}$$

$$C = 4883{,}49$$

$$V_0 = 4883{,}49\left\{\frac{\left[1-(1+0{,}020708)^{-14}\right]}{0{,}020708} + \frac{\left[1-(1+0{,}02469)^{-17}\right]}{0{,}02469}\times 1{,}020708^{-14}\right\}$$

$$V_0 = \$109214{,}54$$

- Se toma un crédito por $12.000 a cancelarse en 36 cuotas mensuales y vencidas de igual importe entre sí, para lo cual se pactó la operación a tasa variable y se inició con el 24 % anual. Quince días posteriores al desembolso de la cuota de orden n.º 14 se le informa al deudor que la tasa se incrementó en seis puntos. Calcular el importe de las cuotas que componen originalmente la deuda, el nuevo valor de las cuotas ajustadas por el aumento en la tasa y el costo financiero adicional que sufre el deudor.

SOLUCIÓN:

Recordemos que se trata de una renta de tipo asincrónica, por lo que deberemos ajustar las tasas a la frecuencia de los pagos:

$$(1+i_m)^{\frac{1}{1}} = (1+0{,}24)^{\frac{1}{12}}$$
$$i_m = \sqrt[12]{1{,}24} - 1$$
$$i_1 = 0{,}0180876$$

$$(1+i_m)^{\frac{1}{1}} = (1+0{,}30)^{\frac{1}{12}}$$
$$i_m = \sqrt[12]{1{,}30} - 1$$
$$1_2 = 0{,}02210445$$

Una vez conocidas las tasas, calculamos el valor original de las cuotas:

$$C = \frac{12000 \times 0{,}0180876}{\left[1-\left(1+0{,}0180876\right)^{-36}\right]}$$
$$C = 456{,}46$$

Como alternativa, calculamos el saldo de deuda luego de abonada la cuota n.º 14 para luego capitalizar la operación durante un mes (pasando por ambas tasas) y continuar como una renta de pagos adelantados:

$$V_{36-14} = \frac{456{,}46}{0{,}0180876}\left[1-\left(1+0{,}0180876\right)^{-36+14}\right]$$

$$V_{36-14)} = 8224{,}34$$

$$8224{,}34 \times 1{,}0180876^{\frac{1}{2}} \times 1{,}02210445^{\frac{1}{2}} = \frac{C}{0{,}02210445}\left[1-\left(1+02210445\right)^{-22}\right]\times\left(1+0{,}02210445\right)$$

$$C = 475{,}17$$

Por último, el incremento en el costo del proceso puede fácilmente establecerse por la diferencia de la sumatoria de las cuotas a abonar, contra la sumatoria de las cuotas que se modificaron:

$$Diferencia = 22 \times (475{,}17 - 456{,}46)$$

$$Diferencia = 411{,}62$$

- Se decide implementar un fondo de ahorro depositando cuotas iguales y mensuales durante diez años, para comenzar a retirar a perpetuidad en forma trimestral \$10.000, y se efectúa el primero de los retiros al mes de efectuado el último de los depósitos. Conociendo que la tasa de la operación se fijó en el 10 % anual capitalizable mensualmente, indicar el monto de los depósitos que serían necesarios para alanzar lo propuesto.

SOLUCIÓN:

Se trata de conformar en este caso una imposición tal que se transforme en el valor actual de una renta perpetua. En virtud de que la tasa de la operación es la misma en todo momento, calcularemos el valor de la equivalencia trimestral para el desarrollo de la perpetua:

$$i_m = \frac{0{,}10}{12}$$

$$i_m = 0{,}00833333$$

$$(1 + i_t)^{\frac{1}{3}} = (1 + 0{,}00833333)$$

$$i_t = 0{,}025209$$

La imposición bien podría tratarse como una renta anticipada de pagos adelantados, igual tratamiento correspondería a la perpetua en ese caso:

$$\frac{C}{0,00833333}\times\left[(1+0,00833333)^{120}-1\right]=\frac{10000}{0,025209}\times(1+0,025209)$$

$$C=1985,33$$

- Para saldar definitivamente una deuda, un inversor debió depositar $6.233 dos meses después del último de una serie de 16 pagos mensuales implementados para un fondo de ahorro valuado al 2 % mensual. Dicho importe corresponde a las cuotas cuatro, cinco y nueve, no depositadas oportunamente. Calcular el importe de la anualidad tal como se la esperaba inicialmente.

SOLUCIÓN:

Dos de las cuotas se encuentran contiguas en la serie, por lo que pueden agruparse en una renta (cuota cuatro y cuota cinco), la restante será valuada en forma independiente:

$$6233=\left\{\frac{C}{0,02}\left[(1+0,02)^{2}-1\right]\times 1,02^{4}+C\right\}\times 1,02^{9}$$

$$C=\frac{6233}{3,808177962}$$

$$C=1636,74$$

Una vez obtenido el valor de la cuota, podemos fácilmente calcular el valor de la imposición esperada originalmente:

$$A_{16\rangle 0,03} = \frac{1636,74}{0,02}\left[(1+0,02)^{16} - 1\right]$$

$$A_{16\rangle 0,02} = 30507,68$$

- Se contrata una renta a pagarse con 15 cuotas mensuales y constantes de $250, cada una para retirar lo producido luego de cuatro meses de efectuado el último depósito. Las tasas vigentes en dicha operación fueron del 3 % mensual hasta quince días posteriores al pago de la cuota nueve, para luego ascender al 4 %. Dada una suspensión de los pagos de cuatro meses, luego de haberse depositado la cuota siete, se generó una deuda que sería cancelada mediante tres cuotas bimestrales y vencidas, posteriores a la última cuota de la primera serie. Calcular:

    1 el importe de dichos pagos sabiendo que resultarán iguales entre sí,

    2 el valor reunido al finalizar toda la operación,

    3 el valor efectivamente disponible en la fecha final inicialmente estipulada.

SOLUCIÓN:

1 El importe de dichos pagos sabiendo que resultarán iguales entre sí:

$$\frac{250}{0.03} \times \left(1.03^{2} - 1\right) \times \sqrt{1.03} \times 1.04^{5,5} + 250 \times 1.04^{5} = C \times \frac{1 - 1.0816^{-3}}{0.0816}$$

Nota: al calcular el valor de la cuota C, se consideró la tasa efectiva sincrónica (bimestral), equivalente al 4 % efectivo mensual indicado.

$$C = \$367{,}06.-$$

2 El valor reunido al finalizar toda la operación:

$$\frac{250}{0.03}\times\left(1.03^{7}-1\right)\times1.03^{2.5}\times1.04^{11,5}+\frac{250}{0.04}\times(1.04^{5}-1)\times1.04^{6}+367.06\times\frac{1.0816^{3}-1}{0.0816}=\$6144.88.-$$

3 El valor efectivamente disponible en la fecha final inicialmente estipulada:

$$\frac{250}{0.03}\times\left(1.03^{7}-1\right)\times1.03^{2.5}\times1.04^{9.5}+\frac{250}{0.04}\times(1.04^{5}-1)\times1.04^{4}+367.06\times\frac{1.0816^{2}-1}{0.0816}=\$5360,65.-$$

- Teresa abona $14.200 al hacerse cargo de las últimas 16 cuotas mensuales de pagos vencidos que conforman una serie de ahorros constantes iniciados oportunamente por su hermano Carlos. Dicha transmisión se valúo al 2,5 % efectivo mensual. Si se conoce que Carlos había pactado la renta a cancelarse en 40 cuotas mensuales valuadas al 2 % mensual, ¿cuál fue el resultado que obtuvo en la transacción? ¿Cuál fue el capital que esperaba reunir Carlos una vez finalizada la serie de ahorros? ¿Con qué importe se reunió Carlos al momento de la transmisión si se supone que rescato para sí las cuotas previas en ese instante?

SOLUCIÓN:

Averiguamos el valor de cada cuota que conformaba la serie, a partir del dinero que recibe Carlos y la tasa que acordara con su hermana Teresa:

$$C=\frac{14200\times 0{,}025}{1-1{,}025^{-16}} \qquad C=\$1087{,}70$$

Para reconocer el resultado que obtuviera Carlos en esta cesión, actualizamos las 16 cuotas a la tasa que oportunamente pactara:

$$V=\frac{1087{,}70}{0{,}02}\times\left(1-1{,}02^{-16}\right) \qquad V=\$14768{,}47$$

De haber efectuado la serie de 16 pagos finales, hubiera obtenido más dinero: $14768{,}47-14200=\$568{,}47$

Para saber la suma que hubiera alcanzado de completar el pago de las 40 cuotas:

$$A_{40>0{,}02}=\frac{1087{,}70}{0{,}02}\times\left(1{,}02^{40}-1\right) \qquad A_{40>i}=\$65699{,}24$$

Para saber el importe total que alcanzó Carlos al momento de la transmisión, valuamos las 24 cuotas que depositó y las adicionamos al pago de Teresa:

$$A_{24>0{,}02}=\frac{1087{,}70}{0{,}02}\times\left(1{,}02^{24}-1\right) \qquad A_{24>0{,}02}=33089{,}86$$

Suma total reunida por Carlos:
$$33089{,}86+14200=\$47289{,}86$$

- Se pacta devolver una cierta deuda al abonar 30 cuotas mensuales y consecutivas, de las cuales las 15 primeras serán de \$1.000 y las restantes de \$1.500 cada una. Se pactaron dos tasas consecutivas, la primera de ellas, del 1,5 % efvo. anual, permanecería vigente hasta 15 días posteriores al depósito de la novena cuota, para luego pactarse al 1,8 % efectivo mensual. ¿De qué deuda se trata? Si se supone que se desearía cancelar dicha deuda diez días después de hecho efectivo el sexto depósito, ¿qué suma sería necesaria?

SOLUCIÓN:

$$V_0 = \frac{1000}{0,015} \times \left(1 - 1,015^{-9}\right) + \frac{1000}{0,018} \times \left(1 - 1,018^{-6}\right) \times 1,018^{-\frac{15}{30}} \times 1,015^{-9,5} +$$
$$+ \frac{1500}{0,018} \times \left(1 - 1,018^{-15}\right) \times 1,018^{-5,5} \times 1,015^{-9,5}$$

$$V_0 = \$28610,14$$

Saldo de deuda:

$$V_0 = \frac{1000}{0,015} \times \left(1 - 1,015^{-3}\right) \times 1,015 \times 1,015^{-\frac{20}{30}} + \frac{1000}{0,018} \times \left(1 - 1,018^{-6}\right) \times 1,018^{-\frac{15}{30}} \times 1,015^{-\frac{95}{30}} +$$
$$+ \frac{1500}{0,018} \times \left(1 - 1,018^{-15}\right) \times 1,018^{-5,5} \times 1,015^{-\frac{95}{30}}$$

$$S\_Deuda = \$25178,66$$

Al mismo resultado llegaríamos con la siguiente expresión:

$$28610,14 \times 1,015^{\frac{190}{30}} - \frac{1000}{0,015} \times \left(1,015^{6} - 1\right) \times 1,015^{\frac{10}{30}} = \$25178,66$$

- Se conoce la primera y última cuota de una renta en progresión geométrica, sus valores respectivos son de \$78 y \$6,06 y se pacta cancelarla en seis pagos mensuales y valuados al 5 % efectivo mensual. Calcular el total de intereses y confeccionar el cuadro de marcha correspondiente.

SOLUCIÓN:

Previamente al uso de las fórmulas, debemos establecer la razón que fuera empleada al saber que se trata de una renta variable en progresión geométrica "decreciente" donde el resultado esperado será menor a uno:

$$C_6 = C_1 \times q^5 \qquad \text{ya que } C_n = C_1 \times q^{n-2}$$

$$6{,}06 = 78 \times q^5 \qquad q = \sqrt[5]{\frac{6{,}06}{78}} \qquad q = 0{,}6$$

Podemos ahora completar la expresión que nos permite reconocer el total de desembolsos:

$$T.de.Desembolsos = 78 \times \frac{1-0{,}6^6}{1-0{,}6} \qquad T.de.Desembolsos = \$185{,}90$$

También debemos calcular el valor actual:

$$V_{(c,q)n>i} = C \times \frac{1-q^n \times (1+i)^{-n}}{1+i-q}$$

$$V_{(c,q)n>i} = 78 \times \frac{1-0{,}6^6 \times (1+0{,}05)^{-6}}{1+0{,}05-0{,}6}$$

$$V_{(c,q)n>i} = \$167{,}30$$

Por último, utilizamos la fórmula del total de intereses para una renta variable en progresión geométrica, con los valores ya calculados parcialmente:

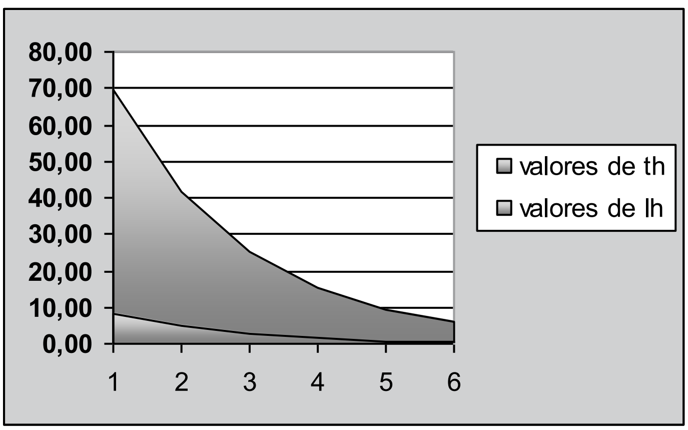
$$T.Intereses = C_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} - V_0$$

$$T.Intereses = 185{,}90 - 167{,}30 \qquad T.Intereses = \$18{,}60$$

Podremos comprobar los resultados previos mediante la confección del cuadro de marcha solicitado:

n	V(cq)n>i	Ch	th	Ih
0	**167,30**			
1	97,67	78,00	69,64	8,37
2	55,75	46,80	41,92	4,88
3	30,46	28,08	25,29	2,79
4	15,13	16,85	15,33	1,52
5	5,78	10,11	9,35	0,76
6	0,00	6,07	5,78	0,29
		185,90	167,30	**18,60**

Gráficamente:



Resolver el ejercicio anterior, si se supone que se trata de una renta variable en progresión aritmética.

SOLUCIÓN:

En este caso, también siendo decreciente, la razón aritmética empleada (d) resultará un número negativo y surgirá de la siguiente relación:

$C_n = C_1 + (n-1) \times d$ $\quad C_6 = 6{,}06$ y $C_1 = 78$, de donde:

$6{,}06 = 78 + (6-1) \times d \qquad -5 \times d = 78 - 6{,}06 \quad d = \frac{-71{,}94}{5}$

$$d = -14{,}39$$

Identificamos ahora la deuda original:

$$V_{(c,d)n>i} = \left(C_1 + \frac{d}{i} + n \times d \right) \times v_{n>i} - \frac{n \times d}{i}$$

$$V_{(c,d)n>i} = \left(78 + \frac{(-14{,}39)}{0{,}05} + 6 \times (-14{,}39) \right) \times \frac{1 - 1{,}05^{-6}}{0{,}05} - \frac{6 \times (-14{,}39)}{0{,}05}$$

$$V_{(c,d)n>i} = \$223{,}71$$

Calculamos el total de intereses al tener presente que, por tratarse de una renta decreciente, invertimos los valores de C_1 y C_n

$$Total.de.Intereses = n \times \left[C_1 + \frac{(C_1 - C_n)}{2} \right] - V_0$$

$$Total.de.Intereses = 6 \times \left[78 + \frac{78 - 6{,}06}{2} \right] - 223{,}71$$

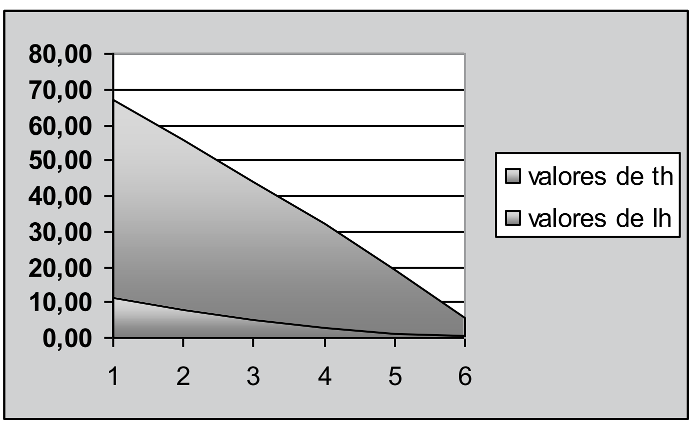
$$Total.de.Intereses = \$28{,}47$$

Nota: puede observarse que en las rentas variables en progresión geométrica, a iguales condiciones de contratación el costo financiero puro resultará menor al que surja de la aplicación de las rentas variables en progresión aritmética.

Por último, resolvemos el cuadro de marcha con el que podremos corroborar los resultados:

n	V(cq)n>i	Ch	th	Ih
0	**223,71**			
1	156,90	78,00	66,81	11,19
2	101,13	63,61	55,77	7,84
3	56,96	49,22	44,17	5,06
4	24,98	34,83	31,98	2,85
5	5,78	20,44	19,20	1,25
6	0,00	6,06	5,78	0,29
		252,17	223,71	**28,47**

Gráficamente:



Capítulo 13

Sistemas de amortización

SISTEMAS DE AMORTIZACIÓN

Las modalidades de financiación crediticias han dado lugar al desarrollo de distintos sistemas de cancelación de deudas, en función de la forma en que se restituye el capital solicitado inicialmente y el modo en que se calculan los intereses de la deuda a favor del acreedor.
Independientemente del sistema que se utilice, observamos ciertos elementos comunes a todos ellos, a saber:

V=valor actual de la deuda (indicado como Vo, se refiere a la deuda al momento inicial, de origen o "cero", indicado con los subíndices 1, 2, 3, …., n, nos referimos al saldo de deuda que subsiste luego de cancelada la cuota de ese momento)

n=cantidad de cuotas que compone la operación

th= cuota de amortización (del capital)

Ih= cuota de intereses

Ch= cuota de servicio (desembolso total)

Por lo que

$$\boxed{Ch = th + Ih}$$

Se trata pues de vincular, cuando el sistema lo requiere, el componente de intereses, así como la restitución del capital del acreedor.

A los métodos más difundidos en la cancelación de deudas los podemos agrupar en dos grupos, a saber:

a) Aquel que basa la restitución en el régimen simple, conocido como método de los intereses directos.

b) Aquellos que toman en cuenta las cancelaciones anteriores a la culminación de la transacción financiera, conocidos como métodos sobre saldos.

Es así que, a partir de ahora, iremos desarrollando las características particulares de cada uno al entender que al hablar de sistemas de amortización podremos observar algunas excepciones a las definiciones generales.

Para la mayor comprensión de cada uno de los sistemas, procederemos a la confección de lo que se conoce como cuadro de marcha, esquema que permite tabular la evolución de un sistema y en particular una operación financiera de esta naturaleza al ingresar los datos en una matriz de doble entrada.

a) SISTEMA DE INTERESES DIRECTOS

Como se señalara oportunamente, dicho sistema se basa en los conceptos del régimen simple, su cálculo es sumamente sencillo, de ahí su extraordinaria difusión, pero como contrapartida muchas veces se lo emplea como una carga financiera excesiva en detrimento del deudor, por lo que lo convierte en un método “injusto” e incluso hasta lindante con la usura al favorecer el beneficio del acreedor.

No significa que el préstamo en sí mismo resulte oneroso al deudor, dado que todo dependerá de la tasa aplicada a este, pero el lector deberá comprender que frente a tasas que “aparentemente” resulten habituales por tratarse de este método es muy probable que su aplicación genere esa excesiva carga financiera a la que se alude precedentemente, tanto al momento de compararla frente a una tasa efectiva o bien, al ponderar el total de intereses a pagar.

Para comprender su evolución, indicaremos las fórmulas que permiten su cálculo, donde,

cuota de amortización del capital:

$$th = \frac{V}{n}$$

Es decir que, independientemente del orden (h) que corresponda, con este sistema el deudor abona con cada cuota una "enésima" parte del capital tomado al origen. Esto significa que, por ejemplo, si se recibe $4.000 a cancelarse en diez cuotas mensuales, el deudor que pacta este sistema deberá restituir en cada una de las diez cuotas la suma de $400 al acreedor en concepto de amortización, dado que 400=4.000/10.

Ahora nos resta conocer el importe de intereses (Ih) que completará la cuota de servicio (Ch) a favor del acreedor, por lo que su cálculo será:

$$Ih = V_o \times i$$

Es decir, que solo basta con aplicar la tasa (periódica) pactada en la operación al importe de la deuda original para conocer la cuantía de intereses que serán abonados en cada oportunidad, conjuntamente con la amortización prevista anteriormente para conocer el total de la cuota de servicio (Ch). A modo de ejemplo, supongamos que la deuda anteriormente indicada de $ 4.000, se pacta a una tasa semestral del 12 %:

Tendremos en cuenta previamente "sincronizar" la tasa (semestral) con la frecuencia en que se practicará la devolución (en nuestro caso, las cuotas se indicaron "mensualmente"), y dado que se trata de operar en el régimen simple, bastará dividir la tasa semestral en seis partes iguales para reconocer la tasa (mensual) en que será calculada la operación, de donde 0,12/6=0,02 (mensual).

Nota: ya hemos procedido a transformar la razón porcentual a una tasa apta para hacer cálculos (tasa unitaria).

De este modo, concluiremos que el deudor deberá abonar al acreedor con cada cuota de servicio la suma de $80, importe que surge del producto de la deuda original por la tasa mensual, es decir 4.000x0,02.

Ya contamos con los dos elementos básicos para reconocer el desembolso total periódico que deberá efectuar el deudor o cuota de servicio (Ch):

De donde:

$$Ch = th + Ih$$

$$Ch = 400 + 80$$

$$Ch = 480$$

El deudor se compromete a realizar diez pagos iguales y mensuales de $480 cada uno para cancelar la deuda al acreedor y satisfacer sus intereses.

Para comprender mejor las características de este sistema, resulta conveniente volcar su evolución a un cuadro de marcha y sobre el este realizar algunas aclaraciones:

Orden	Vn	Ch	Th	Ih
0	4000	---	---	---
1	3600	480	400	80
2	3200	480	400	80
3	2800	480	400	80
4	2400	480	400	80
5	2000	480	400	80
6	1600	480	400	80
7	1200	480	400	80
8	800	480	400	80
9	400	480	400	80
10	----	480	400	80
			4000	800

Para confeccionar dicho cuadro, establecimos diversas columnas, de modo que la primera de ellas nos indica el orden o momento en que se encuentra el préstamo, las siguientes corresponden al saldo de deuda que se verifica a cada momento, la cuota de servicio, la amortización y los intereses.

En el instante cero se recibe el préstamo y no se produce devolución alguna por parte del deudor, luego, al cumplirse el vencimiento de la primera cuota, abona $480 por todo concepto. Nótese que resulta correcto que el deudor abone $80 en concepto de intereses en función que pudo disponer de la totalidad del crédito otorgado por el acreedor ($4.000), pero ¿qué ocurre cuando el deudor cancela su primera cuota? Recordemos que con ella ha tenido que amortizar $400 como se observa en la cuarta columna y que su saldo de deuda pasó a ser de $3.600. Esto da lugar a detenernos en el costo financiero que incurre el deudor al momento de cancelar la segunda cuota, recordemos que continuará abonando $80 en concepto de intereses al acreedor a lo largo de cada cuota hasta concluir con su obligación.

Tengamos en cuenta que la tasa resultó del 0,02 y esto ya resulta injusto a los intereses del deudor si pensamos que su actual deuda es de solo $3.600. Este hecho se intensifica a medida que se avanza en el desarrollo del sistema, y resulta su punto culminante al momento de cancelarse la última cuota; en ese instante, el deudor solo debe restituir al acreedor $400 que corresponde al saldo de deuda luego de abonada la cuota nueve de nuestro ejemplo, ya que el deudor abonó 9x400 hasta ese momento.

Si relacionamos el interés que se abona con este último importe, concluiremos que la tasa genuina que corresponde a ese periodo se eleva al 20 % (0,20 medida en términos unitarios): 80/400=0,20i

Por último, cabe desarrollar la fórmula que nos permita reconocer el costo financiero total de la operación, también llamado total de intereses:

$$TI = V_o \times i \times n$$

Para nuestro ejemplo, TI=4000x0,02x10, es decir $800.

b) SISTEMA SOBRE SALDOS

Aquí debemos detenernos con especial interés sobre estos sistemas y sus particularidades. En todos los casos, se opera en régimen compuesto y el deudor abona intereses en función del capital adeudado.

Si este disminuye por efecto de la amortización, el acreedor reconoce la disminución y solo percibe intereses en concordancia con el capital efectivamente cedido, de ahí su título. No obstante, uno de ellos, el americano, resulta un "híbrido" entre el sistema de intereses directos y aquellos sobre saldos, hasta podríamos reconocer que opera en régimen simple, por lo que lo esbozaremos en sus particularidades.

Dentro de estos sistemas, en este trabajo distinguimos cinco, de los cuales tres de ellos resultan ser los más empleados en la actividad financiera, sin perjuicio del resto que cumplen eficazmente con la premisa de calcularse sobre saldos, asimismo, incorporamos otro sistema presentado por el autor, en las XXX Jornadas de Matemática Financiera de San Miguel de Tucumán, a saber:

b.1) Sistema americano

b.2) Sistema alemán

b.3) Sistema francés

b.4) Sistema progresivo

b.5) Sistema de cuotas constantes con intereses promediados y cargados al préstamo

b.6) Sistema áureo

b.1) Sistema americano

En este sistema, el deudor restituye al acreedor la suma recibida inicialmente en un solo acto, en forma total, conjuntamente con el último desembolso. Periódicamente, se compromete a abonar intereses y puesto que el capital inicial (Vo) no experimenta disminuciones parciales, lógicamente el costo financiero para el deudor será calculado como en el sistema de intereses directos, esto es V_0xi:

$$Ih(am) = Ch(am) = V_o \times i$$

No obstante, recordemos que el deudor realiza la restitución del capital inicial junto con la cuota (cuota de interés) "n", es decir, la última de la serie, por lo que previamente, desde la cuota n.º 1 a la cuota "n-1" se aplica la precedente fórmula, y se reserva para la última la incorporación de V:

$$Ch_n(am) = V_o \times i + V_o$$

$$Ch_n(am) = V_o \times (1+i)$$

Siguiendo el mismo ejemplo de deuda anterior, para un capital de $4.000 a devolverse en diez cuotas mensuales valuado al 2 % mensual, el cuadro de marcha para este sistema quedará confeccionado de la siguiente forma:

Orden	Vn	Ch	Th	Ih
0	4000	---	---	---
1	4000	80		80
2	4000	80		80
3	4000	80		80
4	4000	80		80
5	4000	80		80
6	4000	80		80
7	4000	80		80
8	4000	80		80
9	4000	80		80
10	----	4080	4000	80
			4000	800

Si se observa el total de la última columna, notamos que el total de intereses acumulados coincide con el costo financiero total para el sistema de intereses directos, la diferencia sustancial radica en que, mientras en el anterior el deudor cancelaba progresivamente su deuda, aquí el deudor dispone del capital prestado originalmente, sin devoluciones hasta el momento de concluir la operación, por lo que resulta equitativo para ambas partes.

La sumatoria de intereses se calcula de igual modo que para los intereses directos:

$$TI = V_o \times i \times n$$

Nota: la importante suma monetaria que representa el desembolso final motivado por la restitución completa de la deuda original lleva en algunos casos a la creación de un fondo voluntario de ahorro periódico de la forma conocida como anualidad o imposición, denominada cuota facultativa o sinking fund. De este modo, se logra atemperar el impacto que representa el desembolso completo del capital prestado.

Para atender a este ahorro voluntario, el deudor podrá organizar una serie de pagos periódicos, a modo de una imposición para afrontar el momento del desembolso extraordinario final, ya sea en forma total o parcial (en este caso, se mitiga el impacto financiero). Se debe, asimismo, tener en consideración que la tasa pactada a lo largo de este ahorro no necesariamente resulta ser igual a la tasa del préstamo y tampoco es habitual que se pacte con el propio acreedor.

Para el cálculo de esta cuota, recurrimos a lo estudiado oportunamente como valor final de rentas de donde proviene su fórmula. El lector ya se encuentra en condiciones de verificar la fórmula más adecuada, acorde a las características contractuales particulares, no obstante, aquí recordaremos aquella renta temporal y de pagos vencidos que permite reconocer una cuota facultativa, creada para satisfacer la constitución de un valor final:

$$C_{facultativa} = \frac{V_0 \times i}{(1+i)^n - 1}$$

b.2) Sistema alemán

Sus características particulares se sustentan en cuotas de capital constantes (todas del mismo valor) calculadas como se describiera en el método de intereses directos, es decir, fraccionando la deuda original por sus n cantidad de cuotas en que se amortiza el capital, de donde:

$$th(al) = \frac{V_o}{n}$$

Para nuestro ejemplo inicial, th= 4000/10, es decir th=400

Cabe aclarar la íntima relación que existe entre este sistema y la progresión aritmética decreciente, es así que tanto la sucesión de cuotas de servicio (Ch) como la sucesión de cuotas de interés (Ih) representan en sí mismas progresiones de esta naturaleza.

Sin entrar a considerar las fórmulas que generan este tipo de progresiones, vemos su aplicación a este sistema en algunas relaciones interesantes a tener en cuenta, al ser que:

Cuota de capital:

$$th(al) = \frac{r}{i}$$

Total de intereses:

$$TI(al) = (I_1 + I_n) \times \frac{n}{2}$$

Primera cuota de interés:

$$I_1 = n \times r$$

Última cuota de interés:

$$I_n = r$$

Total de intereses:

$$TI(al) = (n \times r + r) \times \frac{n}{2}$$

$$TI(al) \times 2 = n^2 \times r + n \times r$$

$$\frac{TI(al) \times 2}{r} = n^2 + n$$

Resulta útil esta última expresión al momento de contar con datos sobre el total de intereses y la razón de decrecimiento de la progresión, dado que podemos obtener los valores de los n términos del sistema al aplicar los criterios de resolución de una ecuación cuadrática, del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde:

$$n^2 + n - \frac{TI(al) \times 2}{r} = 0$$

En lo que respecta a los intereses, en primer lugar, son calculados sobre saldos (concepto que ya fuera explicado) y estos decrecen en forma constante con cada cuota abonada a modo de una progresión aritmética decreciente, dado que la amortización de la deuda original disminuye de modo constante y progresivo, también lo hace el interés, esto da lugar a considerar que "todas" las cuotas de servicio resultarán distintas para este sistema:

$$Ch(al) = th(al) + Ih$$

Para reconocer el importe que habrá de pagarse en cada instante, debemos previamente saber cuál es el capital que le da origen y en este sistema resulta muy simple, dado que basta con saber cuántas cuotas de capital restan por pagarse en algún momento inmediato al pago de alguna cuota para distinguir el interés monetario (Ih) que habrá de pagarse en la siguiente cuota. Si a este último valor le incorporamos el valor de th, sabremos cuál es el valor de Ch.

Siendo que en nuestro ejemplo original se desea conocer el valor de la cuota de orden n.º 8, con los datos correspondientes calcularemos el saldo de deuda a ese momento:

Nos preguntamos, ¿cuántas cuotas restan cancelar si sobre un total de diez hemos cancelado siete? La respuesta es simple: **tres**. Luego, multiplicamos este número por el valor de cualquier th (no olvidemos que son todos iguales), es decir, 3x400=1200. En ese momento, reconocemos que el deudor canceló $2.800 al abonar puntualmente hasta la cuota n.º 7 (puesto que 7x400=2800), consecuentemente, está debiendo aún $1.200 de capital. Una vez que tenemos este importe, solo queda multiplicarlo por el valor de la tasa:0,02, entonces:

$$I_8 = 1200 \times 0{,}02$$
$$I_8 = \$24$$

Adicionando $400 correspondientes a cualquier th, tendremos que:

$$C_8 = 400 + 24$$
$$C_8 = 424$$

Una vez desarrollado el cuadro de marcha para este sistema, podremos comprobar la veracidad de nuestros cálculos:

Orden	Vn	Ch	Th	Ih
0	4000	---	---	---
1	3600	480	400	80
2	3200	472	400	72
3	2800	464	400	64
4	2400	456	400	56
5	2000	448	400	48
6	1600	440	400	40
7	1200	432	400	32
8	800	**424**	400	**24**
9	400	416	400	16
10	----	408	400	8
		4440	4000	440

Podemos observar que los datos obtenidos analíticamente concuerdan con los datos devueltos en el cuadro de marcha para la cuota de orden n.º 8, donde Ch=424 e Ih=24.

Dado que la disminución en la carga de intereses decrece como se indicara precedentemente en forma de una progresión aritmética, la fórmula que nos permite conocer el costo financiero total deriva de ella, al ser que:

$$TI(al) = \frac{V_o \times i}{2} \times (n+1)$$

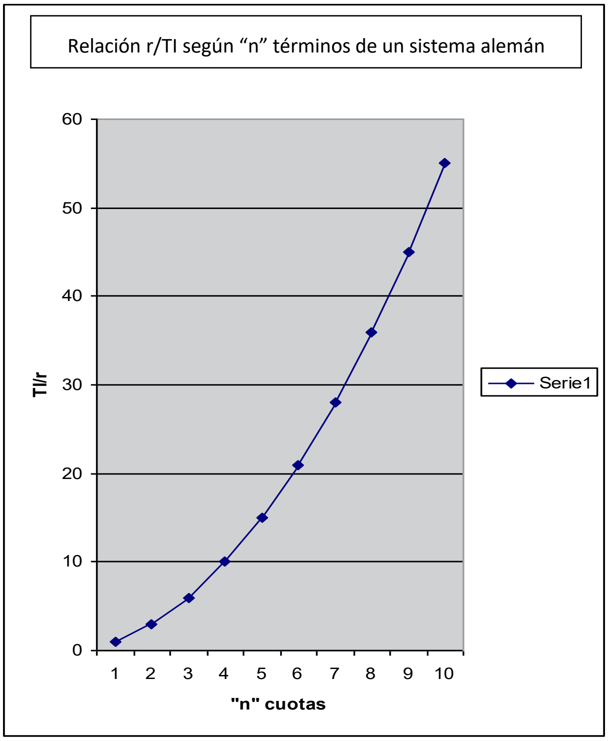
Reemplazando en ella, obtendremos el valor indicado al pie de la columna Ih (intereses):

$$TI = \frac{4000 \times 0{,}02}{2} \times (10+1)$$
$$TI = \$440$$

La tabla que se expone a continuación, permite relacionar los valores de "r" (razón de decrecimiento aritmético y lineal de los intereses de un sistema alemán) y sus correspondientes TI (totales de intereses) en función de la cantidad de cuotas que componen el sistema.

La columna VI marca una progresión lineal según evolución de los "n" términos, fácil de calcular; nótese que la columna V arrastra el acumulado en una serie perfectamente predecible en el tiempo y refleja la relación establecida en las columnas II y III; dicha sucesión se verifica como una parábola que se grafica en el eje de coordenadas desarrollado posteriormente.

I	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI=II/IV*
Valor de "r"	**TI/r (V $\times$IV)**	**TI (I$\times$ II)**	**Términos "h"**	**Acumulado** $\frac{h^2+h}{2}$	**Progresión** $\frac{h+1}{2}$
r	1	r	1	(1+0)	1
r	3	3r	2	(2+1)	1,5
r	6	6r	3	(3+3)	2
r	10	10 r	4	(4+6)	2,5
r	15	15 r	5	(5+10)	3
r	21	21 r	6	(6+15)	3,5
r	28	28 r	7	(7+21)	4
r	36	36 r	8	(8+28)	4,5
r	45	45 r	9	(9+36)	5
r	55	55 r	10	(10+45)	5,5
r	66	66 r	11	(11+55)	6
r	78	78 r	12	(12+66)	6,5



b.3) Sistema francés

Para este modelo, probablemente el más reconocido, las cuotas de servicio (desembolso periódico total) resultan iguales, pero mientras el desarrollo de las sucesivas cuotas de interés decrece por tratarse de un sistema sobre saldos donde el acreedor reconoce las amortizaciones periódicas que efectúa el deudor, estas últimas cancelaciones de capital se incrementan gradualmente en la cuantía de las disminuciones de los intereses.

Para abordar el cálculo de la cuota (de servicio) de este sistema, partimos de la fórmula para determinar el valor actual de una renta:

$$V_{n\rangle}i = \frac{C}{i} \times \left[1 - (1+i)^{-n}\right]$$

$$despejando\ C$$

$$C = \frac{V_0 \times i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

En el siguiente cuadro de marcha, vemos la evolución del préstamo de $4.000 valuado al 2 % mensual.
Será cancelado en diez cuotas (de servicio constante), podemos apreciar el valor de las cuotas de capital, cuotas de interés y cuotas de servicio, así como también la evolución del saldo de deuda cada vez que se cancelan las cuotas:

Orden	Vn	Ch	Th	Ih
0	4000	---	---	---
1	3634,7	445,3	365,3	80
2	3262,1	445,3	372,6	72,7
3	2882	445,3	380,1	65,2
4	2494,3	445,3	387,7	57,6
5	2098,9	445,3	395,4	49,9
6	1695,6	445,3	403,3	42
7	1284,2	445,3	411,4	33,9
8	864,6	445,3	419,6	25,7
9	436,5	445,3	428	17,3
10	0	445,3	436,6	8,7
		4453,1	4000	453,1

Con el cuadro a la vista, podemos extraer algunas conclusiones:

1- Mientras las sucesivas cuotas de interés disminuyen (por tratarse de un sistema sobre saldos), el "espacio que ceden" los intereses es "ocupado" por el capital, de este modo se mantiene constante el desembolso periódico (cuota de servicio).
2- La primer cuota de interés ($80) coincide en su importe con el resto de los sistemas vistos hasta aquí, cuando se trata de evaluar las mismas condiciones crediticias en forma comparativa.
3- Para reconocer fácilmente la cuota de capital siguiente, bastará con multiplicar la precedente por un factor (1+i), por ejemplo, para conocer el valor de t2 basta con conocer t1 y multiplicarlo por 1,02, asimismo, por tratarse de un régimen compuesto, conocido t1 podremos conocer t3 multiplicando al primero por $(1+i)^2$ y así sucesivamente en forma ascendente o descendente, por lo que arribamos al valor de t5 si conocemos t9, al dividir a este último por 1,02.
4- La relación que existe entre la cuota de servicio (C_h) y la primera cuota de amortización (t_1) es la misma que hallamos al determinar el monto compuesto (C_n) a partir del capital original (C_0):

$$C_0 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ C_n$$
$$t_1 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ C_h$$

Siendo: $C_h = t_1 \times (1+i)^n$

En nuestro ejemplo: $445{,}30 = 365{,}30 \times (1{,}02)^{10}$

b.4) Sistema progresivo

Este sistema se relaciona estrechamente con el concepto de progresiones aritméticas, tanto o más que el propio sistema alemán. Su particularidad radica en que el capital amortizado crece en tanto disminuye cada cuota de interés (tal como ocurre con el sistema francés, pero a distinto ritmo); el deudor comienza abonando pequeñas sumas en concepto de capital para ir incrementándose a lo largo de la evolución de las cuotas. Una vez expuestas las fórmulas particulares para este sistema, procederemos a la explicación de la conformación de su cuadro de marcha.

Cuotas de amortización:

$$t_1 = V_0 \times f_1$$

$$t_h = h \times t_1 \qquad t_1 = \frac{V_0 \times f_h}{h}$$

$$t_h = V_0 \times f_h \qquad t_1 = \frac{2 \times V_0}{n^2 + n}$$

Donde:

$$f_1 = \frac{1}{\frac{(1+n)\times n}{2}} \qquad f_h = h \times f_1$$

Cuotas de interés:

$$I_h = \left[\frac{(1+n)\times n}{2} - \frac{h}{2}\times(h-1)\right]\times i \times t_1$$

$$I_1 = V_0 \times i \qquad I_h = \frac{V_0 \times i}{n^2+n}\times\left(n^2 + n - h^2 + h\right)$$

$$I_h = V_0 \times i \times \left(1 - \frac{h^2 - h}{n^2 + n}\right)$$

Valor actual: $$V_0 = \frac{t_1 + t_n}{2} \times n$$

Saldo de deuda: $$S.D = \left[\frac{n^2 + n}{2} - \frac{h^2 + h}{2}\right] \times t_1$$

Reemplazando en t_1 por su igualdad:

$$S.D. = \left[\frac{n^2 + n - h^2 - h}{\cancel{2}}\right] \times V_0 \times \frac{\cancel{2}}{n^2 + n}$$

Finalmente:

$$S.Deuda = V_0 \times \left(1 - \frac{h^2 + h}{n^2 + n}\right)$$

Total de intereses: $$TI = V_0 \times i \times \left(1 + \frac{n-1}{1{,}5}\right)$$

Contando con las variables adecuadas, calculamos el valor del factor de evolución del proceso de amortización (f_1) relacionado a la evolución de una progresión aritmética. Para el ejemplo que venimos desarrollando, con un capital original de $4.000, tasa periódica del 2 % y diez pagos, resolvemos el valor de f_1:

$$f_1 = \frac{1}{\frac{(1+10)\times 10}{2}}$$

$$f_1 = 0{,}0181818$$

Una vez disponible el valor de f_1, podemos proyectar para cada periodo su propio factor al multiplicar f_1 por el orden correspondiente (h), es así que el 2.^{do} factor resultará de multiplicar $f_1x2=0,0363636$, el 3.er factor será $f_1x3=0,0545455$ y así sucesivamente. Luego, a partir de f_1, establecemos el valor de t_1, siendo $t_1=V_0xf_1$, tenemos que $t_1=4000x0,0181818$, siendo $t_1=72,73$ según nuestro ejemplo.

A partir de entonces, podrán calcularse los sucesivos valores de t, ya sea multiplicando V_0 (como constante) por el propio factor correspondiente al orden "h", o bien, multiplicando a t_1 por el valor "h" correspondiente (ya que su crecimiento es lineal y constante).

En lo que respecta a la evolución de los intereses (decrecientes), estos serán calculados a partir del saldo de deuda una vez cancelada la cuota de amortización previa, al interés de orden "h" que se desea conocer. A efecto de calcular analíticamente el total de intereses, utilizamos la fórmula ya descripta, donde:

$$TI = V_0 \times i \times \left(1 + \frac{n-1}{1,5}\right)$$

$$TI = 4000 \times 0,02 \times \left(1 + \frac{10-1}{1,5}\right)$$

$$TI = \$560$$

Orden	Vn	Ch	Th	Ih	Factor
0	4000	---	---	---	
1	3927,27	152,73	72,73	80	*0,0181818*
2	3781,82	224,00	145,45	78,55	*0,0363636*
3	3563,64	293,82	218,18	75,64	*0,0545455*
4	3272,73	362,18	290,91	71,27	*0,0727273*
5	2909,09	429,09	363,64	65,45	*0,0909091*
6	2472,73	494,55	436,36	58,18	*0,1090909*
7	1963,64	558,55	509,09	49,45	*0,1272727*
8	1381,82	621,09	581,82	39,27	*0,1454545*
9	727,27	682,18	654,55	27,64	*0,1636364*
10	0,00	741,82	727,27	14,55	*0,1818182*
		4560,00	4000	560	*1*

Como observación, podemos notar que representa un sistema que genera un gran desembolso en concepto de intereses, no lo consideramos más oneroso que el resto de los sistemas sobre saldos (a excepción del americano), dado que el deudor utiliza el capital ajeno durante más tiempo que en los sistemas alemán y francés a modo de ejemplo, hecho que incluso genera beneficios adicionales como el “apalancamiento” o efecto Leverage que será comentado más adelante.

b.5) Sistema de cuotas constantes con intereses promediados y cargados al préstamo

Posee alguna similitud con el sistema alemán en cuanto al valor de sus cuotas amortizadas en forma constante, y aunque al igual que en el sistema de intereses directos las cuotas de interés son todas iguales entre sí (también constantes), este sistema se calcula sobre saldos. Sus fórmulas relevantes se describen a continuación.

Cuota de amortización del capital:

$$t_h = \frac{V_0}{n}$$

Cuota de interés:

$$I_h = \frac{V_0 \times i}{2 \times n} \times (n+1)$$

Total de intereses:

$$TI = n \times I_h$$

$$TI = \frac{V_0 \times i \times \cancel{n}}{2 \times \cancel{n}} \times (n+1)$$

$$TI = \frac{V_0 \times i}{2} \times (n+1)$$

Tasa de interés de periodo "h":

$$i_h = \frac{I_h}{V_{n-h+1}}$$

El ejercicio anteriormente detallado, con una deuda de $4.000 valuada al 2 % efectivo y periódico, para ser cancelada en diez cuotas periódicas será desarrollado a modo de ejemplo para esta modalidad en el próximo gráfico:

Orden	Tasa(i_h)	Vn-h	Ch	Th	Ih
0		4000	---	---	---
1	0,011000	3600	440	400	44
2	0,012222	3200	440	400	44
3	0,013750	2800	440	400	44
4	0,015714	2400	440	400	44
5	0,018333	2000	440-	400	44
6	0,022000	1600	440	400	44
7	0,027500	1200	440	400	44
8	0,036667	800	440	400	44
9	0,055000	400	440	400	44
10	0,110000	----	440	400	44
			4440	4000	440

Para comprender este sistema en particular y elaborar correctamente el cuadro de marcha, se puede iniciar con el cálculo de la cuota constante de interés:

$$I_h = \frac{4000 \times 0{,}02}{2 \times 10} \times (10+1)$$

$$I_h = 44$$

Resta completar la columna del capital amortizado, sumando cuota a cuota cada periodo (serán todos iguales) y cargar la columna de la cuota de servicio C_h; el saldo de deuda se deberá completar al descontar en cada periodo el importe constante amortizado ($400 en nuestro ejemplo). Lleva especial mención la columna dedicada a visualizar la tasa de interés efectivamente cargada a cada periodo que comienza siendo inferior a la tasa pactada y luego se incrementa paulatinamente hasta superarla ampliamente en el último tramo; esto beneficia a aquel deudor que decidiera realizar una cancelación anticipada en una etapa temprana del periodo de endeudamiento, dado que obtendría una ventaja considerable frente al acreedor, hecho que generalmente no se encuentra contemplado en los contratos así pactados, dado que la balanza resultaría desfavorable a este último e iría en detrimento del principio de equidad o equilibrio financiero de las partes, tanto es así que al observar el total de intereses abonados una vez concluido el préstamo resulta igual al total de intereses que un deudor abonaría contratando la misma deuda por sistema alemán (incluso las fórmulas que permiten su cálculo resultan idénticas).

b.6) Sistema áureo

Se trata de un sistema cancelatorio de deudas basado en la tradicional amortización de capital y carga de intereses sobre saldos para ser aplicado a las transacciones financieras, vinculado a la reconocida serie de Fibonacci o serie "áurea" (de allí su denominación).

Bajo las condiciones de este sistema de amortización basado en la reconocida serie de Fibonacci se resuelve parte de la deuda en el tramo comprendido entre las cuotas de orden 1 a $n-1$, para luego liquidarse por completo en el periodo n como relación=$1-\frac{1}{\phi}$ de la deuda original, de forma de preservar la "armonía dorada".

<u>Sus variables</u>
El deudor que contrata un crédito bajo estas condiciones estaría abonando capital durante los n-1 términos iniciales, por un total de $\frac{V_0}{(n-1)\times\phi}$, y debe desembolsar en el periodo n $V_0\times\left(1-\frac{1}{\phi}\right)$ como capital residual.

En todo momento, el acreedor recibe con cada cuota de servicio (esto es $t_h=\frac{V_0}{(n-1)\times\phi}$) los intereses correspondientes al saldo previo de deuda como ocurre en cualquier otro sistema sobre saldos.

Como detalle particular, este sistema mantiene el residuo de capital impago ($V_0 \times \left(1 - \frac{1}{\phi}\right)$) luego de cancelada la cuota n-1, por lo que en todo sistema de estas características deberá cancelarse el saldo en el periodo n, así se verá satisfecha la restitución del capital original hacia el acreedor.
Durante el plazo 1 a $n-1$, el deudor amortizará el capital original como ya fuera expuesto, es decir:

$$t_h = \frac{V_0}{(n-1) \times \phi}$$

Siendo:

$$t_n = V_0 \times \left(1 - \frac{1}{\phi}\right)$$

Para reconocer el saldo de deuda, convenimos que:

$$S - Deuda = V_0 - h \times \frac{V_0}{(n-1) \times \phi}$$

Aquí se pude observar que se deduce de la deuda original, tanto las cuotas posteriores impagas (primer término del corchete), así como el capital residual a extinguirse en el periodo n+1, de donde finalmente:

$$S - Deuda = V_0 \left[1 - \frac{h}{(n-1) \times \phi}\right]$$

$$\boxed{para: h < n}$$

Como ocurre en la mayoría de los sistemas de amortización sobre saldos (no todos), el deudor abona intereses que aplican la tasa pactada al saldo de deuda inmediatamente anterior al del orden de la cuota que cancela:

$$I_1 = V_0 \times i$$

$$I_h = SD_{h-1} \times i$$

$$I_h = \frac{V_0 \times i}{\phi} \times \left[\left(\frac{n-1-h+1}{n-1} - 1 \right) + \frac{1}{\phi} \right]$$

$$I_h = \frac{V_0 \times i}{\phi} \times \left(\frac{n-h}{n-1} + \frac{1}{\phi} \right)$$

Finalmente, aplicando el concepto de progresiones aritméticas, el total de intereses surge de la siguiente expresión:

$$TI^{Aureo} = \frac{V_0 \times i - V_0 \times i \times \left(1 - \frac{1}{\phi} \right)}{2} \times (n-1+1)$$

$$TI^{Aureo} = V_0 \times i \times \left(1 - 1 - \frac{1}{\phi} \right) \times (n)$$

$$TI^{Aureo} = \frac{V_0 \times i \times n}{2} \times \left(2 - \frac{1}{\phi} \right)$$

A partir del ejercicio modelo, podemos calcular sus variables:

$$t_h = \frac{V_0}{(n-1)\times\phi} \qquad t_h = \frac{4000}{(10-1)\times 1,6180334}$$

$$t_h = \$274,68$$

$$t_n = V_0 \times \left(1 - \frac{1}{\phi}\right) \qquad t_n = 4000 \times \left(1 - \frac{1}{1,6180334}\right)$$

$$t_n = \$1527,88$$

$$TI^{Aureo} = \frac{V_0 \times i \times n}{2} \times \left(2 - \frac{1}{\phi}\right)$$

$$TI^{Aureo} = \frac{4000 \times 0,02 \times 10}{2} \times \left(2 - \frac{1}{1,618034}\right)$$

$$TI^{Aureo} = \$552,79$$

Quedando así conformado el cuadro de marcha:

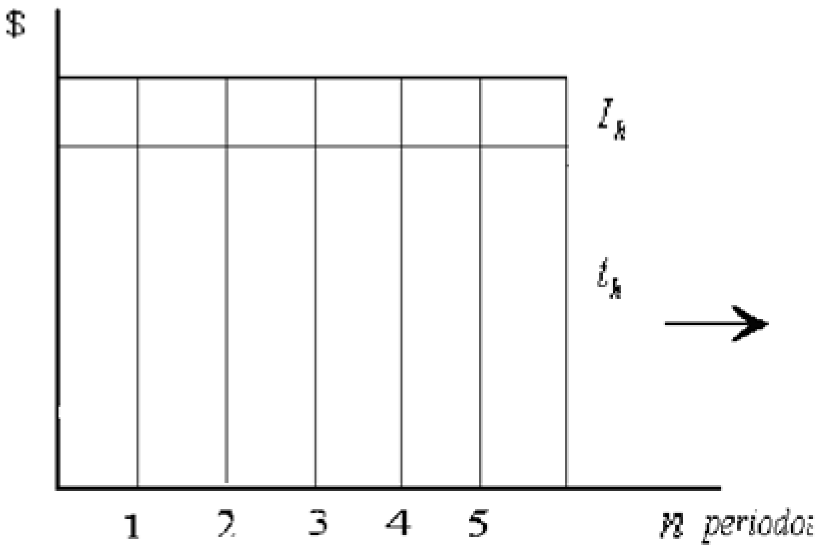
Orden	Vn	Ch	Th	Ih
0	4000,00	---	---	
1	3752,32	354,68	274,68	80,00
2	3450,64	349,19	274,68	74,51
3	3175,96	343,69	274,68	69,01
4	2901,28	338,20	274,68	63,52
5	2626,60	332,71	274,68	58,03
6	2351,92	327,21	274,68	52,53
7	2077,24	321,72	274,68	47,04
8	1802,56	316,22	274,68	41,54
9	1527,88	310,73	274,68	36,05
10	0	1558,44	1527,88	30,56
		4552,79	4000,00	552,79

Una vez estudiados estos sistemas en forma independiente, estamos en condiciones de observar el comportamiento comparativo de sus principales variables, es decir, sus cuotas de servicio C_h, sus cuotas de capital, t_h y sus cuotas de interés I_h, ya sea que en sus respectivas evoluciones presenten decrecimientos $(\downarrow)$, acrecentamientos $(\uparrow)$, permanezcan constantes (K) o bien, resulten nulos $(\emptyset)$ como podemos observar en la siguiente matriz:

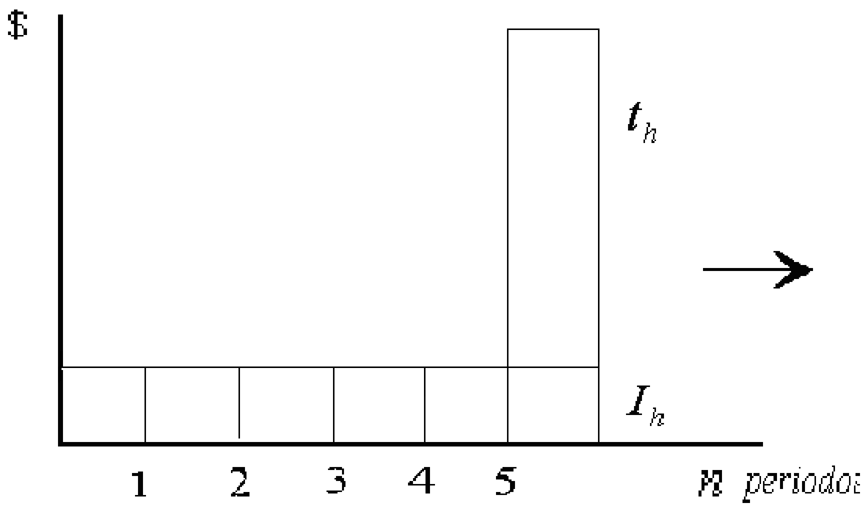
sistema\concepto	Ch	th	Ih
FRANCES	↓	K	↓
FRANCES	K	↑	↓
INT.PROMEDIADOS	K	K	K
PROGRESIVO	↑	↑	↓
AUREO	K	K	↓
AMERICANO	K	O	K
INT.DIRECTOS	K	K	K

Los gráficos que reflejan la evolución de cada sistema, se puede observar a continuación:

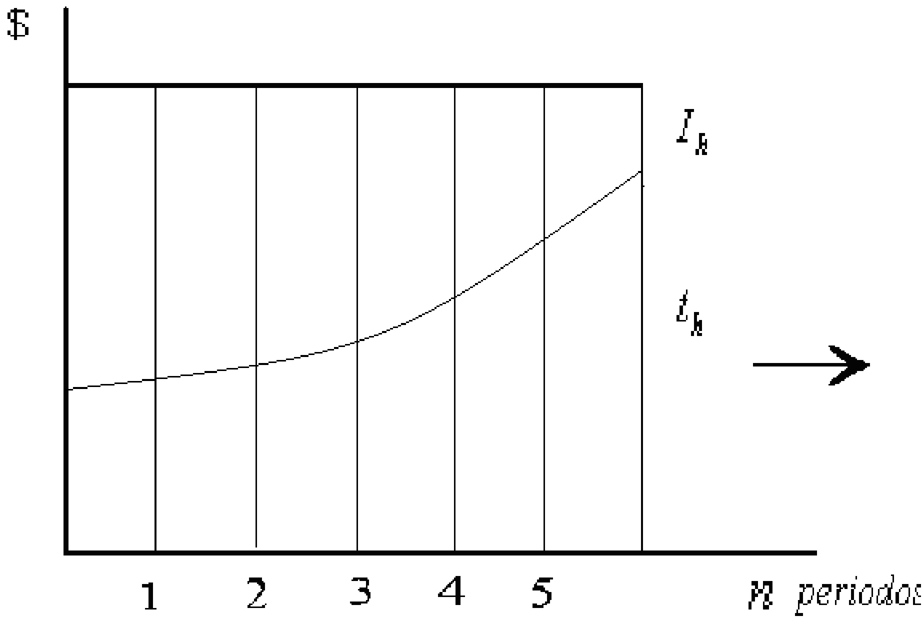
Sistema intereses directos



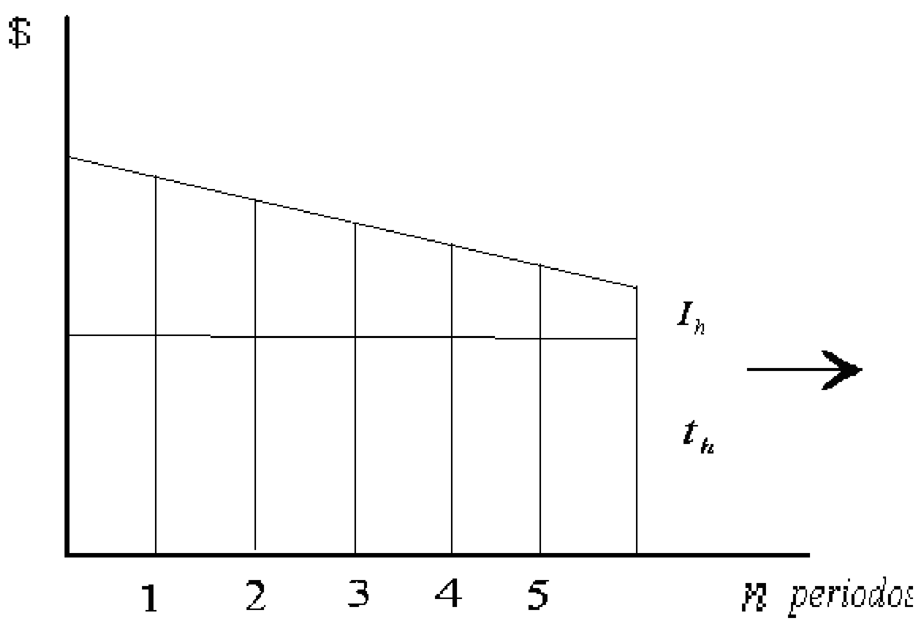
Sistema americano



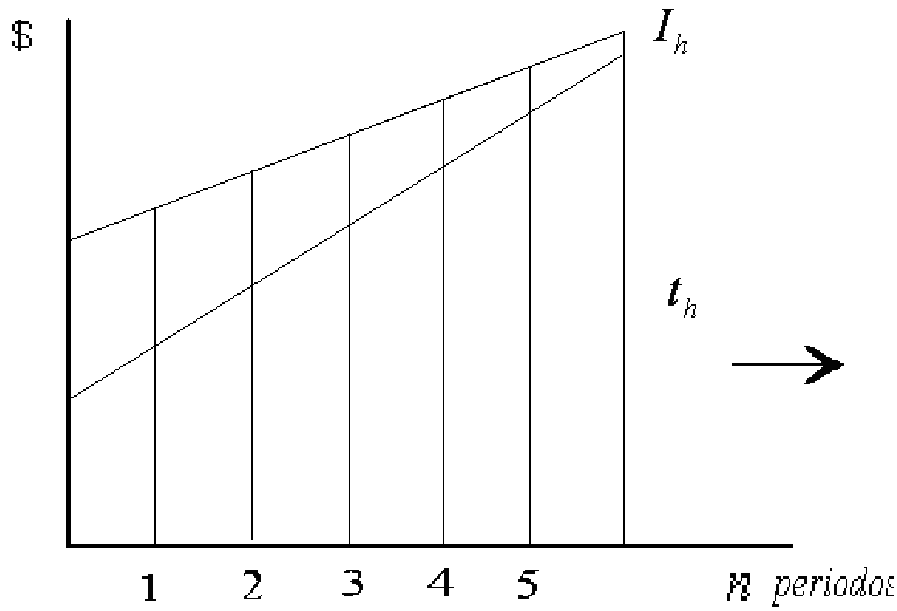
Sistema francés



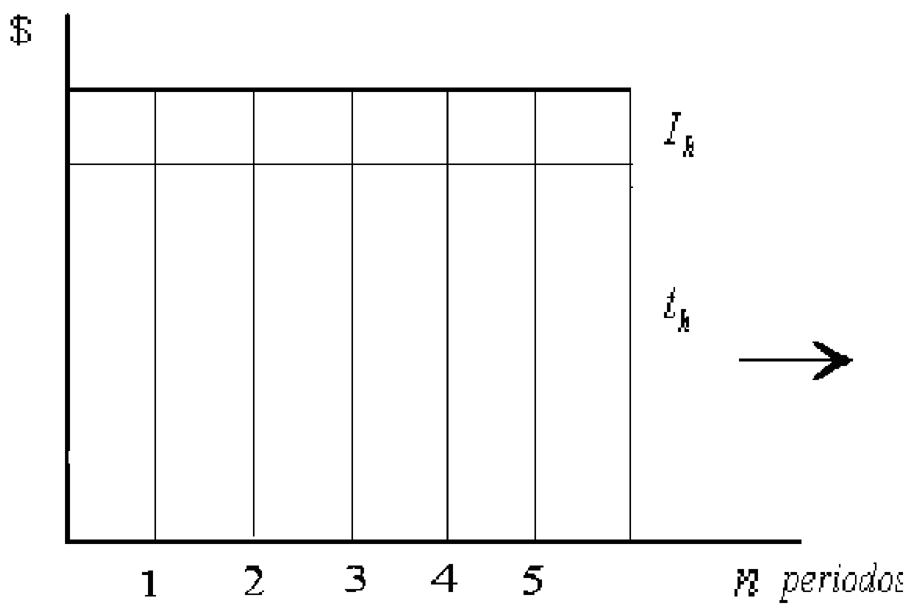
Sistema alemán



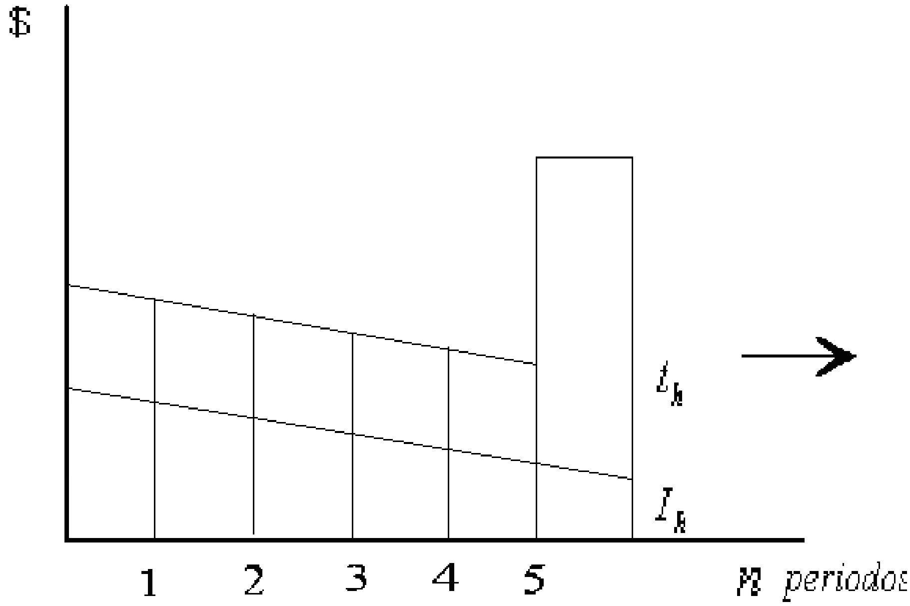
Sistema progresivo



Sistema interés promediado



Sistema áureo



Anexo:

Trabajo presentado en las XXX Jornadas Nacionales de Matemática Financiera (San Miguel de Tucumán, octubre de 2009).

SISTEMA DE AMORTIZACIÓN ÁUREO

BREVE DESCRIPCIÓN

Se trata de un sistema cancelatorio de deudas basado en la tradicional amortización de capital y carga de intereses sobre saldos para ser aplicado a las transacciones financieras, vinculado a la reconocida serie de Fibonacci o serie "áurea" (de allí su denominación).

La abundante bibliografía relacionada a esta famosa serie ha dado cuenta de innumerables aplicaciones en todos los ámbitos científicos, biológicos, arquitectónicos, artísticos, etc., por lo que consideré apropiado rendirle tributo como homenaje en el terreno de la matemática financiera.

El sistema cuenta con todas las variables necesarias para ser comprendido y analizado conceptualmente, con la posibilidad de elaborar un cuadro de marcha particular y reconocer en forma analítica cada una de estas variables mediante el empleo de un conjunto de fórmulas propias.

Esto permite reconocer el valor de cada cuota de capital, interés, y/o servicio (th, Ih y Ch, respectivamente), el total de intereses a pagar y el saldo de deuda, tal como ocurre en otros sistemas de amortización.

Asimismo, reúne todas las características de equilibrio financiero necesarias para transacciones donde ninguna de las partes (deudora o acreedora) se vea beneficiada en detrimento de su contraparte, es decir, como se comentara previamente, constituye un verdadero sistema sobre saldos en los cuales los deudores abonan solo el interés sobre el capital residual, es decir, sobre la deuda original a la que se le han deducido las amortizaciones periódicamente practicadas en orden a un método de cálculo.

VENTAJAS FINANCIERAS DEL SISTEMA

La posibilidad de su utilización como sistema crediticio se fundamenta en la holgura con que un deudor puede afrontar un crédito calculado por este método, sin perjudicar los genuinos intereses del acreedor, por lo que bien podría generar aplicaciones concretas y satisfacer tanto operaciones públicas como privadas.

A grandes rasgos, el deudor abona pequeñas cuotas de capital constante durante los n-1 periodos, cancela solo (en valores aproximados) el 60 % de la deuda y quedar suspendido el pago del 40 % restante para el periodo adicional, donde podría optar por tomar una nueva financiación en similares condiciones por este residuo pendiente, o bien cancelarlo definitivamente.

EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Caso A

Existen en el mercado automotor planes ampliamente difundidos de cancelaciones parciales a través de los denominados "planes de ahorro", pero estos posponen la entrega del bien por algún tiempo o demandan una cierta suma de dinero para reunirse con el bien, a través de sorteos o licitaciones.

Si suponemos bajo estas condiciones la adquisición de un vehículo amortizable en cinco años, podemos inferir que conservando su bien desde el inicio de la operación el deudor estaría en condiciones de cancelar la deuda, liquidando su capital sin ningún inconveniente o al entregarlo al acreedor para obtener una nueva unidad (en parte, como ocurre con algunos contratos de *leasing*) al momento de extinguirse el plazo acordado.

Caso B

La adquisición de inmuebles con financiación bien podría ajustarse a las expectativas de este sistema, en tanto se abonan cuotas por un periodo determinado, al permanecer pendiente el saldo final hasta el momento de la firma de la escritura traslativa del dominio, calculado el residual, en relación a la proporción que determina la mecánica del propio sistema.

ANTECEDENTES MATEMÁTICOS: LA SERIE FIBONACCI

Sin entrar en particularidades de esta serie matemática universalmente reconocida, la secuencia:

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,\ldots\ldots\ldots$$

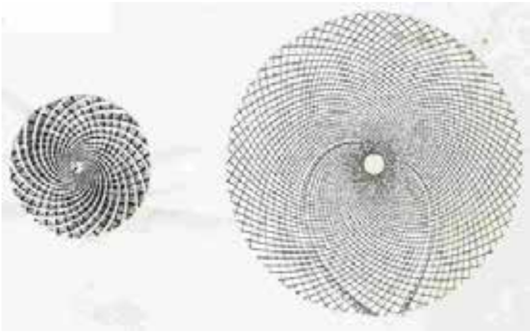
da cuenta de su existencia, al considerar que cada término se nutre de la sumatoria de sus dos valores precedentes inmediatos, así 1(más 0) como primer término da lugar al término de segundo orden, es decir 1, luego 2+1=3, 3+2=5, 5+3=8, etc.

La siguiente característica que deriva de esta serie es la relación que existe al dividir un cierto término por el valor que le precede; esta relación se aproxima a un número que tiende a infinito (tal como ocurre con $\pi = 3{,}141592654\ldots\ldots.$).
Siendo
$1/1 = 1; 2/1 = 0{,}5; 3/2 = 1{,}5; 5/3 = 1{,}\widehat{6}; 8/5 = 1{,}6; 13/8 = 1{,}625; 21/13 = 1{,}6153846; 34/21 = 1{,}6190476\ldots.$

A medida que avanzamos en la serie, dicho número se hace evidente en esta relación. El número en cuestión se denomina $\phi(Phi = 1{,}618033989\ldots.)$ reconocido en el mundo de las matemáticas por sus particularidades distintivas.

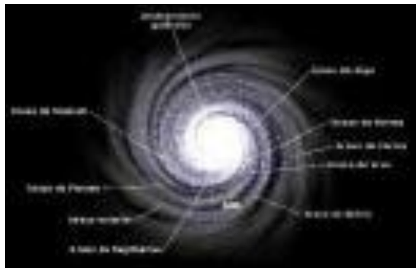
Dicho número que se obtiene de la siguiente expresión: $\phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, tiene algunas cualidades intrigantes, como por ejemplo, al calcular su inversa obtenemos como resultado $\phi - 1$, siendo que $\dfrac{1}{\phi} = \dfrac{2}{\sqrt{5}+1} = \phi - 1 = 0{,}618033989\ldots..$ también, si lo elevamos al cuadrado y le restamos 1, volvemos a obtener el mismo número: $\phi^2 - 1 = \left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 = \phi$

El Triángulo de Pascal contiene esta secuencia y en muchas otras relaciones puede verificarse la serie en el ámbito de las matemáticas.
Esta misma serie se encuentra también presente en muy diversos estados de la naturaleza, por ejemplo, las semillas de margarita (fig. izq.) y las del girasol (fig. der.) indican dos números contiguos Fibonacci (21-34 y 55-89 respectivamente) que permiten representar la conocida **espiral logarítmica** que proviene de esta serie.

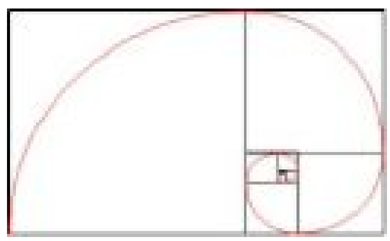


El caparazón del molusco conocido como nautilus, como puede observarse a continuación, mantiene la misma relación.

El escurrimiento del agua en movimiento, como observamos frecuentemente al dejar correr el grifo del lavatorio es un ejemplo cotidiano de dicha representación. Por último, y para no hacer inagotable la lista, la imagen siguiente representa la Vía Láctea que ¿nueva casualidad? responde al patrón de la relación áurea.

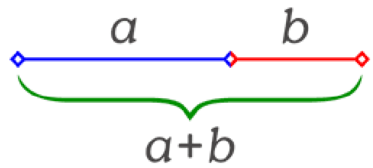


Estas relaciones permiten resolver el problema de establecer qué proporciones son necesarias para elaborar *ad infinitum* rectángulos proporcionados contenidos uno dentro del otro, entre los cuales se verifique que el lado menor del inmediato mayor resulte igual al lado mayor del rectángulo menor (aunque parezca un trabalenguas, vale observar las siguientes imágenes):

Podemos apreciar en la segunda figura que el trazo de ¼ de círculo en cada sector va conformando la espiral aludida, asigna progresivamente 0,61803399… $\left(\frac{1}{\phi}\right)$ al arco mayor y 0,381966… $\left(1-\frac{1}{\phi}\right)$ al arco menor, así quedará desarrollado.
En consecuencia, quedará representado un cuadrado de proporción $\frac{1}{\phi}\times\frac{1}{\phi}$ cada vez que se resuelva un nuevo sector.

En la gráfica siguiente podemos observar las proporciones aludidas, al ser una *SECCIÓN ÁUREA* la división en dos de un segmento según proporciones dadas por el número áureo. La longitud total ***a+b*** es al segmento más largo ***a*** como ***a*** es al segmento más corto ***b.*** Para $a = \frac{1}{\phi}$ y $b = \frac{\phi - 1}{\phi}$, donde $a + b = 1$



Estas y otras tantas curiosidades, aplicaciones y estados de la naturaleza que reflejan la aparición de esta serie, y en particular este número ϕ, le han valido el nombre de "el número de Dios", "número de oro", "serie dorada" y otras tantas denominaciones de connotaciones divinas.

DESARROLLO DEL SISTEMA ÁUREO

Al haber el lector tomado contacto con los párrafos precedentes, estará en condiciones de estimar los alcances de este sistema de amortización basado en la serie ya descripta donde se resuelve la operación de forma que se cancela atomizadamente parte de la deuda en el tramo comprendido entre las cuotas de orden 1 a $n-1$, para luego liquidarse por completo en el periodo n, como relación=$1-\frac{1}{\phi}$ de la deuda original, de forma de preservar la "armonía dorada".

<u>Sus variables</u>

El deudor que contrata un crédito bajo estas condiciones estaría abonando capital durante los n-1 términos iniciales por un total de $\frac{V_0}{(n-1)\times\phi}$, y debería desembolsar en el periodo n $V_0\times\left(1-\frac{1}{\phi}\right)$ como capital residual.

En todo momento, el acreedor recibe con cada cuota de servicio (esto es $t_h=\frac{V_0}{(n-1)\times\phi}$) los intereses correspondientes al saldo previo de deuda como ocurre en tantos otros sistema sobre saldos.

Como detalle particular, este sistema mantiene el residuo de capital impago ($V_0\times\left(1-\frac{1}{\phi}\right)$) luego de cancelada la cuota n-1, por lo que en todo sistema de estas características deberá cancelarse el saldo en el periodo n, así se verá satisfecha la restitución del capital original hacia el acreedor.

Durante el plazo 1 a $n-1$, el deudor amortizará el capital original como ya fuera expuesto, es decir:

$$t_h = \frac{V_0}{(n-1)\times\phi}$$

Siendo:

$$t_n = V_0 \times \left(1 - \frac{1}{\phi}\right)$$

Para reconocer el saldo de deuda, convenimos que:

$$S-Deuda = V_0 - h \times \frac{V_0}{(n-1)\times\phi}$$

Aquí se pude observar que se deducen de la deuda original las cuotas de capital (t_1 a t_{n-1}), de donde finalmente:

$$S-Deuda = V_0\left[1 - \frac{h}{(n-1)\times\phi}\right]$$

$$\boxed{para: h < n}$$

Como ocurre en la mayoría de los sistemas de amortización sobre saldos (no todos), el deudor abona intereses aplicando la tasa pactada al saldo de deuda inmediatamente anterior al orden de la cuota que cancela:

$$I_1 = V_0 \times i$$

$$I_h = SD_{h-1} \times i$$

$$I_h = \frac{V_0 \times i}{\phi} \times \left[\left(\frac{n-\cancel{1}-h+\cancel{1}}{n-1} - 1\right) + \frac{1}{\phi}\right]$$

$$I_h = \frac{V_0 \times i}{\phi} \times \left(\frac{n-h}{n-1} + \frac{1}{\phi} \right)$$

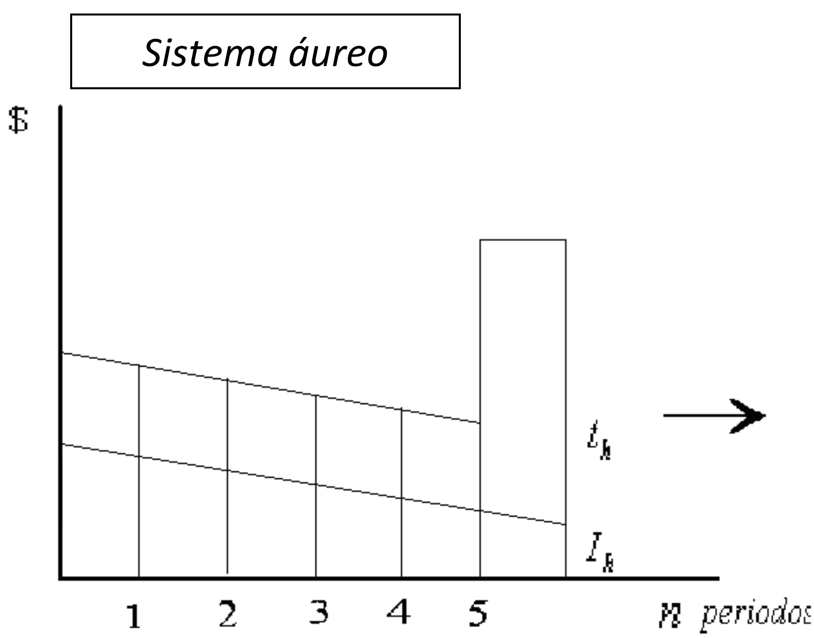
Finalmente, aplicando el concepto de progresiones aritméticas, el total de intereses surge de la siguiente expresión:

$$TI^{Aureo} = \frac{V_0 \times i + V_0 \times i \times \left(1 - \frac{1}{\phi}\right)}{2} \times n$$

$$TI^{Aureo} = \frac{V_0 \times i \times n \times \left(1 + 1 - \frac{1}{\phi}\right)}{2}$$

$$TI^{Aureo} = \frac{V_0 \times i \times n}{2} \times \left(2 - \frac{1}{\phi}\right)$$

Representación gráfica del sistema



CASO DE EJEMPLO

Se desea cancelar una deuda de $3.600 por sistema áureo, valuada al 2 % efectivo mensual, en 18 cuotas mensuales. Confeccionar el cuadro de marcha y resolver analíticamente el interés que se abona en la cuota ocho, el total de intereses y el saldo de deuda inmediatamente después de abonada la cuota de orden 12.

Solución:

Orden	Vni	ch	th	Ih	%	K
0	3600,00				0,02	0,618033989
1	3469,12	202,88	130,88	72,00	0,02	0,618033989
2	3338,24	200,26	130,88	69,38	0,02	0,618033989
3	3207,37	197,64	130,88	66,76	0,02	0,618033989
4	3076,49	195,03	130,88	64,15	0,02	0,618033989
5	2945,61	192,41	130,88	61,53	0,02	0,618033989
6	2814,73	189,79	130,88	58,91	0,02	0,618033989
7	2683,86	187,17	130,88	56,29	0,02	0,618033989
8	2552,98	184,55	130,88	53,68	0,02	0,618033989
9	2422,10	181,94	130,88	51,06	0,02	0,618033989
10	2291,22	179,32	130,88	48,44	0,02	0,618033989
11	2160,34	176,70	130,88	45,82	0,02	0,618033989
12	2029,47	174,08	130,88	43,21	0,02	0,618033989
13	1898,59	171,47	130,88	40,59	0,02	0,618033989
14	1767,71	168,85	130,88	37,97	0,02	0,618033989
15	1636,83	166,23	130,88	35,35	0,02	0,618033989
16	1505,96	163,61	130,88	32,74	0,02	0,618033989
17	1375,08	161,00	130,88	30,12	0,02	0,618033989
18	0,00	1402,58	1375,08	27,50	0,02	0,618033989
		4495,51	3600,00	895,51		

Para calcular la cuota de capital (periodos 1 a 17):

$$t_h = \frac{V_0}{(n-1)\times\phi}$$

$$t_h = \frac{3600}{(18-1)\times 1{,}618033989} \qquad t_h = \$130{,}88$$

Amortización del periodo n:

$$\mathrm{Re}sidual(n) = V_0 \times \left(1-\frac{1}{\phi}\right)$$

$$\mathrm{Re}sidual(n) = 3600 \times 0{,}381966$$

$$\mathrm{Re}sidual(n) = \$1375{,}08.-$$

Para identificar la cuota de interés de orden ocho:

$$I_h = \frac{V_0 \times i}{\phi} \times \left(\frac{n-h}{n-1} + \frac{1}{\phi}\right)$$

$$I_8 = 3600 \times 0{,}02 \times \left(\frac{18-8}{18-1} + \frac{1}{1{,}618033989}\right)$$

$$I_8 = \$53{,}68$$

Para reconocer el total de intereses:

$$TI^{Aureo} = \frac{V_0 \times i \times n}{2} \times \left(2-\frac{1}{\phi}\right)$$

$$TI^{Aureo} = \frac{3600 \times 0{,}02 \times 18}{2} \times (2-0{,}618033989)$$

$$TI^{Aureo} = \$895{,}51$$

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE SISTEMAS DE AMORTIZACIÓN

- Para cancelar una deuda de $12.000 se pacta abonar seis cuotas mensuales e iguales, al 4 % mensual directo. Calcular el importe de estas.

SOLUCIÓN:

Se trata de un sistema de intereses directos, donde:

$$C_h = t_h + I_h$$
$$C_h = \frac{V_0}{n} + V_0 \times i$$
$$C_h = \frac{12000}{6} + 12000 \times 0{,}04$$
$$C_h = \$2480$$

- Una cierta deuda se pacta cancelar por sistema de intereses directos en ocho cuotas mensuales e iguales de $3.000. Si la tasa de la operación resultó del 2 % mensual, calcular el importe de esa deuda y el total de intereses de la operación.

SOLUCIÓN:

$$C_h = V_0 \times \left(\frac{1}{n} + i \right)$$
$$V_0 = \frac{3000}{\left(\frac{1}{8} + 0{,}02 \right)}$$
$$V_0 = \$20689{,}66$$

$$TI = V_0 \times i \times n$$
$$TI = 20689{,}66 \times 0{,}02 \times 8$$
$$TI = 3310{,}34$$

- Una deuda de $12.000 será cancelada mediante 48 cuotas iguales y mensuales por sistema cuota de servicio constante. La tasa de la operación se pactó en el 1,5 % efectivo mensual. Calcular el importe de dichas cuotas.

SOLUCIÓN:

$$C = \frac{V_0 \times i}{1-(1+i)^{-n}}$$
$$C = \frac{12000 \times 0{,}015}{1-1{,}015^{-48}}$$
$$C = \$352{,}50$$

- Para cancelar una cierta deuda, un prestamista propone abonar seis pagos iguales y mensuales de $800, valuando la operatoria al 2,4 % mensual por sistema francés. Calcular el valor de la deuda original y confeccionar el cuadro de marcha.

SOLUCIÓN:

$$V = \frac{800}{0{,}024} \times \left(1-1{,}024^{-6}\right)$$
$$V = \$4421{,}28$$

Periodos	Vn>i	Ch	th	Ih
0	4421,28			
1	3727,39	800,00	693,89	106,11
2	3016,85	800,00	710,54	89,46
3	2289,25	800,00	727,60	72,40
4	1544,19	800,00	745,06	54,94
5	781,26	800,00	762,94	37,06
6	0	800,00	781,25	18,75
		4800,00	4421,27	378,73

- Un prestatario contrae una deuda de $9.000 a cancelarse en cinco pagos mensuales por sistema alemán, valuando la operación al 3 % mensual. Armar el correspondiente cuadro de marcha y definir el costo financiero de la operación.

SOLUCIÓN:

Periodos	Vn>i	Ch	th	Ih
0	9000,00			
1	7200,00	2070,00	1800,00	270,00
2	5400,00	2016,00	1800,00	216,00
3	3600,00	1962,00	1800,00	162,00
4	1800,00	1908,00	1800,00	108,00
5	0,00	1854,00	1800,00	54,00
		0,00	9000,00	810,00

Como puede observarse en el cuadro de marcha, en la última columna se totalizan los intereses abonados en esta ocasión, los que pueden calcularse analíticamente al emplear la fórmula ya explicada:

$$TI_{aleman} = \frac{9000 \times 0{,}03}{2} \times (5+1)$$

$$TI_{aleman} = \$810$$

- Sabiendo que la primera cuota de servicio de un total de diez pagos mensuales por sistema cuota capital constante fue de $1.300, calcular el valor de la deuda original, confeccionar el cuadro de marcha de las últimas cinco cuotas y calcular el total de intereses de la operación, si ella fue valuada al 3 % efectivo mensual.

SOLUCIÓN:

$$1300 = V_0 \times \left(\frac{1}{10} + 0{,}03 \right)$$

$$V_0 = \$10000$$

$$TI_{aleman} = \frac{10000 \times 0{,}03}{2} \times (10 + 1)$$

$$TI_{aleman} = \$1650$$

Periodos	Vn>i	Ch	th	Ih
5	5000	--	--	--
6	4000	1150	1000	150
7	3000	1120	1000	120
8	2000	1090	1000	90
9	1000	1060	1000	60
10	0	1030	1000	30

- Dada una cierta deuda, a cancelarse en siete cuotas por sistema cuota capital constante (sistema alemán), conociendo que se abonó un total de intereses equivalente al 16 % de la deuda original y la razón de decrecimiento de intereses resultará de $28 en cada ocasión, calcular el importe de dicho préstamo.

SOLUCIÓN:

Siendo:

$$TI = 0{,}16 \times V_0$$

$$\frac{V_0 \times i}{2}(n + 1)$$

$$\frac{V_0}{2} \times i \times (7 + 1) = 0{,}16 \times V_0$$

$$i = 0{,}04$$

Si:

$$I_1 = V_0 \times i$$
$$I_1 = 0{,}04 \times V_0$$

$$I_7 = I_1 - 6 \times r$$
$$I_7 = I_1 - 6 \times 28$$
$$I_7 = I_1 - 168$$

$$TI = (I_1 + I_n) \times \frac{n}{2}$$

$$0{,}16 \times V_0 = (I_1 + I_1 - 168) \times \frac{7}{2}$$
$$0{,}16 \times V_0 = \left[2 \times \left(V_0 \times 0{,}04\right) - 168\right] \times 3{,}5$$

$$0{,}16 \times V_0 = 0{,}28 \times V_0 - 588$$
$$V_0 = \frac{588}{0{,}28 - 0{,}16}$$
$$V_0 = \frac{588}{0{,}12}$$
$$V_0 = 4900$$

- Sobre un préstamo por sistema alemán cancelable en siete cuotas mensuales se reconoce que la cuota de servicio n.º 2 ascendió a \$710 y los intereses a devengar posteriores a la cancelación de la cuota n.º 4 ascienden a \$210. Averiguar la deuda original.

SOLUCIÓN:

$$C_2 = th + 6th \times i$$
$$710 = th(1 + 6i) \quad (*)$$

En cuanto al total de intereses a devengar, desarrollamos la siguiente ecuación:

$$210 = 3th \times i + 2th \times i + th \times i$$

De donde:

$$\frac{210}{6} = th \times i \qquad \therefore th \times i = 35 ....th = \frac{35}{i} \qquad (**)$$

Despejando th de (*)

$$th = \frac{710}{1+6i} \; (***)$$

Igualando (**) y (***):

$$\frac{710}{1+6i} = \frac{35}{i}$$

$$710i = 35 + 210i$$

$$500i = 35$$

$$i = \frac{35}{500}$$

$$i = 0{,}07$$

Reemplazando en (*):

$$710 = th(1 + 6 \times 0{,}07)$$

$$th = \frac{710}{1{,}42}$$

$$th = 500$$

Siendo:

$$th = 500$$
$$entonces$$
$$V_0 = 7 \times th$$
$$V_0 = 3500$$

- Para cancelar una deuda con siete pagos constantes y mensuales, se conoce que los intereses a devengar luego de abonadas cuatro cuotas ascienden a $210, todo valuado al 7 % efectivo mensual. Calcular el importe de la deuda original.

SOLUCIÓN:

Para la solución, consideramos calcular el saldo de deuda resultante luego de abonar la 4.ª cuota, considerando los intereses a devengar como el total de intereses para ese tramo cancelatorio:

$$TI = n.C - V$$
$$210 = 3.C - V$$
$$C = \frac{V}{3} + 70$$
$$V = \frac{C}{0{,}07}\left[1 - (1 + 0{,}07)^{-3}\right]$$

$$V = \left(\frac{V}{3} + 70\right) \times 2{,}6243$$
$$V = 0{,}87477V + 182{,}70$$
$$V = 1467$$

Este último importe obtenido corresponde al saldo de deuda existente, luego de abonada la 4.ª cuota; a partir de este, calculamos la cuota constante que se utilizó en toda la operación:

$$C = \frac{1467 \times 0{,}07}{1 - 1{,}07^{-3}}$$
$$C = 559$$

Conocida la cuota, estamos en condiciones de conocer el valor actual de la deuda original:

$$V_0 = \frac{559}{0{,}07}\left[1 - 1{,}07^{-7}\right]$$
$$V_0 = 3012{,}63$$

Para resolver el mismo ejercicio anterior suponiendo que se trata de un sistema alemán, partimos de la fórmula del total de intereses aplicado a las últimas tres cuotas:

$$TI = \frac{V0{,}07}{2}(3 + 1)$$
$$210 = V \times 0{,}14$$
$$V = 1500$$

Este importe reúne las últimas tres cuotas de amortización (constantes), por lo que resulta simple calcular la deuda original:

$$V_0 = \frac{1500}{3} \times 7$$
$$V_0 = 3500$$

- Para cancelar una cierta deuda por sistema francés en cinco pagos periódicos pactados al 10 % efectivo y periódico, se sabe que el doble de lo amortizado en la cuarta cuota, más el triple de lo amortizado en la segunda, asciende a $683,58. Calcular el valor actual y el importe de sus cuotas de servicio.

SOLUCIÓN:

Siendo:

$$t2 = 1{,}1t1$$

$$t4 = 1{,}1^3 t1$$

$$t4 = 1{,}331t1$$

Para:

$$2t4 + 3t2 = 683{,}58$$

$$2{,}662t1 = 3{,}3t1 = 683{,}58$$

$$t1 = 114{,}66$$

$$t1 = V_0 - t2 - t3 - t4 - t5$$

$$t1 = V_0 - t1(1{,}1 + 1{,}21 + 1{,}331 + 1{,}4641)$$

$$V_0 = 6{,}1051t1$$

$$V_0 = 700$$

$$C = t1 + V_0 \times i$$

$$C = 114{,}66 + 700 \times 0{,}10$$

$$C = 184{,}66$$

- Conociendo que el doble de los intereses cancelados en la tercera cuota más los intereses abonados en la tercera ascienden a $232,84, tratándose de una deuda por sistema francés valuada al 10 % efectivo periódico cancelable en cinco pagos, calcular su valor actual y el importe de sus cuotas.

SOLUCIÓN:

Siendo:

$$2I_2 = V_1 \times 0{,}20$$
$$I_3 = V_2 \times 0{,}10$$
$$149{,}22 = 0{,}1(2V_1 + V_0)$$
$$2328{,}42 = 2V_1 + V_2$$
$$2328{,}42 = 2V_0 - 2t1 + V_0 - 2{,}1t1$$
$$2328{,}42 = 3V_0 - 4{,}1t1$$
$$V_0 = \frac{2328{,}42}{3} + \frac{4{,}1}{3}t1$$
$$V_0 = 776{,}14 + 1{,}366666t1$$
$$V_0 = \frac{t1 + 0{,}1V_0}{0{,}10}\left(1 - 1{,}10^{-5}\right)$$
$$V_0 = 6{,}1051t1$$

Despejando t1 e igualando:

$$t1 = \frac{V_0 - 776{,}14}{1{,}36666}$$

$$t1 = 0{,}163797V_0$$

$$V_0 - 776{,}14 = 1{,}366666 \times 0{,}163797V_0$$
$$V_0 = 1000.-$$
$$C = t1 + 0{,}10V_0$$
$$C = V_0(0{,}163797 + 0{,}10)$$
$$C = 1000 \times 0{,}263797$$
$$C = 263{,}80$$

- Para cancelar una cierta deuda por sistema alemán en ocho cuotas se conoce que se abonó por todo concepto en la cuarta cuota $254,40, así como la razón de decrecimiento de $8,48. Calcular su importe.

SOLUCIÓN:

$$C_4 = V_0\left(\frac{1}{8} + \frac{5i}{8}\right)$$

$$8 \times 254{,}40 = V_0(1 + 5i)$$

$$V_0 = \frac{2035{,}20}{1 + 5i}$$

Adicionalmente:

$$C_1 = C_4 + 3r$$

$$C_1 = 254{,}40 + 3 \times 8{,}48$$

$$C_1 = 279{,}84$$

$$C_1 = V_0\left(\frac{1}{8} + i\right)$$

$$279{,}84 = V_0(0{,}125 + i)$$

$$V_0 = \frac{279{,}84}{0{,}125 + i}$$

Igualando:

$$\frac{2035{,}20}{1 + 5i} = \frac{279{,}84}{0{,}125 + i}$$

$$254{,}40 + 2035{,}20i = 279{,}84 + 1399{,}20i$$

$$636i = 25{,}94$$

$$i = 0{,}04$$

Reemplazando:

$$V_0 = \frac{279,84}{0,125 + 0,04}$$

$$V_0 = 1696$$

- Conociendo que una cierta deuda por sistema alemán a cancelarse en 90 cuotas mensuales fue valuada a dos tasas consecutivas, la primera de ellas al 1,5 % mensual y la segunda, vigente luego de abonada la cuota n.º 45, del 2 % efectivo mensual, determinó un saldo de deuda de $15.000, luego de abonada la cuota de orden n.º 60 se desea conocer el total de intereses a cargo del deudor.

SOLUCIÓN:

Conocemos el saldo de deuda de las últimas 30 cuotas, por lo que podemos calcular el valor actual para determinar los intereses abonados:

$$t_h = \frac{V_0}{n}$$

$$t_h = \frac{15000}{30}$$

$$t_h = 500$$

$$90 \times 500 = V_0$$

$$V_0 = 45000$$

Calculamos el total de intereses para toda la operación valuada al 1,5 %, descontamos los intereses devengados posteriores a la cuota 45 a esa tasa para incorporarle los intereses de ese último tramo, valuándolo ahora al 2 %:

$$TI_{90,0,015} - TI_{45,0,015} + TI_{45,0,02} = Total.Intereses\,netos$$

$$\frac{45000 \times 0,015}{2} \times 91 = 30.712,50$$
$$\frac{22500 \times 0,015}{2} \times 46 = 7.762,50$$
$$\frac{22500 \times 0,02}{2} \times 46 = 10.350,00$$

Total de intereses netos:

$$30.712,50 - 7.762,50 + 10.350,00 = 33.000.-$$

Se otorga un préstamo a cancelarse en 44 cuotas mensuales de capital constante, valuándolo al 1,5 % efectivo mensual, vigente hasta el momento de cancelar la cuota de orden 23 para luego incrementarse en ½ punto. Conociendo que el total de intereses alcanzó los $3.000, calcular el importe de la deuda original.

SOLUCIÓN:

Siendo:

$$V_0 = 44th$$
$$V_{23} = 21th$$

$$3000 = \frac{44th \times 0{,}015}{2} \times 45 - \frac{21th \times 22}{2} \times (0{,}015 - 0{,}02)$$

$$3000 = th(14{,}85 + 1{,}155)$$

$$th = \frac{3000}{16{,}005}$$

$$th = 187{,}44$$

$$V_0 = 44 \times 187{,}44$$

$$V_0 = 8.247{,}42$$

Dada una deuda de \$24.000 a cancelarse por sistema alemán en 60 cuotas mensuales y vencidas que generó un total de intereses de \$24.480, calcular las tasas aplicadas sabiendo que la primera de ellas permaneció vigente hasta el momento de cancelarse la cuota de orden n.º 25 para luego incrementarse en un punto.

SOLUCIÓN:

Siendo:

$$i_1 = x$$

$$t_h = \frac{V_0}{60}$$

$$th = \frac{24000}{60}$$

$$th = 400$$

$$V_{25} = 400 \times 35$$

$$V_0 = 14000$$

$$24480 = \frac{24000.X}{2} \times 61 - \frac{14000X}{2} \times 36 + \frac{14000(X + 0{,}01)}{2} \times 36$$

$$24480 = 732000X - 252000X + 252000X + 2520$$

$$21960 = 732000X$$

$$x = 0{,}03$$

$$i_1 = 0{,}03$$

$$\therefore i_2 = 0{,}04$$

Se pacta cancelar una deuda por $9.000 en nueve cuotas mensuales por sistema progresivo, que se valuará al 3 % efectivo mensual. Una vez cumplido el desembolso de la cuota de orden cuatro, el deudor ofrece un pago extraordinario de $1.000 y entrega dos pagarés del mismo importe a 45 y 90 días de plazo para extinguir dicha obligación. Se desea conocer el importe de los documentos, suponiendo que en ningún caso se modificó la tasa.

SOLUCIÓN:

Calculamos, en primer lugar, los valores de f_1 y t_1:

$$f_1 = \frac{1}{\frac{(1+9)\times 9}{2}}$$

$$f_1 = 0{,}0222222$$

$$t_1 = V_0 \times f_1$$

$$t_{1_1} = 9000 \times 0{,}022222$$

$$t_1 = 200$$

Hemos calculado previamente estos valores para aplicarlos a la fórmula del saldo de deuda:

$$SD = V_0 \times \left[1 - \frac{h^2 + h}{n^2 + n}\right]$$

$$SD = 9000 \times \left[1 - \frac{16 + 4}{81 + 9}\right]$$

$$SD = \$7000$$

Estamos en condiciones de determinar el importe que se cancelará con dos documentos iguales una vez que descontemos el pago extraordinario de $1.000, por lo que el nuevo importe a financiar será de $6.000 (7.000-1.000). Esta financiación por medio de documentos a 45 y 60 días podría calcularse como una renta de dos cuotas iguales, luego de ajustar la tasa mensual a una frecuencia acorde de 45 días:

$$1{,}03^{\frac{45}{30}} - 1 = i_{45} = 0{,}0453358$$

Donde el valor de cada documento será:

$$N = \frac{6000 \times 0{,}0453358}{1 - 1{,}0453358^{-2}}$$

$$N_1 = N_2 = \$3205{,}52$$

Un deudor contrata un crédito de $8.000 por sistema progresivo a cancelarse en 14 cuotas mensuales valuado al 1,5 % mensual. ¿Qué importe podría recibir si deseara abonar la misma cuantía en concepto de intereses, si contratara por sistema alemán y mantuviera las condiciones de tiempo y tasa inalterables?

SOLUCIÓN:

Calculamos el total de intereses para el sistema progresivo:

$$TI = V_0 \times i \times \left(1 + \frac{n-1}{1,5}\right)$$

$$TI = 8000 \times 0,015 \times \left(1 - \frac{n-1}{1,5}\right)$$

$$TI = \$1160$$

Reemplazamos el valor obtenido en la fórmula del total de intereses del sistema alemán para despejar la variable V_0:

$$1160 = \frac{V_0 \times i}{2} \times (n+1)$$

$$1160 = \frac{V_0 \times 0,015}{2} \times 15$$

$$V_{0(aleman)} = \$10.311,11$$

Una cierta deuda contratada por sistema progresivo y valuada al 0,06 efectivo periódico comprometió al deudor a abonar \$300 por todo concepto para cancelar la cuota de orden cuatro. Se conoce que la sumatoria de factores de corrección uno y cinco suman 0,1666666. Confeccionar el cuadro de marcha.

SOLUCIÓN:

Siendo $f_1 + f_5 = 0,1\widehat{6}$ $\quad f_5 = f_1 \times 5 \quad 6 \times f_1 = 0,1\widehat{6}$

$f_1 = 0,02\widehat{7}$

Sustituyendo: $f_1 = \dfrac{1}{\dfrac{(1+n)\times n}{2}}$

$0{,}02\widehat{7}(n^2 + n) = 2$ $\qquad$ $n^2 + n - 72 = \emptyset$

De donde obtenemos que $n = 8$

Siendo $C_4 = t_4 + I_4$

$$C_h = t_h + \left[\frac{(1+n)\times n}{2} - \frac{h\times(h-1)}{2}\right]\times i \times \frac{t_h}{h}$$

$$300 = t_4 + 30\times 0{,}06\times \frac{t_4}{4}$$

$$t_4 = \$206{,}90$$

$t_1 = \dfrac{t_h}{h}$ $\qquad$ $t_1 = \dfrac{206{,}90}{4}$

$$t_1 = \$51{,}72$$

Siendo: $V_0 = \dfrac{t_1 + t_n}{2}\times n$

y $\quad t_8 = 8\times t_1$

$$V_0 = \frac{51{,}724(1+8)}{2}\times 8$$

$$V_0 = \$1862{,}07$$

Orden	Vni	Ch	th	Ih	factor
0	1862,07				
1	1810,3	163,45	51,724	111,72	*0,0277778*
2	1706,9	212,07	103,45	108,62	*0,0555556*
3	1551,7	257,59	155,17	102,41	*0,0833333*
4	1344,8	**300,00**	206,90	93,10	*0,1111111*
5	1086,2	339,31	258,62	80,69	*0,1388889*
6	775,86	375,52	310,34	65,17	*0,1666667*
7	413,79	408,62	362,07	46,55	*0,1944444*
8	0,00	438,62	413,79	24,83	*0,2222222*
		2495,17	1862,07	633,10	1

Quince días después del vencimiento de la cuota de orden n.º 12, un deudor depositó $4.910,25 para cancelar su deuda contratada por sistema de intereses promediados que fuera pactada a cancelarse en 20 cuotas mensuales, valuado al 3,5 % efvo. mensual. Determinar cuál fue su importe original, el valor de las cuotas de servicio y cuál fue el ahorro de intereses que consiguió por el pago adelantado.

SOLUCIÓN:

Sobre un total de 20 cuotas, luego de canceladas 12 de ellas restan abonarse aún ocho cuotas por tratarse de un sistema de cuotas constantes de capital e interés, la ecuación quedaría representada del siguiente modo:

$$4910{,}50 = \frac{V_0 \times 8}{20} + \frac{I_h}{2}$$

$$4910{,}50 = \frac{2}{5} \times V_0 + \frac{1}{2} \times \frac{V_0 \times 0{,}035}{2 \times 20} \times (20+1)$$

$$V_0 = \$12000.-$$

Dado que se prevé constante el pago de intereses, al cancelarse la deuda a los quince días, el deudor abona el 50 % de los intereses que correspondía pagar con la cuota de orden 13. Para determinar el ahorro de intereses, tomamos en cuenta que sobre un total de 20 pagos constantes de interés previstos canceló 12,5 pagos, por lo que restan pagarse 7,5 pagos de I_h:

$$I_h = \frac{V_0 \times i}{2 \times n} \times (n+1)$$

$$I_h = \frac{12000 \times 0{,}035}{2 \times 20} \times 21$$

$$I_h = 220{,}50$$

$$7{,}5 I_h = 7{,}5 \times 220{,}50$$

$$Ahorro = \$1653{,}75$$

- Un deudor que contrata un préstamo por sistema de intereses promediados conoce que luego de afrontar el pago de la cuota de orden n.º 7 deberá desembolsar \$3.859,20 por todo concepto para cancelar las nueve cuotas que aún faltan, según el convenio pactado. De haberlo contratado por sistema alemán, hubiera pagado \$12,80 como última cuota de interés. Se desea saber a qué tasa fue contratada la operación.

SOLUCIÓN:

Sabemos que la última cuota del sistema alemán equivale a la razón de evolución de los intereses y asimismo, es el producto de $t_h \times i$:

$$r = t_h \times i$$

$$t_h = \frac{V_0}{n}$$

$$r = \frac{V_0 \times i}{n}$$

$$12{,}80 = \frac{V_0 \times i}{(7+9)}$$

$$V_0 \times i = 204{,}80$$

Dadas las concordancias que presentan ambos sistemas, sabemos que el capital original, la tasa y el total de intereses resultan iguales entre sí, de donde:

$$TI = \frac{V_0 \times i}{2} \times (n+1)$$

$$TI = \frac{204{,}80}{2} \times (16+1)$$

$$TI = 1740{,}80$$

Al referirnos al sistema que pacta el deudor, sabemos que:

$$I_h = \frac{TI}{n}$$

$$I_h = \frac{1740{,}80}{16}$$

$$I_h = 108{,}80$$

Estamos en condiciones de relacionar este importe obtenido con el dato del enunciado referido al conjunto de cuotas de servicio adeudadas:

$$3859{,}20 = \frac{V_0 \times 9}{16} + 9 \times I_h$$

$$3859{,}20 = 0{,}5625 \times V_0 + 9 \times 108{,}80$$

$$V_0 = 5120$$

Este último dato obtenido nos permitirá llegar a la conclusión, sabiendo que:

$$V_0 \times i = 204{,}80$$
$$i = \frac{204{,}80}{5120}$$
$$i = 0{,}04$$

- Un deudor que contrata una deuda a cancelarse en 36 cuotas mensuales y constantes, valuada al 2,2 % efectivo mensual, la cancela desembolsando $9.800,76 por todo concepto ocho días antes del vencimiento de la cuota 21. ¿A qué tasa efectiva mensual se hubiera pactado dicha deuda si se hubiera convenido igual cantidad de desembolsos y frecuencia de los pagos por sistema de intereses promediados, sin alterar el total de intereses a pagar?

SOLUCIÓN:

Debemos resolver la operación inicial para conocer el importe de la deuda original y el total de intereses previstos por el sistema francés:

$$C_h^{frances} = \frac{9800{,}76 \times 0{,}022}{\left(1 - 1{,}022^{-16}\right) \times 1{,}022^{\frac{8}{30}}}$$
$$C_h^{frances} = \$729{,}07$$
$$V_0 = \frac{729{,}07}{0{,}022} \times \left(1 - 1{,}022^{-36}\right)$$
$$V_0 = \$18000.-$$

Siendo:

$$TI^{frances} = n \times C_h - V_0$$
$$TI^{frances} = 36 \times 729{,}07 - 18$$

$$TI^{frances} = \$8246{,}57$$

$$TI^{\text{int}.prom} = \frac{V_0 \times i}{2} \times (n+1)$$
$$TI^{\text{int}.prom} = \frac{18000 \times i}{2} \times (36+1)$$
$$TI^{frances} = TI^{\text{int}.prom}$$
$$8246{,}57 = \frac{18000 \times i}{2} \times 37$$
$$i^{\text{int}.prom} = 0{,}0247$$

Siendo:

$$I_h^{\text{int}.pro} = \frac{TI}{n}$$
$$I_h^{\text{int}.prom} = \frac{8246{,}57}{36}$$
$$I_h^{\text{int}.prom} = 229{,}07$$
$$t_h^{\text{int}.prom} = \frac{V_0}{n}$$

Siendo:

$$t_h^{\text{int}.prom} = 500$$
$$C_h = t_h + I_h$$
$$C_h^{\text{int}.prom} = 500 + 229{,}07$$
$$C_h^{\text{int}.prom} = \$729{,}07$$

Puede observarse que también en el sistema de intereses promediados el total de intereses es $n \times C - V_0$, y siendo que, por ajuste de tasas coinciden valores actuales, total de intereses y cantidad de cuotas, para ambos casos también coincidirá el importe de sus cuotas de servicio.

- ¿Qué tasa efectiva mensual se le cobró a un prestatario que contrató cancelar una cierta deuda en ocho cuotas por sistema de intereses promediados si se conoce que abonó cuotas de interés de $112,50 y al momento de pagar la cuota n.º 6 su costo financiero real fue del 6 % mensual? Adicionalmente, construir el cuadro de marcha.

SOLUCIÓN:

Siendo $i_6 = \dfrac{I_h}{V_{h-1}}$ $\qquad$ $0{,}06 = \dfrac{112{,}50}{V_{6-1}}$

$$V_5 = 1875$$

Sobre un total de ocho cuotas, luego de abonada la quinta adeuda tres cuotas, es así que:

$t_h = \dfrac{1875}{3}$ $\qquad$ $t_h = \$625$ $\qquad$ $\therefore V_0 = 8 \times 625$ $\qquad$ $V_0 \$5000$

Siendo:

$I_h = \dfrac{V_0 \times i}{2 \times n} \times (n+1)$ $\qquad$ $112{,}50 = \dfrac{5000 \times i}{2 \times 8} \times 9$

Finalmente:

$i_{mensual} = 0{,}04$

Cuadro de marcha para este sistema:

Orden	Vni	Ch	th	Ih	tasa
0	5000,00				
1	4375,00	737,50	625,00	112,50	*0,02250*
2	3750,00	737,50	625,00	112,50	*0,02571*
3	3125,00	737,50	625,00	112,50	*0,03000*
4	2500,00	737,50	625,00	112,50	*0,03600*
5	1875,00	737,50	625,00	112,50	*0,04500*
6	1250,00	737,50	625,00	112,50	***0,06000***
7	625,00	737,50	625,00	112,50	*0,09000*
8	0,00	737,50	625,00	112,50	*0,18000*
		5900,00	5000,00	900,00	0,48921429

- Dada una cierta deuda contratada por sistema progresivo que sufrió un costo total equivalente al 10 %, pactada su devolución en siete cuotas, confeccionar el cuadro de marcha sabiendo que al momento de cancelarse la 4.^{ta} cuota de la serie se habían amortizado \$400.

SOLUCIÓN:

$SD = V_0 - 400$ y $S.D = \left[\dfrac{n^2+n}{2} - \dfrac{h^2+h}{2}\right] \times t_1$

$$V_0 - 400 = \left[\frac{7^2+7}{2} - \frac{4^2+4}{2}\right] \times t_1$$

Siendo:

$$t_1 = V_0 \times f_1 \qquad \text{y} \qquad f_1 = \frac{2}{(1+n)\times n}$$

$$f_1 = 0{,}035714285$$

$$t_1 = \frac{2\times V_0}{56} \qquad\qquad t_1 = \frac{V_0}{28}$$

$$V_0 - 400 = \left[\frac{7^2+7}{2} - \frac{4^2+4}{2}\right] \times t_1$$

$$V_0 - 400 = \frac{18\times V_0}{28}$$

$$28\times V_0 - 18\times V_0 = 11200$$

$$V_0 = \$1120$$

Siendo: $TI^{progresivo} = 0{,}10 \times V_0$ $\qquad\qquad TI^{progresivo} = \$112$

$$TI^{progresivo} = V_0 \times i \times \left(1 + \frac{n-1}{1{,}5}\right)$$

$$112 = 1120 \times i \times \left(1 + \frac{7-1}{1{,}5}\right) \qquad\qquad i = 0{,}02$$

Ya contamos con todos los elementos para elaborar el cuadro de marcha:

Orden	Vni	Ch	th	Ih	tasa
0	1120,00				
1	1080,00	62,40	40,00	22,40	*0,03571*
2	1000,00	101,60	80,00	21,60	*0,07143*
3	880,00	140,00	120,00	20,00	*0,10714*
4	720,00	177,60	160,00	17,60	*0,14286*
5	520,00	214,40	200,00	14,40	*0,17857*
6	280,00	250,40	240,00	10,40	*0,21429*
7	0,00	285,60	280,00	5,60	*0,25000*
		1232,00	1120,00	112,00	

Dado un cierto préstamo a cancelarse en 69 cuotas por sistema áureo, conociendo que el total de intereses resultó el 70 % de la deuda original y la cuota de servicio de orden 21 fue de \$990, calcular el importe recibido y confeccionar el cuadro de marcha de las últimas cuatro cuotas del sistema.

SOLUCIÓN:

$$0{,}70 \times V_0 = \frac{V_0 \times i \times n}{2} \times \left(2 - \frac{1}{\phi} \right) \qquad i = 0{,}014682$$

Para:

$$C_h = t_h + I_h$$

Reemplazamos:

$$990 = \frac{V_0}{(n-1) \times \phi} + \frac{V_0 \times i}{\phi} \times \left(\frac{n-h}{n-1} + \frac{1}{\phi} \right)$$

$$990 = V_0 \times \left[\frac{1}{(69-1) \times 1{,}618034} + \frac{0{,}014682}{1{,}618034} \times \left(\frac{69-21}{69-1} + \frac{1}{1{,}618034} \right) \right]$$

$$V_0 = \$34704{,}28$$

Para confeccionar el cuadro de marcha de las últimas cuatro cuotas, necesitamos conocer el saldo de deuda luego de abonada la cuota de orden 65 (faltan cancelarse las cuotas 66, 67, 68 y 69):

$$S - Deuda = V_0 \left[1 - \frac{h}{(n-1) \times \phi} \right]$$

$$S - Deuda = 34704{,}28 \left[1 - \frac{65}{(69-1) \times 1{,}618034} \right]$$

$$S - Deuda \cong \$14202{,}11$$

Cuadro de marcha:

Orden	Vni	Ch	th	Ih
	14201,98	528,56	315,42	213,14
66	13886,56	523,93	315,42	208,51
67	13571,14	519,30	315,42	203,88
68	13255,72	514,67	315,42	199,25
69	0,00	13450,34	13255,72	194,62
		58997,41	34704,28	24293,13

Capítulo 14

Introducción a las técnicas de valuación de proyectos:

el VAN y la TIR

CONCEPTOS DE VAN Y TIR

El uso de la aplicación del método del VAN y la TIR para reconocer la ordenación y aceptabilidad de los proyectos de inversión, basado en la determinación del valor presente neto (VPN) o más conocido como valor actual neto (VAN) de la corriente de ingresos y egresos o *flujos de caja*, que se encuentran relacionados con dichos proyectos, siendo "derramados" a lo largo de la vida útil estimada para este, y valuados a una tasa de descuento conocida como tasa de corte o tasa del costo/e del capital, es decir, el *costo promedio ponderado de los recursos propios y ajenos* que le permita al inversor o empresa la financiación de proyectos a evaluar, del mismo modo se entiende como la tasa mínima de rentabilidad exigida por un inversor en mérito a los riesgos inherentes a cada proyecto.

Conceptos como portfolio de inversiones, diversificación, riesgo sistémico y otros tantos serán desarrollados oportunamente en otras asignaturas, no obstante, una breve referencia a su marco teórico y conceptual se basa en el modelo de valuación de activos financieros desarrollados en la década del 70 por William Sharpe y John Linter conocido por sus siglas CAPM (Capital Asset Pricing Model).

Sin perjuicio de adentrarnos en cuestiones ajenas a los fundamentos matemáticos más relevantes, la aplicación de este modelo cobra real sentido frente a un portfolio de inversiones equilibradamente diversificado, lo que resulta poco común en las estrategias financieras y la capacidad económica de las empresas locales, concretamente las denominadas pymes, las cuales en su amplia mayoría deben asignar todos sus recursos a una o muy pocas actividades.

Aplicar este criterio a la valuación de proyectos domésticos puede dar lugar a una *subestimación* de la tasa de descuento, con el consiguiente perjuicio para las empresas antes aludidas.

Como alternativa, se recurre a determinar dicha tasa en función de sus expectativas de rentabilidad (*hurdle rate*) o su propia capacidad de obtener recursos financieros, es decir, su costo de endeudamiento.

En ambos casos, y por la tendencia a evitar riesgos, podemos situarnos en la vereda opuesta a la alternativa inicial, es decir, *sobredimensionar* la tasa de descuento, lo que lleva aparejado la posibilidad de desechar proyectos que podrían ser viables y castigar innecesariamente el flujo de fondos. Por lo tanto, la fijación de este elemento trascendental en el proceso de evaluación sugiere situarse a medio camino entre ambos extremos aludidos, aquel rigurosamente teórico y este último, netamente intuitivo o subjetivo.

En concreto, el criterio de selección-rechazo de proyectos determina que, **si el VAN es igual a cero, lo que equivale decir que la TIR del flujo analizado es igual al costo del capital utilizado para el descuento, el proyecto resultará aceptable desde el punto de vista financiero**, ya que es capaz de satisfacer las demandas contractuales de los aportantes de los recursos de la deuda y de aquellos que suministran recursos de riesgo. Por el contrario, **si el VAN es negativo, la TIR resultará inferior al tipo de descuento empleado, en consecuencia, el proyecto es financieramente rechazable.**

Cabe hacer mención a la anterior expresión y no referirnos a ella como “proyectos no rentables”, puesto que pudiendo serlo, dicho beneficio no sea lo suficientemente satisfactorio a las exigencias de los inversores.

Como contrapartida y aplicando un criterio lógico, resultarán efectivamente (y siempre) rechazables financieramente todo el universo de proyectos que sean *no rentables*. Esto da lugar a determinar que tanto el empleo del VAN como de la TIR conducen al mismo resultado en cuanto a la aceptación o rechazo de un proyecto.

Esta aseveración, si bien cierta, no determina necesariamente que la ordenación en virtud de las preferencias de distintos proyectos se correlacionen en todo momento (los resultados del VAN con los resultados de la TIR muchas veces no comparten una misma solución).

Considerados en oposición dos proyectos elegibles que pueden ordenarse de modo distinto según una primera apreciación del VAN con los ordenados por la TIR. No obstante, dicha dificultad logra ser subsanada calculando la TIR de los flujos diferenciales (TIR incremental), como oportunamente será desarrollada su técnica al asociarse a los resultados provistos por el VAN.

El método de la TIR representa un mayor esfuerzo de cálculo desde el punto de vista matemático, hecho que no implica "lentitud" a partir del uso de programas y computadoras. No obstante, la habilidad técnica requerida determinará la calidad de la información al procesar los resultados obtenidos para que una vez determinada pueda ser comparada con el costo del capital, adicionalmente, requiere una mayor atención, puesto que en ciertos flujos puede verificarse que arroje dos o más soluciones (hecho subsanable por aplicación de la regla de signos de Descartes).

No obstante las dificultades, y en mérito a atender el lenguaje corriente de los inversores quienes son propensos a manejarse en "tantos porciento" en lugar de cifras absolutas, la correcta y objetiva información expuesta dependerá en gran medida del conocimiento que el evaluador financiero tenga de las herramientas matemáticas para alcanzar dichos objetivos.

La ecuación para determinar el VAN se origina en la sumatoria de la corriente positiva y negativa de flujos de fondos actualizados a la tasa de corte que permita establecer inicialmente el valor del VAB (valor actual bruto) para deducirle, a esta resultante, el costo inicialmente incurrido que dimos en llamar inversión inicial:

$$VAB = \frac{f1}{(1+r)} + \frac{f2}{(1+r)^2} + \frac{f3}{(1+r)^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{fn}{(1+r)^n} + \frac{Vresidual}{(1+r)^{n+1}}$$

Donde **VAB** representa el valor actual bruto de la corriente de fondos (*f1, f2,……fn*) actualizada a la tasa de corte "*r*" oportunamente determinada, y *Vresidual* al valor residual que puede generar ingresos adicionales en el periodo *n+1*.

Finalmente, se establece el VAN a partir de la siguiente igualdad:

$$VAN = VAB - I.I$$

Donde **II** = **inversión inicial** que demanda el proyecto.

Consideraciones técnicas en la aplicación de la TIR:

La observación de un proyecto de inversión en donde se reconoce una inversión inicial (II) de signo negativo, seguida de un flujo de fondos de recupero de signo positivo a lo largo de la vida útil del proyecto, determina la existencia de una sola TIR.

En oposición, en la medida en que en el patrón del flujo de fondos del proyecto se alternen signos positivos con negativos se genera la existencia de múltiples TIR, tantas como cambios de signos se observen (aplicando la regla de signos de Descartes).

NOTA:

René Descartes encontró un método para indicar el número de raíces positivas en un polinomio.

Así se enuncia esta regla:

"El número de raíces reales positivas de un polinomio f(x) es igual al número de cambios de signo de término a término de f(x)".

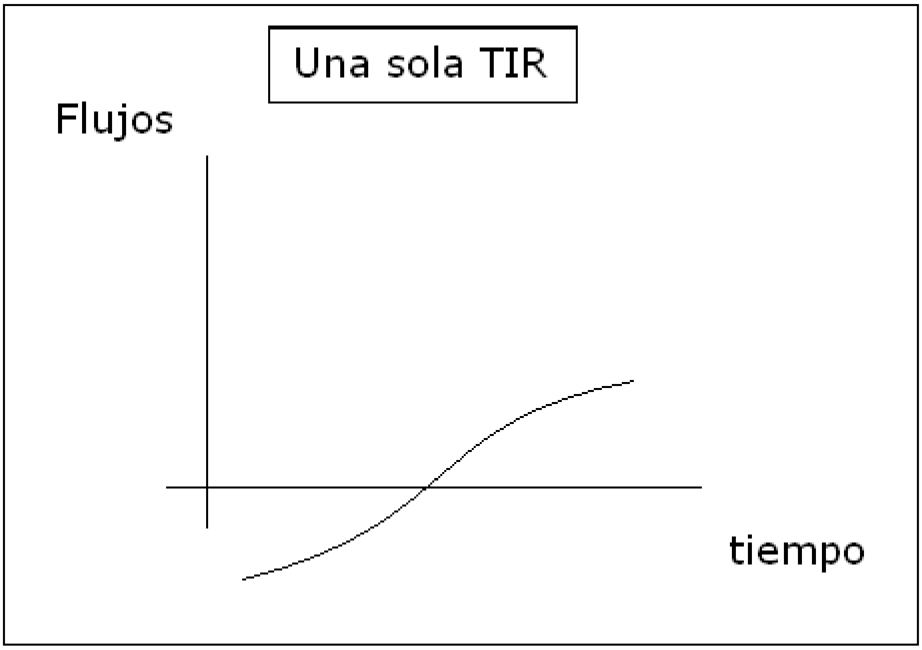
Hay que recordar que a los polinomios los tenemos que escribir en orden decreciente conforme al grado de cada término.
Por ejemplo el polinomio

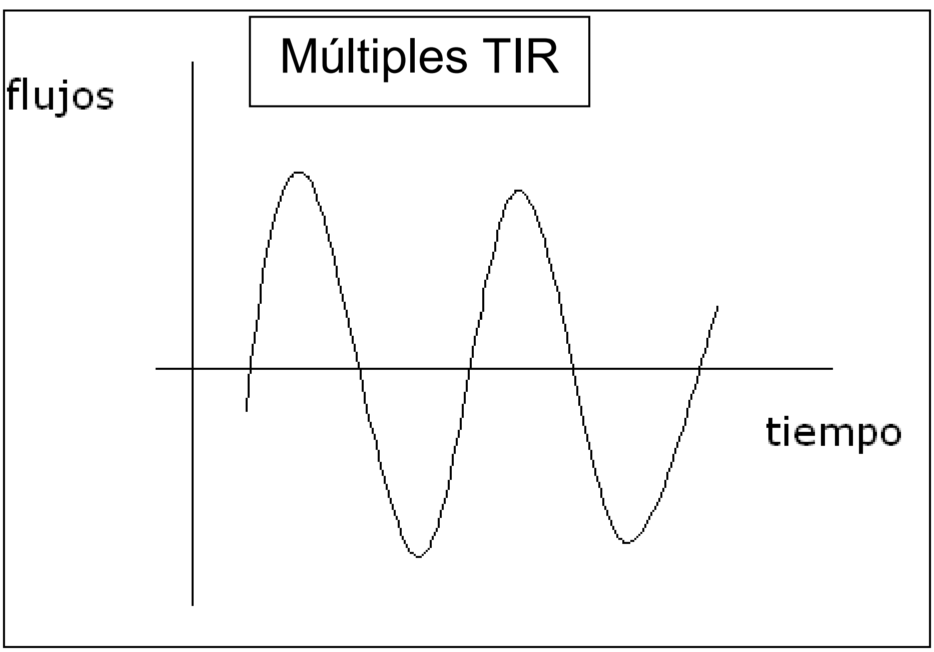
$f(x) = 2x^2 + 3x - 12$ tiene un cambio de signo del segundo al tercer término, por lo tanto tiene una raíz positiva.

$g(x) = +4x^3 - 2x^2 + 6x + 5$ tiene dos cambios de signo, tiene dos raíces positivas.

$h(x) = +x^4 - 2x^2 + 7$ tiene dos raíces positivas.

$i(x) = 2x^3 - x^2 - 3x + 2$ ¿Cuántas raíces positivas tiene?





En los gráficos precedentes se observa la existencia de una sola TIR, cuando la función que representa el flujo de fondos corta al eje de las abscisas, solo una vez (momento donde el VAN se hace nulo), en tanto, cuando la función que representa el flujo de fondos oscila se observa que dicha función intersecta el eje de abscisas más de una vez (multiplicidad de TIR).

En 1955, James H. Lorie y Leonard Savage cuestionaron la validez del criterio de la TIR frente al VAN con un claro ejemplo:

PERIODOS	FLUJOS
0	(1.600)
1	10.000
2	(10.000)

Procediendo a la solución:

$$-10000x^2 + 10000x - 1600 = 0$$

de donde:

$$\frac{-10000 \pm \sqrt{10000^2 - 4 \times (10000) \times (1600)}}{2 \times (10000)} = x_1 ; x_2$$

los resultados de x que devuelve la siguiente expresión cuadrática resultan ser:

$x_1 = 0,2$

$x_2 = 0,8$

siendo que:

$$x = \frac{1}{(1+i)}$$

$$\therefore$$

$$x_1 = 400\%$$

$$x_2 = 25\%$$

Es decir, que el flujo presenta la forma "-+-", y por lo tanto aparecen dos soluciones posibles (dos cambios de signos en el transcurso de la vida útil), cosa no admisible a los propósitos del evaluador financiero.

Para resolver esta situación, se debe actualizar el flujo que se presenta negativo (con excepción del primero que representa la inversión inicial) por la tasa de corte propia del proyecto determinando que el orden del flujo quede nulo (=0) y que este nuevo valor sea absorbido por el periodo anterior; de observarse que el periodo precedente no es capaz de absorber por completo el flujo negativo, se repetirá el procedimiento tantas veces como resulte necesario para evitar la existencia de periodos intermedios de signo negativo.

CONFLICTOS DEL VAN CON LA TIR

Entre los métodos aplicados para reconocer el orden de preferencia ideal entre distintos proyectos, surge la necesidad de poder comparar proyectos que a primera vista resultarían heterogéneos, puesto que sus resultados podrían inducir a errores en el decidor, por ejemplo:

Proyecto	Inversión inicial	FF periodos 1 a 4
A	12000	4000
B	3000	1300

La solución de esta situación no solo es función de la tasa de retorno de la inversión, puesto que juegan un papel importante otros factores como las restricciones a la disponibilidad de fondos (para realizar el proyecto A se necesita cuatro veces B).

No menos importante resulta considerar la vida útil de cada proyecto, puesto que una diferencia notable podría constituir un obstáculo para la comparación objetiva; por ejemplo:

Proyecto	Inversión inicial	Flujo de fondos	Vida útil (en periodos)
C	2000	250	10
D	1100	300	5

Distintos enfoques podrían conducir a resultados no objetivos, dado que algunos podrían aducir que en el ejemplo el proyecto C se mantiene al generar recursos por más tiempo, en tanto otros argumentarían que la rentabilidad de D podría ser superior, y por tanto, conveniente frente a C.

La matemática financiera como herramienta auxiliar del evaluador de proyectos presenta soluciones particulares y objetivas para cada caso.

El tratamiento de las denominadas **inversiones excluyentes** se presenta como un aporte directo de la matemática financiera para la solución de dos situaciones conflictivas como las ejemplificadas.

Estas situaciones de conflicto muchas veces nos presentan dos soluciones posibles para un determinado problema.

La distorsión que puede ocasionar el uso directo de la TIR en cuanto a la presentación de las soluciones, en oposición a los resultados a los que arriba el VAN, merece especial atención.

Pueden presentarse proyectos en donde una mayor TIR observada en un proyecto con respecto a otro dé lugar a presentar un menor VAN inversamente (cruzamiento);
por ejemplo:

Periodo	Proyecto A	Proyecto B	Tasa de corte
0	(50000)	(1000)	12 %
1	60000	1750	12 %

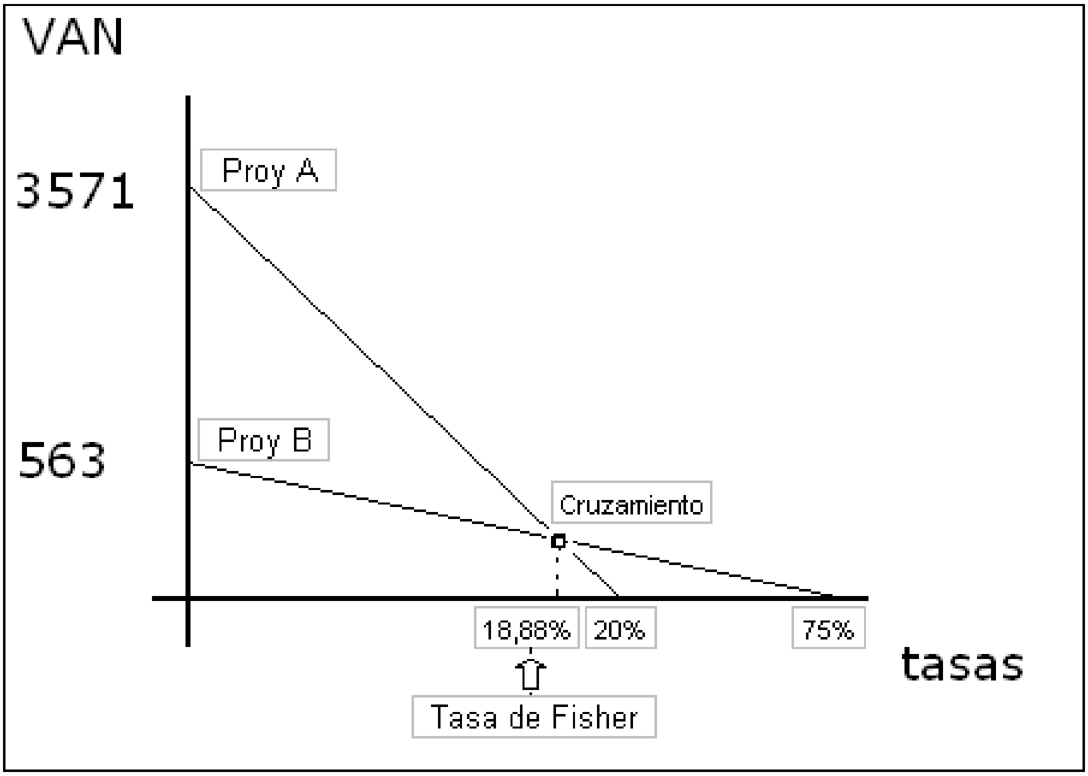
SOLUCIÓN:

Criterio	Proyecto A	Proyecto B
TIR (%)	20	75
VAN ($)	3571	563

La solución no es única, puesto que se presenta cruzamiento de los resultados que arroja el VAN con la TIR.

Representación gráfica de las curvas de valores presentes netos:

,



Resolviendo por el método de la TIR incremental:

$$(50000)-(1000)=(49000)$$

$$60000-1750=58250$$

$$\frac{58250}{49000}=1{,}1888\ldots(1+i)$$

$$porque.\frac{58250}{1{,}1888}=49000..(VAB)$$

La proyección del punto de intersección de las curvas de valores presentes netos de cada proyecto comparado hacia el eje de las abscisas determina la denominada tasa de Fisher y se obtiene calculando la tasa de rentabilidad de la TIR incremental (B-A).

El desplazamiento temporal de los flujos de fondos genera conflictos similares, aun a igualdad entre inversiones iniciales y tasas de corte de los proyectos comparados, por ejemplo:

Periodo	Proyecto A	Proyecto B	Tasa de corte
0	(1400)	(1400)	-----
1	1000	150	8 %
2	1000	600	8 %
3	1000	3100	8 %

Al calcular los valores corrientes:

Criterio	Proyecto A	Proyecto B
TIR (%)	50,46	45,22
VAN (%)	1177,10	1714,17

Podemos observar que también existe cruzamiento entre los resultados del VAN y de la TIR.

Periodo	Proyecto A	Proyecto B	B-A
0	(1400)	(1400)	---
1	1000	150	(850)
2	1000	600	(300)
3	1000	3100	2100

La tasa que cumple la condición es el 40,52 %, que surge del siguiente cálculo:

$$\frac{(850)}{(1+i)}+\frac{(300)}{(1+i)^2}+\frac{2100}{(1+i)^3}=0$$

Estas situaciones de conflicto no resultan ser la norma, puesto que muchas veces no se presentan cruzamientos entre distintos proyectos, lo que da lugar a la exclusión directa de aquellos que tienen tanto menor VAN como menor TIR.

No obstante, resulta una valoración objetiva para determinar el orden de preferencia de distintos proyectos en situaciones de conflicto cuando se observa una marcada **disparidad de tamaño** entre ellos.

DISPARIDAD EN LAS VIDAS ÚTILES DE LOS PROYECTOS

La matemática financiera prevé dos modelos de adecuación de los resultados, dependiendo de la extensión comparativa de los proyectos en conflicto:

1.ra solución:

Viene dada cuando resulta posible considerar la reinmersión de los proyectos menores, permitiendo esta alternativa si el proyecto de mayor extensión resulta capaz de "contenerlo" como un múltiplo pequeño y razonable en forma exacta.

Por ejemplo, reinvertir en un proyecto de cuatro años de vida útil para equiparar su duración a otro proyecto de ocho años de extensión.

2.da solución:

Conocida como **método de reemplazos infinitos** presupone la proyección utilizando el concepto financiero de renta perpetua.

Ejemplo:

Concepto	Proyecto A	Proyecto B
Vida útil (años)	4	7
Inversión inicial	500	1300
Flujo de fondos	300	400
Tasa de corte	8 %	10 %

El método consta de tres pasos, ajustados a conceptos financieros ya desarrollados:

a) Calcular el VAN de cada proyecto.

b) Determinar el flujo promedio (cuota de la renta) que surge de aplicar la tasa de corte de cada proyecto al resultado obtenido en el punto anterior.

c) Calcular el valor actual de la renta perpetua que considere el flujo promedio (cuota) obtenido en el paso anterior y comparar sus resultados.

Desarrollando el ejemplo anterior, tendremos que:

a)

$$-500+\frac{300}{0{,}08}\times\left[1-(1+0{,}08)^{-4}\right]=493{,}63(\mathrm{Pr}oyectoA)$$

$$-1300+\frac{400}{0{,}10}\times\left[1-(1+0{,}10)^{-7}\right]=647{,}36(\mathrm{Pr}oyectoB)$$

b)

$$\frac{493{,}63 \times 0{,}08}{\left[1-(1+0{,}08)^{-4}\right]} = 149{,}04(\mathrm{Pr}oyectoA)$$

$$\frac{400 \times 0{,}10}{\left[1-(1+0{,}10)^{-7}\right]} = 132{,}97(\mathrm{Pr}oyectoB)$$

c) Aplicando rentas perpetuas donde los valores del punto anterior representan las cuotas:

$$V_{\infty\rangle i} = \frac{C}{i}$$

$$\frac{149{,}04}{0{,}08} = 1.863(\mathrm{Pr}oyectoA)$$

$$\frac{132{,}97}{0{,}10} = 1.330(\mathrm{Pr}oyectoA)$$

Concluyendo finalmente que el proyecto A resulta conveniente al proyecto B.

EJERICIOS RESUELTOS DE VAN Y TIR

- Dado el flujo de fondos editado al pie, determinar los FF de orden tres y seis de igual importe entre sí, conociendo que la tasa de corte fue del 5 % y determinó un VAN de $2.335,09. Asimismo, estimar la TIR gráfica y analíticamente.

0	1	2	3	4	5	6	7
-14500	2800	3100	?	2500	3600	?	3000

SOLUCIÓN:

Calculamos la tasa trimestral para actualizar los flujos de orden tres y seis como una renta de dos cuotas:

$$1{,}05^3 - 1 = i_t = 0{,}157625$$

El valor actual bruto (VAB) está definido en la siguiente igualdad:

$$2335{,}09 + 14500 = 2800 \times 1{,}05^{-1} + 3100 \times 1{,}05^{-2} + 2500 \times 1{,}05^{-4} + 3600 \times 1{,}05^{-5} +$$
$$+ 3000 \times 1.05^{-7} + \frac{X}{0{,}157625} \times \left(1 - 1{,}157625^{-2}\right)$$

Despejando:

$$X = \frac{4347{,}14 \times 0{,}157625}{1 - 1{,}157635^{-2}}$$
$$X = \$2700$$

Siendo el valor de los flujos de orden tres y seis iguales entre sí.

- Dados dos proyectos viables con distinto tamaño entre sí, determinar por los métodos convencionales VAN y TIR si existe cruzamiento, calcular la tasa de Fisher, graficar y establecer según criterios de selección la jerarquía entre ambos.

CONCEPTOS	Proyecto A	Proyecto B
Inversión inicial	28000	2500
FNF	7000	750
n periodos	7	7
Tasa de corte	11 %	11 %

SOLUCIÓN:

Dado que se trata de proyectos con flujos constantes, podemos calcular el VAN con la fórmula del valor actual de una renta y la TIR por medio de la fórmula de Baily:

Para el proyecto A:

$$VAN_A = -28000 + \frac{7000}{0{,}11} \times \left(1 - 1{,}11^{-7}\right)$$

$$VAN_A = \$4985{,}37$$

$$h = \left(\frac{7000 \times 7}{28000}\right)^{\frac{2}{7+1}} - 1 \qquad h = 0{,}1501633$$

$$i = \frac{12 \times 8 - 48 \times 0{,}1501633}{12 \times 8 - 96 \times 0{,}1501633} \times 0{,}1501633 \qquad i = 0{,}1652$$

Para el proyecto B:

$$VAN_A = -2500 + \frac{750}{0{,}11} \times \left(1 - 1{,}11^{-7}\right)$$

$$VAN_A = \$1034{,}15$$

$$h=\left(\frac{750\times 7}{2500}\right)^{\frac{2}{7+1}}-1 \qquad h=0{,}203801$$

$$i=\frac{12\times 8-48\times 0{,}203801}{12\times 8-96\times 0{,}203801}\times 0{,}203801 \qquad i=0{,}2299$$

Siendo:

Concepto	Proyecto A	Proyecto B
VAN	$4.985,37	$1.034,15
TIR (%)	16,52	22,99

Se verifica cruzamiento por lo que calculamos la TIR incremental (B-A):

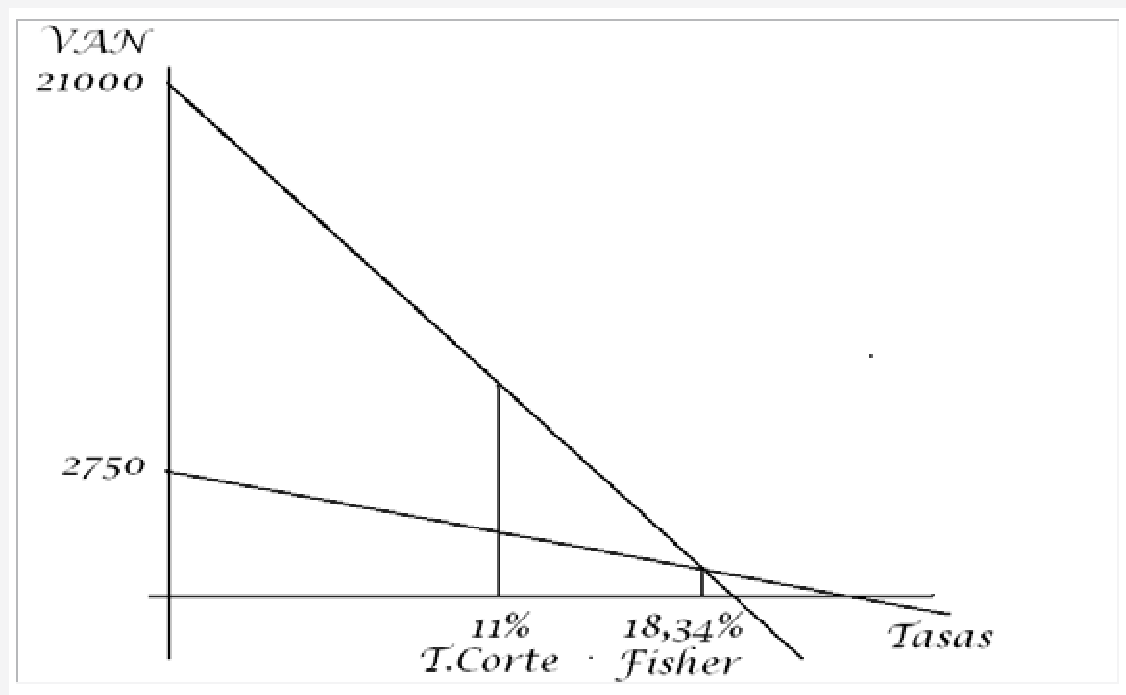
$$-2500--28000=25500 \qquad 750-+7000=-6750$$

$$h=\left(\frac{6750\times 7}{25500}\right)^{\frac{2}{7+1}}-1 \qquad h=0{,}1667167$$

$$i=\frac{12\times 8-48\times 0{,}1667167}{12\times 8-96\times 0{,}1667167}\times 0{,}1667167$$

$$Fisher=18{,}34\%$$

Verifica la elección del proyecto B, en tanto la tasa de Fisher supera la TIR como se refleja en el gráfico siguiente.
Representación gráfica:



- Se indican los datos de un cierto proyecto de inversión que sería considerado por la empresa Vanguard SRL valuado a la tasa de corte del 16 % anual en la siguiente matriz:

Inversión	FNF 1	FNF 2	FNF 3	FNF 4	FNF 5	FNF 6
-14000	3800	3800	4000	4000	5000	3000

Sus valores están expresados en U. monetarias como recupero anual, por lo que se pide que indique el VAN y la TIR correspondientes. Asimismo, podría ser financiado por sistema progresivo en un 60 % de la inversión inicial, pagadero en cinco cuotas anuales, valuándose la operación al 14 % efvo. anual. Se solicita que, adicionalmente, rectifique el flujo neto del proyecto ajustado a las condiciones del crédito, considerando asimismo que la empresa tributa impuesto a las ganancias con una alícuota del 35 %.

Establezca VAN y TIR del flujo financiado y fije sus conclusiones.

SOLUCIÓN:

Para calcular el VAN del proyecto:

$$VAN_{16\%} = -14000 + \frac{3800}{0,16} \times \left(1 - 1,16^{-2}\right) + \frac{4000}{0,16} \times \frac{\left(1 - 1,16^{-2}\right)}{1,16^{2}} + \frac{5000}{1,16^{5}} + \frac{3000}{1,16^{6}}$$

$$VAN_{16\%} = \$483,57$$

El proyecto es viable por el método del VAN.

Para calcular la TIR:

Consideramos estimarlo mediante la aplicación del método de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, lo que nos lleva a resolver el VAN a la tasa cero (dado que facilita los cálculos). Dado que el denominador agrupa el factor de actualización $\left(1 + 0,00\right)^{h}$, basta con sumar algebraicamente los valores del FNF y la inicial para obtener el VAN al "cero porciento", siendo:

$$VAN_{0\%} = -14000 + \frac{3800}{1^{1}} + \frac{3800}{1^{2}} + \frac{4000}{1^{3}} + \frac{4000}{1^{4}} + \frac{5000}{1^{5}} + \frac{3000}{1^{6}}$$

$$VAN_{0\%} = \$9600$$

Luego, procedemos a distribuir los valores en la ecuación:

$$\frac{X - X_1}{X_2 - X_1} = \frac{Y - Y_1}{Y_2 - Y_1}$$

Expresión que empleamos según la siguiente tabla de pares ordenados:

%	VAN	$\Leftarrow VARIABLES$
16	483,57	1
0	9600,00	2
Y	X	$\Uparrow ORDENAMIENTO$

$$\frac{X-16}{0-16}=\frac{Y-483{,}57}{9600-483{,}57}$$

$$9116X-145863=-16Y+7737$$

$$9116X=-16Y+153600$$

$$X=-0{,}0017Y+16{,}85$$

Para $Y=\emptyset$; $X\cong 16{,}85\cong TIR$

El valor resulta una estimación dado que cargando dicha tasa obtendríamos un $VAN\neq\emptyset$ ($161,59), resultado mayor a cero, por lo que debemos subir dicho valor de tasa mediante aproximaciones sucesivas (para reducir el VAN). La TIR así obtenida se sitúa en el 17,29 % superior a la tasa de corte, con lo que resulta coincidente con los resultados del VAN como proyecto viable.

Para calcular la financiación por sistema progresivo:

$14000\times 0{,}60=8400$ importe que sería financiado. Resolvemos el cuadro de marcha para este sistema, pagadero en cinco cuotas anuales una vez que obtenemos los valores iniciales:

$f_1=\dfrac{2}{(1+5)\times 6}$ $\quad f_1=0{,}0\widehat{6}$ Factor que aplicamos a toda la serie de pagos:

Orden	Vni	Ch	th	Ih
0	8400,00			
1	7840,00	1736,00	560,00	1176,00
2	6720,00	2217,60	1120,00	1097,60
3	5040,00	2620,80	1680,00	940,80
4	2800,00	2945,60	2240,00	705,60
5	0,00	3192,00	2800,00	392,00
		12712,00	8400,00	4312,00

Recomponemos el flujo de fondos incorporando el crédito y teniendo en cuenta la incidencia impositiva que generará un ahorro financiero por el menor impuesto que se pagará en los ejercicios afectados, y tenemos especial cuidado en aplicar la alícuota solo al resultado (los intereses que se abonarán) y no sobre la restitución del capital:

Concepto	Inversión	FNF 1	FNF 2	FNF 3	FNF 4	FNF 5	FNF 6
FNF original	-14000	3800	3800	4000	4000	5000	3000
Ptmo. (capital)	8400	-560	-1120	-1680	-2240	-2800	
Ptmo. (intereses)		-1176	-1098	-941	-706	-392	
Ahorro impositivo (35 %)		412	384	329	247	137	
FNF ajustado	-5600	2476	1967	1708	1301	1945	3000

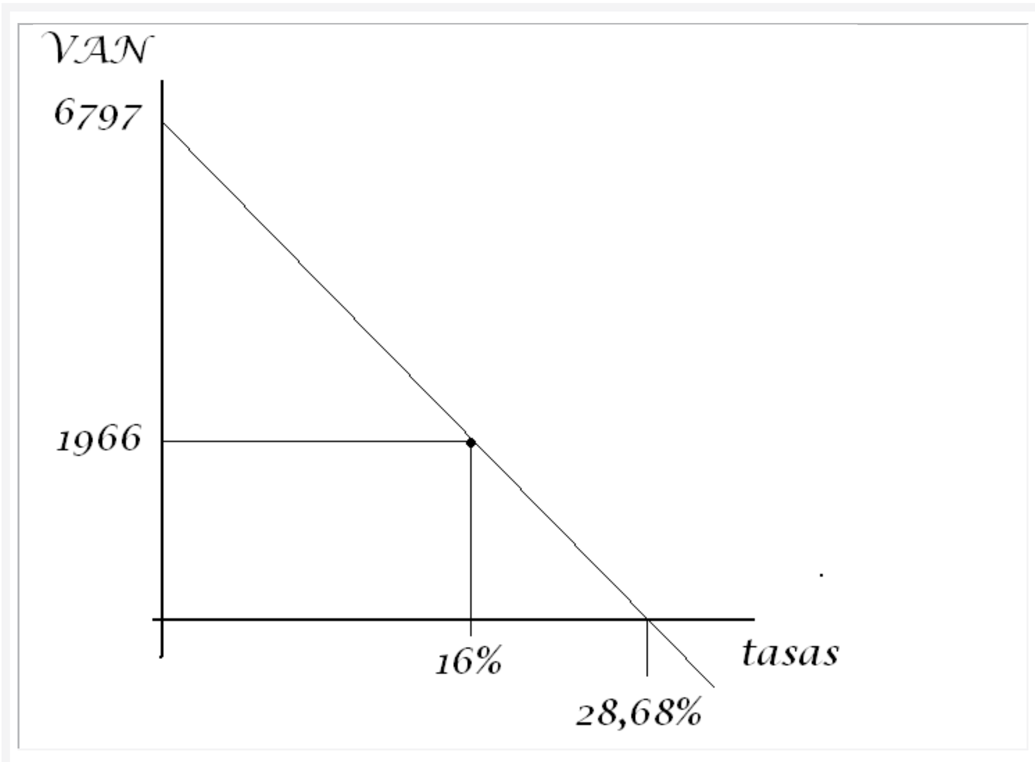
Con los datos recolectados a partir del nuevo flujo de fondos, conformamos la ecuación para calcular el VAN de la financiación:

$$VAN_{16\%} = -5600 + \frac{2476}{1{,}16} + \frac{1967}{1{,}16^2} + \frac{1708}{1{,}16^3} + \frac{1301}{1{,}16^4} + \frac{1945}{1{,}16^5} + \frac{3000}{1{,}16^6}$$

$$VAN_{16\%} = \$1966$$

El VAN del proyecto financiado resulta ser mayor al VAN sin financiación, esto se sustenta en que dicha financiación se obtiene a una tasa menor a la tasa de corte, lo que redunda en un “apalancamiento” del proyecto.

La gráfica siguiente ha sido calculada igualmente tomando la tasa de corte y una segunda tasa alternativa del "0 %" que devuelve el VAN de $6.797 para llegar al valor TIR de 28,68 %, coincidiendo con los resultados del VAN, dado que eleva la TIR por sobre el valor de la tasa de corte.



CASO PRÁCTICO

- Una empresa de autopartes estudia la posibilidad de incorporar una máquina automatizada a sus procesos productivos, que sustituiría el trabajo manual actualmente realizado por cinco operarios supervisados por un capataz. El valor de la máquina en el puerto de Buenos Aires es de $980.000. Se conoce que los gastos de importación ascienden a $168.000. Según nos informa el responsable del área de personal, las indemnizaciones calculadas sobre tres de los operarios que actualmente ejecutan el proceso en forma manual ascienden a $43.000 por todo concepto, quienes perciben anualmente jornales por $97.500 que serían ahorrados según el nuevo estándar del proceso tecnificado. El resto de los operarios y el capataz generan erogaciones totales por $114.000 anuales. La máquina necesita un ajuste inicial por un técnico especializado con un costo de $8.600 y requiere de un mantenimiento mensual de $4.500 durante sus cinco años de vida útil, según previsiones. Las ventas incrementales, según el estudio de mercado realizado, suponen ingresos anuales del orden de los $640.000 con un costo de materias primas de $320.000. Al término de su vida útil solo sería valuada como chatarra por lo que se considera irrelevante a los fines de este proyecto, dado que sería compensada la venta con el necesario desguace.

La empresa maneja una tasa de corte del 12 % anual, por lo que se solicita que calcule el VAN y la TIR de dicho proyecto, sabiendo que tributa impuesto a las ganancias por el 35 % (a los fines de este ejemplo, cargado al ejercicio donde se origina). Se prevé asimismo, la opción de financiar el 70 % del valor de la maquinaria a través de un acuerdo crediticio a cancelarse en cinco cuotas anuales por sistema progresivo valuado al 10,5 % anual. Calcular VAN y TIR de la financiación.

SOLUCIÓN:

Elaboramos el estado de resultados teniendo en cuenta el concepto contable de **percibido**, dado que nos interesan los aspectos financieros del análisis hacemos las observaciones al pie de este:

Concepto	0	1	2	3	4	5
Inversión inicial						
Máquina*	-980000					
Derechos de import.*	-168000					
Puesta a punto*	-8600					
Indemnización	-43000					
Ingresos						
por ventas		640000	640000	640000	640000	640000
por ahorro de personal		97500	97500	97500	97500	97500
Egresos						
Materia prima		-320000	-320000	-320000	-320000	-320000
Mano de obra		-114000	-114000	-114000	-114000	-114000
Mantenimiento anual del equipo		-18000	-18000	-18000	-18000	-18000
Amortización		-404810	-404810	-404810	-404810	-404810
Base imponible		-119310	-119310	-119310	-119310	-119310
Imp. a las ganancias		41759	41759	41759	41759	41759
Reversión amortización		404810	404810	404810	404810	404810
FNF	-1199600	327259	327259	327259	327259	327259
* son activables						

Notas:

1. Las indemnizaciones no se activan por lo que tampoco se amortizan, pero sí forman parte de la inversión inicial.

2. El mantenimiento del equipo mensual se anualizó (1500 x 12=18000).

3. Las amortizaciones no representan erogaciones de fondos, solo sirven para determinar la base imponible, por lo que se revierten con posterioridad para no alterar el flujo de fondos.

Una vez que tenemos armado el flujo de fondos, podemos calcular el VAN y la TIR:

$$VAN = -1199600 + \frac{327259}{0{,}12} \times \left(1 - 1{,}12^{-5}\right) \qquad VAN = -\$19.905$$

El VAN resulta ser negativo.

$$h=\left(\frac{327259\times5}{1199600}\right)^{\frac{2}{5+1}}-1 \qquad h=0{,}1090$$

$$i=\frac{12\times(5+1)-(5^2-1)\times0{,}1090}{12\times(5+1)-2\times(5^2-1)\times0{,}1090}\times0{,}1090 \qquad i\cong0{,}1133$$

La TIR resulta menor a la tasa de corte elegida.
Con ambos métodos el proyecto no es viable.

Para atender la opción de la financiación, construimos el cuadro de marcha del sistema progresivo a partir de la aplicación de las fórmulas correspondientes ya que luego será incorporado al estado de resultados y generará un nuevo flujo de fondos:

$$t_1=V_0\times f_1 \qquad \text{y} \qquad f_1=\frac{2}{(1+n)\times n} \qquad f_1=0{,}0\overset{\frown}{6}$$

Orden	Vni	Ch	th	Ih
0	686000			
1	640267	117763	45733	72030
2	548800	158695	91467	67228
3	411600	194824	137200	57624
4	228667	226151	182933	43218
5	0	252677	228667	24010
		950110	686000	264110

Flujo de fondos ajustado:

FNF	-1199600	327259	327259	327259	327259	327259
Préstamo (capital)	686000	-45733	-91467	-137200	-182933	-43218
Préstamo (intereses)		-72030	-67228	-57624	-433228	-24010
Ahorro impositivo		25211	23530	20168	15126	8404
FNF (financiado)	-513600	234706	192094	152603	116233	82986

Nota:

El ahorro impositivo corresponde al impuesto a las ganancias (según alícuota del 35 %) que se genera por los intereses abonados con cada cuota del préstamo.

Dado que el flujo de fondos se vio distorsionado por causa de la incorporación del préstamo pagadero con cuotas decrecientes, debemos calcular el VAN periodo a periodo:

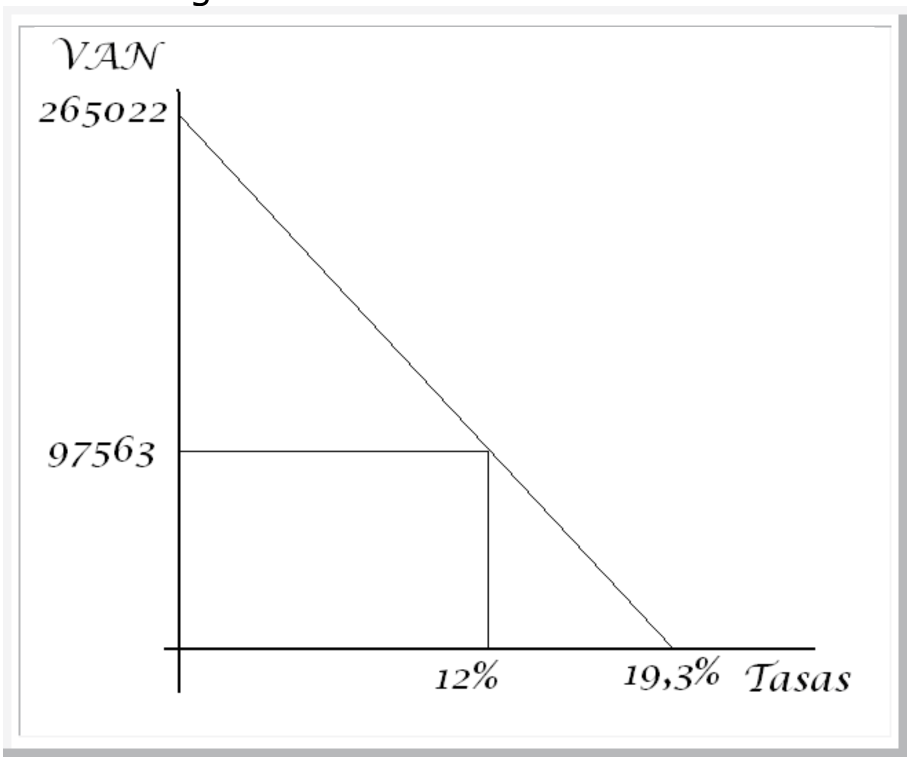
$$VAN_{financiado} = -513600 + \frac{234706}{1{,}105} + \frac{192094}{1{,}105^2} + \frac{152603}{1{,}105^3} + \frac{116233}{1{,}105^4} + \frac{82986}{1{,}105^5}$$

$$VAN_{financiado} \cong \$97563$$

El VAN financiado es positivo, el proyecto pasa a ser viable. Para calcular la TIR usaremos el método gráfico calculando el flujo a la tasa cero (como sumatoria de los n. flujos menos la inversión inicial), siendo:

$$VAN_{0\%} = 234706 + 192094 + 152603 + 116233 + 82986 - 513600$$
$$VAN_{0\%} = \$265022$$

Representación gráfica:



Capítulo 15
Introducción al cálculo actuarial

FUNCIONES BIOMÉTRICAS EN EL CÁLCULO ACTUARIAL

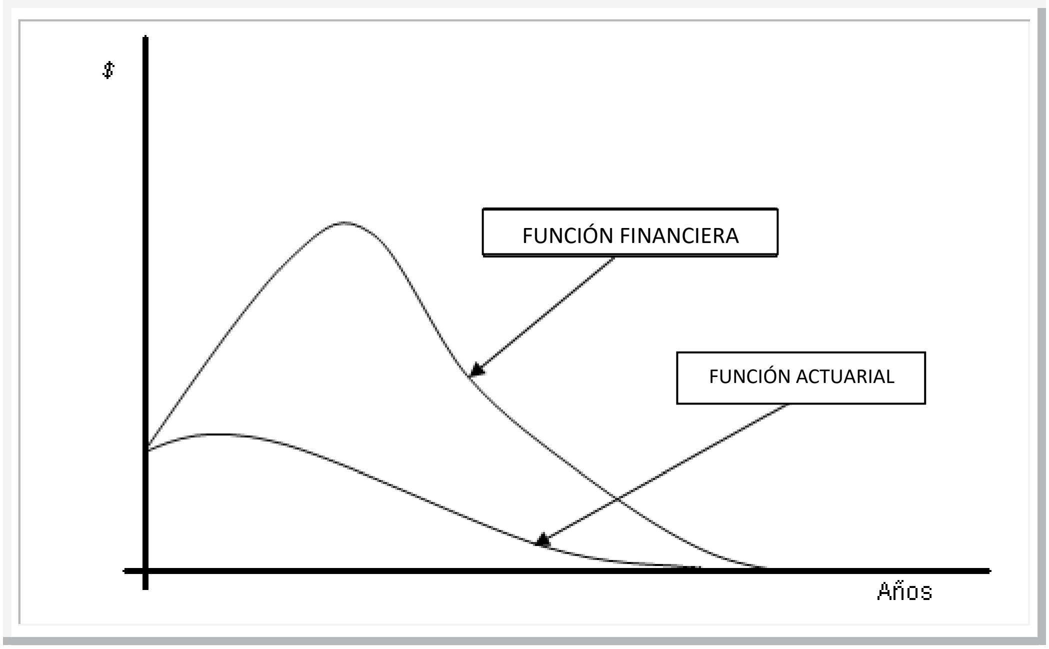
El estudio de los capítulos anteriores nos ha servido de punto de partida para la interpretación de los conceptos que aquí serán desarrollados. Incorporaremos a las *operaciones ciertas* (tanto aquellas que denomináramos simples como las complejas hasta aquí vistas), elementos probabilísticos que determinan ajustes a los cálculos de valores actuales, influidos por las tasas de interés en relación a la aplicación de diversas tablas que operan biométricamente, es decir, sobre los ciclos de vida, longevidad y muerte de hombres y mujeres en función de patrones promediados y actualizados periódicamente.

Debido a los criterios de certeza, la actualización de los flujos de fondos o pagos que resultan equivalentes a un cierto valor presente determinan que en función de una cierta tasa de interés disminuye dicho valor presente, en tanto si la tasa se reduce, inversamente lo incrementa. A nuestros efectos, denominamos a este valor presente como *financiero* (V_0^F).

Por otra parte, denominamos valor presente *actuarial* (V_0^A) a aquella valoración económica que incorpora la ***probabilidad*** de ocurrencia, es decir, la ***posibilidad*** de que cada pago se haga efectivo.

Las *probabilidades* que reflejan diversos tipos de tablas biométricas actúan corrigiendo los resultados constantes que devuelven los cálculos a operaciones ciertas, transformándolos según la contingencia observada.

Podemos ejemplificar para un universo reducido de personas el comportamiento de ambas funciones (financiera y actuarial) en tanto se acercan a la edad de 100 años, momento en el que se suspenden los pagos por la inexistencia de supervivientes (tanto en una como en otra función), observando un comportamiento más "suavizado" según se aprecia en la siguiente gráfica:



Es así que en la actividad aseguradora, gracias al empleo de tablas estadísticas específicas de esta naturaleza, podemos valuar las primas de seguro que permiten obtener determinados premios, ya sea que se trate de seguros *sobre la vida* cuando lo producido constituye un beneficio que puede ser otorgado al hallarse con vida el adquirente, o bien *sobre la muerte*, cuando resulte de la contingencia de su defunción.

El cálculo de la prima neta deberá considerar las características particulares de cada riesgo. A diferencia de los modelos matemáticos que describen relaciones inmutables entre las observaciones, en el mundo de los fenómenos socioeconómicos son necesarios métodos que permitan describir relaciones contingentes, es decir, relaciones ciertas en términos de probabilidad.

Consideraciones sobre la valoración de las rentas vitalicias

Los relevamientos estadísticos a partir del análisis de las bases demográficas constituyen un elemento técnico muy importante para la operación de los seguros de rentas vitalicias, ya que la determinación de las primas netas de riesgo y de las reservas correspondientes se produce a partir de ellas. Es por ello que la solvencia y estabilidad financiera de las empresas que operan los seguros de rentas vitalicias dependerá, entre otros aspectos, de la adecuada medición de la mortalidad de sus pensionados.

El principal recurso con el que cuenta una aseguradora para hacer frente a sus obligaciones proviene de la prima que ingresa a la compañía, por lo que será fundamental que la administración establezca los criterios generales para el adecuado cálculo del monto necesario para poder otorgar una determinada pensión.

Los seguros de rentas vitalicias tienen por objeto brindar a los asegurados el pago de una renta mensual hasta su fallecimiento, así como pagar pensiones de sobrevivencia a sus beneficiarios de conformidad con lo que establezcan las leyes de seguridad social correspondientes. Por lo general, los contratos de rentas vitalicias tienen el carácter de irrevocables.
Los planes de rentas vitalicias pueden distinguirse unos de otros considerando los siguientes aspectos:

1. En qué momento se dará inicio al pago de la prestación.
2. En qué momento se establece el fin de la prestación.
3. Si la prestación será constante, variable o indexada.
4. Si ofrece algún tipo de dividendos a los pensionados.

Considerando cuándo comienza el pago de la prestación, un contrato de renta vitalicia puede clasificarse como de renta inmediata o de renta diferida, dependiendo de cuándo se haya establecido el inicio del pago de la prestación periódica. Tal como estudiamos en el capítulo correspondiente, mediante una renta inmediata los pagos comienzan transcurrido un periodo después de la contratación de la renta, por ejemplo, un mes después. Las rentas diferidas son aquellas bajo las cuales el periodo de pago de la renta comienza en una fecha futura.

Las rentas que se pagan al menos hasta la muerte del pensionado se denominan rentas vitalicias. Sin embargo, dependiendo de las leyes de seguridad social de cada país, la prestación podrá terminar antes de la muerte del asegurado, por ejemplo, en las pensiones de viudez la prestación podrá darse por terminada cuando la viuda vuelva a casarse, en los seguros de orfandad cuando los hijos alcancen la mayoría de edad, etc.

Las rentas vitalicias suelen contratarse a prima única con los fondos que los empleados han acumulado en sus cuentas de ahorro para el retiro (como ocurría hasta la vigencia del sistema de AFJP o jubilaciones privadas en la Argentina, muy difundido en muchos países) o con fondos provenientes de los presupuestos de los gobiernos (a partir de 2009, a cargo de la ANSES).

Lectura e interpretación de las tablas de mortalidad con valores conmutados

Diversas tablas de mortalidad han sido utilizadas por las aseguradoras de riesgo a través del tiempo y en función de necesidades particulares. Las más difundidas han sido las tablas CSO (Commisioners Standard Ordinary Mortality Table) elaboradas en Estados Unidos desde 1941 con sucesivas modificaciones.

El incremento de las expectativas de vida a lo largo del tiempo ha motivado el constante monitoreo y ajuste, pues de su fiabilidad depende en gran medida la capacidad de las compañías aseguradoras de cumplir con las obligaciones contractuales pactadas con sus asegurados satisfaciendo al mismo tiempo su rentabilidad y la propia subsistencia económica del ente.

El constante desarrollo en materia de salud ha permitido extender las expectativas de vida, elementos que son considerados a la hora de formular el desarrollo de estas tablas.

Sin perjuicio del tipo de tabla que se emplee, observamos características comunes en ellas en cuanto al rango de longevidad considerado (inician a la edad cero y llegan a ω como valor máximo de supervivencia considerada, donde $\omega = 100$, siendo que más allá no se consideran supervivientes a efectos actuariales).

Asimismo, las tablas desarrolladas CSO tienen incorporados valores de conmutación, como se denomina a sucesivas columnas que relacionan sus datos con variables financieras ciertas calculados a una tasa determinada, por ejemplo, los valores descontados al 4 % anual, indicando en su nomenclatura v^x de donde $v^x = \frac{1}{(1+i)^x}$, variable que permite actualizar el flujo de fondos previsto como renta vitalicia a la tasa pactada.

Estas tablas se dividen en dos grandes grupos en función del sexo, dado que difieren las expectativas de vida entre hombres y mujeres, cuando esto no se encuentra segregado se consideran valores corrientes y un "plus" de longevidad de tres años a favor de las mujeres, es decir, lo que se considera probable para un hombre de 33 años equivale a la probabilidad de una mujer de 30 años.

Variables estadísticas

Las tablas de mortalidad establecen, además del rango de edades discriminadas, las características para hombres y para mujeres y los siguientes elementos:

ℓ_x	Inicial del vocablo ingles *living* (vivo, superviviente). Esto es la cantidad de personas que, habiendo nacido en un mismo instante, han alcanzado *estadísticamente* la edad x.
d_x	Inicial del vocablo ingles *dying* (moribundo, fallecido). Esto es la cantidad de personas fallecidas dentro del año posterior al haber alcanzado la edad x. Siendo: $d_x = \ell_x - \ell_{x+1}$
p_x	Indica la probabilidad que tiene una persona de edad x de alcanzar con vida la edad $x+1$. Esto está dado por la relación: $p_x = \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x}$
q_x	Indica la probabilidad de muerte que tiene una persona de edad x de morir durante el transcurso del siguiente año ($x+1$), dado por la relación: $q_x = \frac{d_x}{\ell_x}$
D_x	Primer valor de conmutación usando la tasa de interés, siendo: $D_x = \ell_x \times v^x$
N_x	Representa la sumatoria de valores D_x, desde $D_{\omega-x-1}$ hasta D_x
C_x	Considerando el pago del premio a los beneficiarios dentro del año posterior a ocurrido el deceso, tenemos que: $C_x = d_x \times v^{x+1}$
M_x	Representa la sumatoria de valores C_x desde $C_{\omega-x-1}$ hasta C_x

Consideramos que $p_x + q_x = 1$ (certeza) dado que: $q_x = \frac{d_x}{\ell_x}$ y $d_x = \ell_x - \ell_{x+1}$

$$\therefore\ q_x = \frac{\ell_x - \ell l_{x+1}}{\ell_x}$$

y siendo: $p_x = \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x}$ $q_x = 1 - p_x$

<u>Desarrollo de la fórmula de una renta vitalicia constante, inmediata y de pagos vencidos</u>

Consideramos un grupo ℓ_x de personas de edad x dispuestos a aportar $ a_x con el propósito de reunirse con $1 al término de cada año en la medida de alcanzar su supervivencia, por lo que se reunirá $ $a_x \times \ell_x$, siendo este el valor actual del compromiso asumido por los asegurados.

Al final de cada ciclo anual, la compañía aseguradora solo abonaría $1 a las ℓ_{x+1} personas vivas. El valor actual en ese momento sería $v \times \ell_{x+1}$, para el segundo, haría lo propio con los ℓ_{x+2} supervivientes desembolsando en consecuencia $v^2 \times \ell_{x+2}$ y así sucesivamente, hasta los $\ell_{\omega-x-1}$ sobrevivientes del último año (no habría que pagarle al $\ell_{\omega-x}$ grupo inexistente, puesto que todos habrían fallecido). Igualando la serie como capitales equivalentes:

$$\ell_x \times a_x = v \times \ell_{x+1} + v^2 \times \ell_{x+2} + v^3 \times \ell_{x+3} + \ldots\ldots + v^{\omega-x-1} \times \ell_{\omega-1}$$

El costo promedio para cada asegurado:

$$a_x = \frac{v \times \ell_{x+1} + v^2 \times \ell_{x+2} + v^3 \times \ell_{x+3} + \ldots\ldots + v^{\omega-x-1} \times \ell_{\omega-1}}{\ell_x}$$

Multiplicando numerador y denominador por v^x:

$$a_x = \frac{v^{x+1} \times \ell_{x+1} + v^{x+2} \times \ell_{x+2} + v^{x+3} \times \ell_{x+3} + \ldots\ldots + v^{\omega-x+x-1} \times \ell_{\omega-1}}{v^x \times \ell_x}$$

$$a_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots\ldots + D_{\omega-1}}{D_x}$$

$$\boxed{a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}}$$

Basta reemplazar los valores enunciados por los correspondientes valores conmutados.

Ejemplos

- Tras la venta de una casa quinta valuada en \$460.000, su propietario el Sr. Altamira de 61 años de edad decide invertir en una renta vitalicia de pagos anuales y vencidos. ¿Qué importe habrá de recibir anualmente?

SOLUCIÓN:

Siendo $a_{61} = \$460000$ buscamos los valores en tabla de hombres, según la siguiente expresión:

$$460000 = C \times \frac{N_{62}}{D_{61}} \quad \text{donde} \quad 460000 = C \times \frac{3779{,}65}{7271}$$

$C = \$88491{,}26$ representa el valor de su renta vitalicia anual.

Con el propósito de obtener una renta vitalicia anual de \$12.000, inmediata y de pagos vencidos, ¿cuál será la prima única que deberá abonar la Sra. Di Pietro de 47 años de edad?

SOLUCIÓN:

$a_{47} = \frac{N_{48}}{D_{47}} \times 12000$ buscamos los respectivos valores en tabla de mujeres:

$$a_{47} = \frac{4525{,}02}{14784} \times 12000$$

$a_{47} = \$3672{,}91$ suma periódica a recibir.

Seguros sobre muerte inmediata

Se trata de reconocer las variables que intervienen para su cálculo. Este seguro erróneamente conocido comercialmente como “seguro de vida” (por cuestiones de imagen comercial) permite mediante sus características otorgar una cierta suma de dinero a los beneficiarios para el caso de que se presente dicha contingencia.

Análogamente al desarrollo anterior, consideramos un grupo ℓ_x de personas de edad x dispuestos a aportar $ A_x a la aseguradora, por lo que se reunirá $ $A_x \times \ell_x$ siendo este el valor actual del compromiso asumido por los asegurados, también llamado *prima pura.*

Los fallecimientos acaecidos en el primer año, designados como d_x, imponen a la compañía aseguradora abonar $1 a cada beneficiario al término del año, siendo $ d_x el costo y cuyo valor actualizado a ese momento sería $ $v \times d_x$; para el segundo, haría lo propio con los d_{x+1} fallecidos, desembolsando en consecuencia $ d_{x+1} con un valor actualizado de $v^2 \times d_{x+1}$ y así sucesivamente, hasta los $d_{\omega-1}$ fallecidos del último año. Igualando la serie como capitales equivalentes:

$$\ell_x \times A_x = v \times d_{x+1} + v^2 \times d_{x+2} + v^3 \times d_{x+3} + \ldots\ldots + v^{\omega-x-1} \times d_{\omega-2} + v^{\omega-x} \times d_{\omega-1}$$

Despejando A_x y multiplicando y dividiendo por v^x:

$$A_x = \frac{v^{x+1} \times d_{x+1} + v^{x+2} \times d_{x+1} + v^{x+3} \times d_{x+2} + \ldots\ldots + v^{\omega-x+x-1} \times d_{\omega-2} + v^{\omega} \times d_{\omega}}{v^x \times \ell_x}$$

Recordando que: $C_x = d_x \times v^{x+1}$ y $D_x = \ell_x \times v^x$

$$A_x = \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + ...+ C_{\omega-2} + C_{\omega-1}}{D_x}$$

Reemplazando el numerador por su igualdad:

$$\boxed{A_x = \frac{M_x}{D_x}}$$

Ejemplos:

- La Sra. Marcela Chandía de 41 años de edad desea contratar un seguro de vida entera (seguro de muerte) para un capital de $160.000. Calcular el valor de la prima pura correspondiente según la tabla CSO 80.

SOLUCIÓN:

Verificamos los correspondientes valores en tablas de mujeres:

$$A_{41} = 160000 \times \frac{4898,69}{19071}$$

$A_{41} = \$41098,55$ corresponde al valor de la prima pura.

- El Sr. Ernesto Conde, abogado de 36 años de edad, desea destinar $18.000 para contratar un seguro de muerte inmediata. ¿Cuál será el capital a asegurar? Su padre, el Sr. Jaime Conde de 58 años de edad, se interesa en una operación similar, ¿cuál será el capital que él aseguraría a partir de la misma suma invertida por su hijo?

SOLUCIÓN:

$$18000 = C \times \frac{5888,09}{123080} \qquad C = \$70555,99$$ capital de Ernesto

$$18000 = C \times \frac{4248,01}{8553} \qquad C = \$36241,44$$ capital de Jaime

ANEXO: TABLAS CSO 80 PARA HOMBRES Y MUJERES

CSO 80 – Hombres
i = 0,04
Raíz =100000

x	q(x;0;1)	p(x;1)	l(x)	d(x)	vx	D(x)	N(x)	C(x)	M(x)
0	0,00418	0,99582	100000	418	1	100000	2378286	401,92	8525,96
1	0,00107	0,99893	99582	107	0,961538	95752	2278286	98,93	8124,03
2	0,00099	0,99901	99475	98	0,924556	91971	2182534	87,12	8025,11
3	0,00098	0,99902	99377	97	0,888996	88346	2090564	82,92	7937,98
4	0,00095	0,99905	99280	94	0,854804	84865	2002218	77,26	7855,07
5	0,00090	0,99910	99185	89	0,821927	81523	1917353	70,34	7777,81
6	0,00086	0,99914	99096	85	0,790315	78317	1835830	64,59	7707,47
7	0,00080	0,99920	99011	79	0,759918	75240	1757513	57,72	7642,88
8	0,00076	0,99924	98932	75	0,730690	72288	1682273	52,69	7585,15
9	0,00074	0,99926	98856	73	0,702587	69455	1609985	49,32	7532,46
10	0,00073	0,99927	98783	72	0,675564	66734	1540530	46,77	7483,14
11	0,00077	0,99923	98711	76	0,649581	64121	1473795	47,47	7436,37
12	0,00085	0,99915	98635	84	0,624597	61607	1409674	50,45	7388,90
13	0,00099	0,99901	98551	98	0,600574	59187	1348067	56,59	7338,45
14	0,00115	0,99885	98454	113	0,577475	56855	1288880	62,74	7281,86
15	0,00133	0,99867	98340	131	0,555265	54605	1232025	69,94	7219,12
16	0,00151	0,99849	98210	148	0,533908	52435	1177420	75,98	7149,17
17	0,00167	0,99833	98061	164	0,513373	50342	1124985	80,96	7073,20
18	0,00178	0,99822	97898	174	0,493628	48325	1074643	82,59	6992,24
19	0,00186	0,99814	97723	182	0,474642	46384	1026318	83,06	6909,65
20	0,00190	0,99810	97542	185	0,456387	44517	979935	81,18	6826,59
21	0,00191	0,99809	97356	186	0,438834	42723	935418	78,48	6745,41
22	0,00189	0,99811	97170	184	0,421955	41002	892695	74,65	6666,92
23	0,00186	0,99814	96987	180	0,405726	39350	851693	70,22	6592,27
24	0,00182	0,99818	96806	176	0,390121	37766	812343	66,02	6522,05
25	0,00177	0,99823	96630	171	0,375117	36248	774577	61,68	6456,03

CSO 80 – Hombres
i = 0,04
Raíz =100000

x	q(x;0;1)	p(x;1)	l(x)	d(x)	vx	D(x)	N(x)	C(x)	M(x)
26	0,00173	0,99827	96459	167	0,360689	34792	738329	57,92	6394,35
27	0,00171	0,99829	96292	165	0,346817	33396	703538	55,02	6336,43
28	0,00170	0,99830	96128	163	0,333477	32056	670142	52,27	6281,41
29	0,00171	0,99829	95964	164	0,320651	30771	638085	50,56	6229,14
30	0,00173	0,99827	95800	166	0,308319	29537	607314	49,21	6178,58
31	0,00178	0,99822	95634	170	0,296460	28352	577778	48,46	6129,36
32	0,00183	0,99817	95464	175	0,285058	27213	549426	47,97	6080,90
33	0,00191	0,99809	95289	182	0,274094	26118	522213	47,97	6032,94
34	0,00200	0,99800	95107	190	0,263552	25066	496095	48,15	5984,97
35	0,00211	0,99789	94917	200	0,253415	24053	471029	48,73	5936,82
36	0,00224	0,99776	94717	212	0,243669	23080	446976	49,67	5888,09
37	0,00240	0,99760	94505	227	0,234297	22142	423896	51,14	5838,42
38	0,00258	0,99742	94278	243	0,225285	21239	401754	52,64	5787,28
39	0,00279	0,99721	94035	262	0,216621	20370	380514	54,57	5734,64
40	0,00302	0,99698	93772	283	0,208289	19532	360145	56,68	5680,07
41	0,00329	0,99671	93489	308	0,200278	18724	340613	59,31	5623,39
42	0,00356	0,99644	93182	332	0,192575	17944	321889	61,48	5564,07
43	0,00387	0,99613	92850	359	0,185168	17193	303945	63,92	5502,60
44	0,00419	0,99581	92490	388	0,178046	16468	286752	66,42	5438,68
45	0,00455	0,99545	92103	419	0,171198	15768	270284	68,97	5372,26
46	0,00492	0,99508	91684	451	0,164614	15092	254516	71,39	5303,28
47	0,00532	0,99468	91233	485	0,158283	14441	239424	73,81	5231,90
48	0,00574	0,99426	90747	521	0,152195	13811	224983	76,24	5158,08
49	0,00621	0,99379	90227	560	0,146341	13204	211172	78,80	5081,84
50	0,00671	0,99329	89666	602	0,140713	12617	197968	81,45	5003,04

CSO 80 – Hombres
i = 0,04
Raíz = 100000

X	q(x;0;1)	p(x;1)	l(x)	d(x)	vx	D(x)	N(x)	C(x)	M(x)
51	0,00730	0,99270	89065	650	0,135301	12050	185351	84,56	4921,59
52	0,00796	0,99204	88414	704	0,130097	11502	173301	88,07	4837,03
53	0,00871	0,99129	87711	764	0,125093	10972	161798	91,90	4748,96
54	0,00956	0,99044	86947	831	0,120282	10458	150826	96,11	4657,06
55	0,01047	0,98953	86115	902	0,115656	9960	140368	100,31	4560,95
56	0,01146	0,98854	85214	977	0,111207	9476	130408	104,47	4460,65
57	0,01249	0,98751	84237	1052	0,106930	9007	120932	108,16	4356,18
58	0,01359	0,98641	83185	1130	0,102817	8553	111924	111,71	4248,01
59	0,01477	0,98523	82055	1212	0,098863	8112	103372	115,21	4136,30
60	0,01608	0,98392	80843	1300	0,095060	7685	95259	118,83	4021,08
61	0,01754	0,98246	79543	1395	0,091404	7271	87574	122,60	3902,26
62	0,01919	0,98081	78148	1500	0,087889	6868	80304	126,76	3779,65
63	0,02106	0,97894	76648	1614	0,084508	6477	73436	131,15	3652,89
64	0,02314	0,97686	75034	1736	0,081258	6097	66958	135,64	3521,74
65	0,02542	0,97458	73297	1863	0,078133	5727	60861	139,96	3386,10
66	0,02785	0,97215	71434	1989	0,075128	5367	55134	143,68	3246,14
67	0,03044	0,96956	69445	2114	0,072238	5017	49768	146,84	3102,46
68	0,03319	0,96681	67331	2235	0,069460	4677	44751	149,27	2955,62
69	0,03617	0,96383	65096	2355	0,066788	4348	40074	151,24	2806,35
70	0,03951	0,96049	62742	2479	0,064219	4029	35727	153,08	2655,11
71	0,04330	0,95670	60263	2609	0,061749	3721	31697	154,91	2502,03
72	0,04765	0,95235	57653	2747	0,059374	3423	27976	156,83	2347,13
73	0,05264	0,94736	54906	2890	0,057091	3135	24553	158,65	2190,30
74	0,05819	0,94181	52016	3027	0,054895	2855	21418	159,78	2031,65
75	0,06419	0,93581	48989	3145	0,052784	2586	18563	159,62	1871,88

CSO 80 – Hombres
i = 0,04
Raíz = 100000

x	q(x;0;1)	p(x;1)	l(x)	d(x)	vx	D(x)	N(x)	C(x)	M(x)
76	0,07053	0,92947	45844	3233	0,050754	2327	15977	157,78	1712,26
77	0,07712	0,92288	42611	3286	0,048801	2079	13650	154,19	1554,48
78	0,08390	0,91610	39325	3299	0,046924	1845	11571	148,85	1400,29
79	0,09105	0,90895	36026	3280	0,045120	1625	9726	142,30	1251,44
80	0,09884	0,90116	32745	3237	0,043384	1421	8100	135,03	1109,14
81	0,10748	0,89252	29509	3172	0,041716	1231	6679	127,23	974,10
82	0,11725	0,88275	26337	3088	0,040111	1056	5449	119,10	846,87
83	0,12826	0,87174	23249	2982	0,038569	897	4392	110,59	727,77
84	0,14025	0,85975	20267	2842	0,037085	752	3495	101,34	617,18
85	0,15295	0,84705	17425	2665	0,035659	621	2744	91,38	515,84
86	0,16609	0,83391	14760	2451	0,034287	506	2122	80,81	424,46
87	0,17955	0,82045	12308	2210	0,032969	406	1616	70,06	343,66
88	0,19327	0,80673	10098	1952	0,031701	320	1211	59,50	273,60
89	0,20729	0,79271	8147	1689	0,030481	248	890	49,50	214,10
90	0,22177	0,77823	6458	1432	0,029309	189	642	40,36	164,60
91	0,23698	0,76302	5026	1191	0,028182	142	453	32,27	124,24
92	0,25345	0,74655	3835	972	0,027098	104	311	25,33	91,97
93	0,27211	0,72789	2863	779	0,026056	75	207	19,52	66,64
94	0,29590	0,70410	2084	617	0,025053	52	133	14,86	47,13
95	0,32996	0,67004	1467	484	0,024090	35	81	11,21	32,26
96	0,38455	0,61545	983	378	0,023163	23	45	8,42	21,05
97	0,48020	0,51980	605	291	0,022272	13	22	6,23	12,63
98	0,65798	0,34202	315	207	0,021416	7	9	4,26	6,40
99	1	0	108	108	0,020592	2	2	2,14	2,14
100	0	0	0	0	0	0	0	0	0

CSO 80 – Mujeres
i = 0,04
Raíz = 100000

x	q(x;0;1)	p(x;1)	l(x)	d(x)	vx	D(x)	N(x)	C(x)	M(x)
0	0,00289	0,99711	100000	289	1	100000	2417330	277,88	7025,51
1	0,00087	0,99913	99711	87	0,961538	95876	2317330	80,44	6747,63
2	0,00081	0,99919	99624	81	0,924556	92108	2221454	72,01	6667,19
3	0,00079	0,99921	99544	79	0,888996	88494	2129346	67,53	6595,18
4	0,00077	0,99923	99465	77	0,854804	85023	2040852	63,29	6527,65
5	0,00076	0,99924	99388	76	0,821927	81690	1955829	60,06	6464,37
6	0,00073	0,99927	99313	72	0,790315	78488	1874139	54,71	6404,30
7	0,00072	0,99928	99240	71	0,759918	75414	1795651	51,88	6349,59
8	0,00070	0,99930	99169	69	0,730690	72462	1720236	48,48	6297,71
9	0,00069	0,99931	99099	68	0,702587	69626	1647774	45,94	6249,23
10	0,00068	0,99932	99031	67	0,675564	66902	1578148	43,52	6203,29
11	0,00069	0,99931	98964	68	0,649581	64285	1511247	42,47	6159,77
12	0,00072	0,99928	98895	71	0,624597	61770	1446962	42,64	6117,30
13	0,00075	0,99925	98824	74	0,600574	59351	1385192	42,73	6074,66
14	0,00080	0,99920	98750	79	0,577475	57026	1325841	43,87	6031,92
15	0,00085	0,99915	98671	84	0,555265	54789	1268815	44,85	5988,06
16	0,00090	0,99910	98587	89	0,533908	52637	1214026	45,69	5943,21
17	0,00095	0,99905	98498	94	0,513373	50566	1161390	46,40	5897,52
18	0,00098	0,99902	98405	96	0,493628	48575	1110823	45,57	5851,12
19	0,00102	0,99898	98308	100	0,474642	46661	1062248	45,64	5805,55
20	0,00105	0,99895	98208	103	0,456387	44821	1015587	45,20	5759,91
21	0,00107	0,99893	98105	105	0,438834	43052	970766	44,31	5714,71
22	0,00109	0,99891	98000	107	0,421955	41352	927714	43,41	5670,41
23	0,00111	0,99889	97893	109	0,405726	39718	886362	42,52	5627,00
24	0,00114	0,99886	97785	111	0,390121	38148	846644	41,64	5584,47
25	0,00116	0,99884	97673	113	0,375117	36639	808496	40,76	5542,83

CSO 80 – Mujeres
i = 0,04
Raíz = 100000

x	q(x;0;1)	p(x;1)	l(x)	d(x)	vx	D(x)	N(x)	C(x)	M(x)
26	0,00119	0,99881	97560	116	0,360689	35189	771857	40,23	5502,08
27	0,00122	0,99878	97444	119	0,346817	33795	736669	39,68	5461,85
28	0,00126	0,99874	97325	123	0,333477	32456	702874	39,44	5422,16
29	0,00130	0,99870	97202	126	0,320651	31168	670418	38,85	5382,72
30	0,00135	0,99865	97076	131	0,308319	29930	639250	38,84	5343,87
31	0,00140	0,99860	96945	136	0,296460	28740	609320	38,77	5305,04
32	0,00145	0,99855	96809	140	0,285058	27596	580579	38,37	5266,27
33	0,00150	0,99850	96669	145	0,274094	26496	552983	38,22	5227,90
34	0,00158	0,99842	96524	153	0,263552	25439	526487	38,77	5189,68
35	0,00165	0,99835	96371	159	0,253415	24422	501048	38,74	5150,91
36	0,00176	0,99824	96212	169	0,243669	23444	476626	39,60	5112,16
37	0,00189	0,99811	96043	182	0,234297	22503	453182	41,00	5072,57
38	0,00204	0,99796	95861	196	0,225285	21596	430679	42,46	5031,57
39	0,00222	0,99778	95666	212	0,216621	20723	409083	44,16	4989,11
40	0,00242	0,99758	95453	231	0,208289	19882	388360	46,26	4944,95
41	0,00264	0,99736	95222	251	0,200278	19071	368478	48,34	4898,69
42	0,00287	0,99713	94971	273	0,192575	18289	349407	50,55	4850,35
43	0,00309	0,99691	94698	293	0,185168	17535	331118	52,17	4799,80
44	0,00332	0,99668	94406	313	0,178046	16809	313583	53,59	4747,63
45	0,00356	0,99644	94092	335	0,171198	16108	296774	55,15	4694,05
46	0,00380	0,99620	93757	356	0,164614	15434	280666	56,35	4638,90
47	0,00405	0,99595	93401	378	0,158283	14784	265232	57,53	4582,55
48	0,00433	0,99567	93023	403	0,152195	14158	250448	58,98	4525,02
49	0,00463	0,99537	92620	429	0,146341	13554	236291	60,37	4466,05
50	0,00496	0,99504	92191	457	0,140713	12972	222737	61,83	4405,68

CSO 80 – Mujeres
i = 0,04
Raíz = 100000

x	q(x;0;1)	p(x;1)	l(x)	d(x)	vx	D(x)	N(x)	C(x)	M(x)
51	0,00531	0,99469	91734	487	0,135301	12412	209764	63,36	4343,85
52	0,00570	0,99430	91247	520	0,130097	11871	197352	65,05	4280,49
53	0,00615	0,99385	90727	558	0,125093	11349	185481	67,12	4215,44
54	0,00661	0,99339	90169	596	0,120282	10846	174132	68,93	4148,33
55	0,00709	0,99291	89573	635	0,115656	10360	163286	70,62	4079,40
56	0,00757	0,99243	88938	673	0,111207	9891	152927	71,96	4008,78
57	0,00803	0,99197	88264	709	0,106930	9438	143036	72,90	3936,82
58	0,00847	0,99153	87556	742	0,102817	9002	133598	73,36	3863,92
59	0,00894	0,99106	86814	776	0,098863	8583	124596	73,77	3790,56
60	0,00947	0,99053	86038	815	0,095060	8179	116013	74,49	3716,80
61	0,01013	0,98987	85223	863	0,091404	7790	107835	75,85	3642,30
62	0,01096	0,98904	84360	925	0,087889	7414	100045	78,17	3566,45
63	0,01202	0,98798	83435	1003	0,084508	7051	92630	81,50	3488,28
64	0,01325	0,98675	82432	1092	0,081258	6698	85579	85,32	3406,78
65	0,01459	0,98541	81340	1187	0,078133	6355	78881	89,18	3321,46
66	0,01600	0,98400	80153	1282	0,075128	6022	72526	92,61	3232,28
67	0,01743	0,98257	78871	1375	0,072238	5697	66504	95,51	3139,67
68	0,01884	0,98116	77496	1460	0,069460	5383	60807	97,51	3044,17
69	0,02036	0,97964	76036	1548	0,066788	5078	55424	99,41	2946,66
70	0,02211	0,97789	74488	1647	0,064219	4784	50345	101,70	2847,25
71	0,02423	0,97577	72841	1765	0,061749	4498	45562	104,80	2745,54
72	0,02687	0,97313	71076	1910	0,059374	4220	41064	109,04	2640,75
73	0,03011	0,96989	69166	2083	0,057091	3949	36844	114,35	2531,70
74	0,03393	0,96607	67084	2276	0,054895	3683	32895	120,14	2417,36
75	0,03824	0,96176	64808	2478	0,052784	3421	29212	125,77	2297,22

CSO 80 – Mujeres
i = 0,04
Raíz = 100000

x	q(x;0;1)	p(x;1)	l(x)	d(x)	vx	D(x)	N(x)	C(x)	M(x)
76	0,04297	0,95703	62329	2678	0,050754	3163	25792	130,69	2171,46
77	0,04804	0,95196	59651	2866	0,048801	2911	22628	134,49	2040,77
78	0,05345	0,94655	56786	3035	0,046924	2665	19717	136,94	1906,28
79	0,05935	0,94065	53750	3190	0,045120	2425	17053	138,40	1769,34
80	0,06599	0,93401	50560	3336	0,043384	2194	14627	139,16	1630,95
81	0,07360	0,92640	47224	3476	0,041716	1970	12434	139,43	1491,78
82	0,08240	0,91760	43748	3605	0,040111	1755	10464	139,04	1352,36
83	0,09253	0,90747	40143	3714	0,038569	1548	8709	137,73	1213,32
84	0,10381	0,89619	36429	3782	0,037085	1351	7161	134,86	1075,58
85	0,11610	0,88390	32647	3790	0,035659	1164	5810	129,95	940,72
86	0,12929	0,87071	28857	3731	0,034287	989	4646	123,01	810,77
87	0,14332	0,85668	25126	3601	0,032969	828	3656	114,15	687,77
88	0,15818	0,84182	21525	3405	0,031701	682	2828	103,79	573,61
89	0,17394	0,82606	18120	3152	0,030481	552	2146	92,38	469,82
90	0,19075	0,80925	14968	2855	0,029309	439	1593	80,46	377,44
91	0,20887	0,79113	12113	2530	0,028182	341	1155	68,56	296,98
92	0,22881	0,77119	9583	2193	0,027098	260	813	57,14	228,43
93	0,25151	0,74849	7390	1859	0,026056	193	553	46,57	171,29
94	0,27931	0,72069	5532	1545	0,025053	139	361	37,22	124,71
95	0,31732	0,68268	3987	1265	0,024090	96	222	29,30	87,49
96	0,37574	0,62426	2722	1023	0,023163	63	126	22,78	58,19
97	0,47497	0,52503	1699	807	0,022272	38	63	17,28	35,41
98	0,65585	0,34415	892	585	0,021416	19	25	12,05	18,12
99	1	0	307	307	0,020592	6	6	6,08	6,08
100	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Capítulo 16

Apéndice lingüístico

GLOSARIO DE TÉRMINOS FINANCIEROS Y DE NEGOCIOS EN LENGUA INGLESA

La abundante información técnica y de negocios en lengua inglesa que los profesionales -y no profesionales- encontramos en medios de comunicación, bibliografía especializada, internet e incluso en el lenguaje cotidiano inspiró la necesidad de incorporar este apartado, con el ánimo de servir de utilidad especialmente a los alumnos que cursan estudios universitarios, no con carácter limitativo, pero sí con la intención de resultar una pequeña contribución al reconocimiento de ciertos vocablos de uso frecuente.

Las consecuencias de la era de las comunicaciones e incluso los efectos de la denominada globalización que no podemos ignorar, independientemente de emitir juicios de opinión favorables o adversos, requiere de los profesionales que egresan de las distintas carreras universitarias la adaptación e incorporación de términos o giros idiomáticos de creciente difusión.

Es fácil reconocer, pues, los inconvenientes que le ocasionaría al futuro profesional el desconocimiento de algunos términos muy frecuentes frente a alguna reunión de negocios, o bien, las limitaciones en la lectura de importante literatura técnica o tan solo algún periódico o revista especializada.

El objetivo final estaría cumplido si el siguiente apartado despierta en el alumno universitario la inquietud de la búsqueda de información y vinculación a la innumerable lista de términos financieros y de negocios que se utiliza hoy en día.

Lic. Luis Alberto Fernández

A

a-crédito *on-credit*

a-plazos-*in-instalments, on-credit*

abaratar-*lower-a-price,-cheapen*

abonar *subscribe,-make-a-credit-entry,-credit,pay*

abrir-una-cuenta-*open-an-account*

acción-*share-(UK),-stock*-(US),-*share-of-stock-*

acción-al-portador-*bearer-share,-non-registered-share*

acción-cotizada-en-bolsa-*public-share*

acción-de-sociedad-**anónima**-*corporate-share*

acción-ordinaria-*common-share,-ordinary-share*

acción-preferente-*preference-share,-preferred-share*

accionista-*shareholder,-stockholder,-share-owner*

aceptación-bancaria-*bank-acceptance,-bank***-***bill*

acordar-*agree,-reach-an-agreement*

acrecentar-*increase*

acreditación-*credit,-authorisation*

acreditar-*credit,-make***-***a-credit-entry,.authorise,-grant-credentials*

acreedor-*creditor*

acreedor-hipotecario-*mortgage-creditor,-mortgagee*

acreedor-prendario-*chattel-creditor,-holder-of-a-chattel*

acta *minutes,,record*

acta-de-asamblea-*minutes-of***-***a-meeting*

actividad-comercial-*commercial-activity*

actividad-económica-*economic-activity*

activo-*asset*

activo-corriente-*current-asset,-circulating-asset*

activo-en-circulación-*working-capital*

activo-fijo-*fixed-asset,-capital-asset*

activo-financiero-*financial-asset*

activo-intangible-*intangible-asset,-immaterial***-***asset*
activo-monetario-*monetary-asset*

actualización-*updating,-modernisation,-revaluation*

actualización-contable-*restatement-of-book-values*

actuario-*actuary*

acuerdo-*agreement-*

acuse-de-recibo-*acknowledgement,-acknowledgement-of-receipt*

adelanto-*advance,-advance-payment*

adjuntar-*attach,-enclose-*

administración-*administration,-management,-headquarters*

administración-de-empresas-*business-administration*

administración-financiera-*financial-management*

administrador-*administrator,-manager*

adquirir-*acquire*

aduana-*customs,-customs-house*

afianzar-*secure,-guarantee*

aforo-*appraisal-*

agente-de-seguros-*insurance-broker*

agio-*speculation,-stockjobbing,-agio -*

aguinaldo-*end-of-year-bonus,-extra-pay*

ahorrar-*save,-economise*

ahorrista-*saver*

al-por-**menor**-*retail*

al-por-**mayor**-*wholesale*

alíquota-*aliquot,-rate,-ratio*

almacenar-*store,-stock*

alquilar-*rent,-hire,-let,-lease*

alquiler-con-**opción-de-compra**-*leasing*

alza-*rise,-increase*

amortización-*depreciation,-payment,-amortisation-*

análisis-de-crédito-*credit-analysis*

anexar-*attach,-annex,-incorporate,-add*

anticipo-*advance,-advance-payment,-prepayment*

anual-*annual,-yearly*

anualidad-*annual-allowance,-annuity,-annual-payment*

año-civil-*civil-year,-legal-year,-calendar-year*

apalancamiento-*leverage*

apertura-del-ejercicio-*beginning-of-year, year's-opening*

apoyo-financiero-*financial-support*

aprobación-*approval*

arancel-*duty*

área-comercial-*trading-area,-commercial-area*

aritmética-*arithmetic-*

arqueo-de-caja-*cash-audit,-cash-count*

arrendamiento-financiero-*leasing,-hire-purchase*

arrendatario-*tenant,-lessee,-leaseholder*

arriesgar-*risk*

asamblea-de-acreedores-*meeting-of-creditors*

asegurar-*insure,-underwrite*

asesor-*advisor,-consultant,-counsel,-counsellor,-assessor-*

asignación-presupuestaria-*budget-allowance*

asociación-*union,-association,-partnership,-corporation,-society-*

asociación-de-empresas-*consortium,-joint-venture*

B

bachiller-en-administración-de-empresas *bachelor-of-business-administration*

balance-*balance,-balance-sheet*

balance-general-*general-balance,-general-balance***-***sheet*

balanza-comercial-*balance-of-trade,-visible-balance-of-trade, trade***-***balance*

balanza-de-pagos-*balance-of-payments*

banca-mayorista-*wholesale-banking,-corporate-banking*

banca-minorista-*private-banking,-retail-banking*

bancarrota-*bankruptcy*

banco-*bank*

Banco-Mundial-*World-Bank*

base-imponible-*tax-base*

base-monetaria-*monetary-base*

beneficiario-*beneficiary,-payee,-drawee,-awardee*

beneficio-**financiero**-*financial-profit-*

bien-de-capital-*capital-good,-capital-asset*

bien-de-consumo-*consumer-good,-commodity*

bien-inmueble-*real-estate*

bien-intangible-*intangible-asset*

bienes-de-uso-*plant-and-equipment,-fixed-assets*

bilateral-*bilateral*

boleta-de-depósito-*deposit-slip*

bolsa-de-comercio-*stock-exchange,-stock-market*

bonificación-*discount,-allowance,-bonus*

bono-*bond-*

bono-de-tesorería-*government-bond,-treasury-bond*

bursátil-*pertaining-to-the-stock-market*

C

cadena-comercial *commercial.chain*

caducidad-*maturity,.expiration,.expiry*

caja-*cash,.till*

caja-chica.*imprest..account,.petty.cash*

caja-de-ahorros.*savings.account*

caja-de-seguridad.*safe,.safe.deposit.box,.safety.box*

caja-fuerte.*safe,.strongbox,.safety.box*

cajero-*cashier,.teller*

cajero automático.*automatic.cash***-***dispenser*

cámara-de-comercio.*chamber.of.commerce*

cambio-*exchange,.small.change*

cambio-a-la.**par**.*par.exchange.rate*

cancelar-*cancel,.settle,.honour,.pay.off,.balance..*

canjear-*barter,.exchange,.convert..*

canon-*fee,.royalty*

capital-*principal*

capital-de-trabajo.*working.capital*

capitalizar-*capitalise,.convert.into.capital*

carga-financiera.*financial.charge,.financial.burden*

carga-impositiva.*tax.burden*

cargar-*charge,.debit,.load*

cartera-de-clientes.*portfolio.of.clients,.list.of.clients*

cartera-de-préstamos.*loan.portfolio*

casa-de-cambio.*exchange.house*

caución-*surety,.bond,.surety.bond..*

cedente-*assignor,.transferor*

cédulaxhipotecaria.*mortgage.certificate,.mortgage***-***debenture*

certificado-de-depósito.*warrant,.warehouse.bond,.. certificate***f***of. deposit..*

cesación-de-pagos.*suspension.of.payments*

cesión-*conveyance,.cession*

cheque-*cheque,.check*

chequera-*chequebook*

ciclo-*cycle*

cláusula-*clause,.article*

cliente-*client,.customer,.trade.debtor*

cobrar-*collect,.cash.in*

cobro-*collection*

cociente-*quotient*

codeudor-*joint.debtor,.co-debtor*

coeficiente-*ratio,.coefficient*

cofirmante-*co-signor*

coima-*graft,.bribe*

comercialización-*marketing,.commercialisation*

comercio-internacional.*international.trade*

comisión-de-ventas.*sales.commission,.override*

compañía-*company..*

compensación.**bancaria** *bank.clearing*

compra-a-crédito.*credit.purchase*

compraventa-*second hand.shop*

comprobante *proof,.voucher*

conciliación.**bancaria**.*bank.reconciliation*

consumidor-final.*end.consumer*

consumo-*consumption*

contrato-*contract,.indent..*

control-presupuestario.*budget.control*

convenir-*agree*
conversión-*conversion*

convocatoria-de-acreedores.*creditors'.meeting*

corredor-de-bolsa.*stockbroker,.stock.jobber*

corriente-*current,.circulating*

costo-financiero.*financial.cost*

cotización-*quotation,.quote..*

crecimiento-*growth*

crédito *credit,.loan*

crédito-a-largo..**plazo**.*long-term.receivable*

crédito-fiscal.*tax.credit,.fiscal.credit*

cuadro-*chart,.schedule,.table*

cuadro de resultados.*profit.and.loss.account,.*

profit.and.loss.exhibit

cuenta-bancaria.*bank.account*

cuenta-corriente.*current.account,.checking.account..*

cuenta-de-ahorros.*savings.account*

cuota-*instalment.quota,.dues*

cupón-*coupon,.dividend*

curva-de-demanda.*demand.curve*

D

dato-*datum*

datos-*data*

débito-*debit,,charge*

decimal-*decimal*

declaración-de-bienes-*declaration-of-assets*

declaración-de-impuestos-*tax-return,-tax-declaration*

declaración-jurada-*sworn-declaration,-affidavit*

decreciente-*decreasing, diminishing*

deducción-impositiva-*tax-deduction,-tax-allowance*

deducir-*subtract,-deduct,-deduce*

déficit-*deficit,-shortage*

déficit-de-caja-*cash-deficit*

déficit-presupuestario-*budget-deficit*

deflación-*deflation*

demanda-*demand, claim*

demandar-*sue,-claim, demand*

denominador-común-*common-denominator*

departamento-de-créditos-*credit-department*

depositar-*deposit*

depósito-bancario-*bank-deposit*

depreciación-*depreciation-*

depreciación-**lineal**-*line-depreciation,-fixed-rate-depreciation*

descontar-*discount,-rebate,-allow*

descubierto-bancario-*bank-overdraft*

descuento-*discount,-rebate,-allowance*

descuento-comercial-*trade-discount*

desembolso-*outlay,-disbursement*

desgravación-*tax-exemption,-tax-rebate*

desvalorización-*depreciation,-devaluation,-loss-in-value*

deuda-*debt,-indebtedness,-liability,-payable-*

deudor-*debtor*

devaluación-*devaluation*

devaluación-monetaria-*currency-devaluation*

devengado-*accrued*

devolver-*return,-pay-back*

día-feriado-*holliday*

día-hábil-*business-day,-working-day,-legal-day,-law-day*

diagrama-de-flujo-*flowchart*

dictamen-*opinion*

diferencia-*difference,-imbalance*

diferencia-de-cambio-*exchange-rates-difference*

diferencial-*differential*

diferido-*deferred,-unearned*

diferir-*defer*

dígito *digit*

dinero-*money*

dinero-en-efectivo-*cash*

directo-*direct*

directorio-*directory*

disponibilidades-*cash-assets,-cash-on-hand,-cash-and-banks*

divisa-*currency*

documento-a-pagar-*note-payable*

dólar-*dollar*

E

economía-*economy,-economics, saving*

ecuación-*equation*

efectivo-mínimo-*minimum-balance*

egreso-*disbursement,-expense*

ejercicio-*year,-accounting-year,-exercise*

ejercicio-financiero-*financial-year*

emisor-*issuer*

emitir-*issue*

empresa-*enterprise,-company,-firm,-business,-corporation-*

empresario-*entrepreneur,-businessman*

encaje-*special-reserve,-reserve-ratio,-reserve,-cash***-***position,-spread*

endeudamiento-*indebtedness*

endoso-*endorsement*

entidad-financiera-*financial-company,-financial-institution*

estado-de-resultados-*profit-and-loss-statement,-income-statement*

estado-financiero-*financial-statement*

estudio-de-mercado-*market-survey,-market-research*

euro-*euro*

evadir-impuestos-*evade-taxes*

evaluar-*evaluate,-assess,-appraise*

exención-de-impuestos-*tax-exemption*

extracto-bancario-*bank-statement*

F

fábrica *factory*

fabril *manufactoring*

factura-*invoice,-bill,-sales-slip,-check*

facturación-*invoicing,-billing*

facturar-*invoice,-bill*

faltante-de-caja-*cash-shortage*

fecha-de-cierre-*closing-date*

fecha-de-emisión-*date-of-issue*

fecha-de-entrega-*date-of-delivery,-delivery-date*

fecha-de-pago-*payment-date-*

fecha-de-vencimiento-*expiration-date,-due-date*

fiador-*guarantor,-warrantor,-surety*

fianza-*bond,-surety,-bail,-suretyship,-surety-bond*

fiar-*sell-on-credit, trust,-rely-on*

fideicomisario-*trustee*

fideicomiso-*trust*

fiduciario-*fiduciary*

fijo-*fixed*

filial-*subsidiary*

financiación-*financing,-funding*

financiar-*finance,-fund*

financiero-*financial*

financista-*financier*

finanza-*finance*

fisco-*tax-authority*

flotante-*floating,-unfunded*

flujo-de-caja-*cash-flow*

flujograma-*flowchart-*

FMI (Fondo Monetario Internacional) *International- Monetary-Fund*

fondo-común-de-inversión-*mutual-fund,-investment-fund-*

fondo-de-maniobra-*working-capital*

fondo-fijo-*imprest-fund*

fuente-de-ingresos-*source-of-income*

función-*function*

futuro-*future,-unearned-*

G

ganancia-*profit,-earnings,-benefit,-gain,-income-*

ganancia-bruta-*gross-profit,-gross-earnings*

ganancia-neta-*net-profit*

garantía-*guarantee,-guaranty,-warranty*

garantía-hipotecaria-*mortgage*

garantía-personal-*personal-guarantee*

garantía-prendaria-*pledge*

garantía-real-*real-guarantee*

gastar-*spend,-wear-out*

gasto-*expense,-expenditure,-spending,-charge*

gerente-financiero-*financial-manager*

girar-en-descubierto-*overdraw*

giro *draft,-remittance,-money-order,-bill-of-exchange*

gráfico-*graphic,-chart-*

gratis-*free,-free-of-charge*

H

haber-*credit,-asset,-salary*

herencia-*inheritance*

herramienta-*tool-*

hipoteca-*mortgage*

histograma-*histogram*

hoja-de-cálculo-*spreadsheet*

hombre-de-negocios-*businessman*

honorario-profesional-*professional-fee*

I

iliquidez-*illiquidity*

ilíquido-*illiquid*

impago-*unpaid,-unsettled*

impar-*uneven,-odd*

implícito-*implied,-constructive*

imponible-*taxable,-excisable,-leviable*

importar-*import*

importe-*amount*

importe-a-cobrar-*amount-receivable*

importe-a-pagar-*amount-payable*

imposición-*tax,-levy,-tribute,-imposition,-obligation*

imposición-a-plazo-**fijo**-*fixed-term-deposit,-time-deposit*

impositivo-*fiscal,-pertaining-to-taxes*

impuesto-*tax,-taxation,-tribute*

impuesto-a-las-**ganancias**-*income-tax,-profits-tax*

impuesto-a-las-**ganancias**-**eventuales-***windfall-tax*

impuesto-a-las-**transferencias**-*transfer-tax*

impuesto-a-las-**ventas**-*sales-tax*

impuesto-a-los-**bienes**-**inmuebles-***property-tax*

impuesto-a-los-**débitos-bancarios-***tax-on-bank-debits*

impuesto-a-los-**ingresos**-**brutos**-*gross-income-tax,- turnover-tax,-tax-on-gross-receipts*

impuesto-al-valor-**agregado**-*value-added-tax*

impuesto-de-sellos-*stamp-duty,-stamp-tax*

impuesto-de-**sociedades**-*corporate-tax*

impuesto-inmobiliario-*property-tax,-real-estate-tax*

impuesto-interno-*internal-tax,-inland-tax,-inland-duty*

impuesto-municipal-**municipal**-*tax,-town-hall-tax*

incentivo-fiscal-*tax-incentive*

incobrable-*uncollectible,-non-collectible,-irrecoverable*

incremento-*increment,-increase,-rise,-gain*
indexación-*indexation*

índice-*index,-ratio,-rate-*

índice-bursátil-*stock-index,-share-index*

índice-de-liquidez-*liquidity-ratio*

índice-financiero-*financial-rate,-financial-ratio*

inflación-*inflation*

ingresos-operativos-*operating-income,-revenue*

injusto-*unfair*

institución-financiera-*financial-institution*

instrumento-*instrument, effect,-paper,- document-*

intercambio-comercial-*commercial-trade,-visible-trade*

interés-*interest,-stake,-participation*

interés-bancario-*bank-interest*

interés-compuesto-*compound-interest*

interés-de-plaza-*market-interest-*

interés-directo-*direct-interest*

interés-nominal-*nominal-interest*

interés-por-**mora**-*delinquency-interest*

interés-punitorio-*penal-interest*

interés-simple-*simple-interest*

interpolación-*interpolation*

inventario-*inventory*

inversión-*investment*

inversión-transitoria-*temporary-investment*

inversionista-*investor*

inverso-*inverse*

J

joint-venture-*joint-venture*

jubilación-*retirement,-pension,-retirement-allowance-*

L

largo-plazo-*long-term,-long-date*

leasing-*leasing,-hire-purchase*

letra-de-cambio-*bill-of-exchange,-draft,-trade-bill*

licenciado-en-administración-de-empresas-*holder-of-a-degree-in-business-management,-business-graduate*

licenciado-en-economía-*holder-of-a-degree-in-economics,-graduate-in-economics*

licitación-*tender,-bid,-bidding*

límite-*limit*

límite-de-crédito-*credit-limit*

línea-de-crédito-*credit-line*

lineal-*linear,-straight-line*

liquidación--*liquidation,-dissolution,-windup,-winding-up-*

liquidez-*liquidity*

lista-de-precios-*price-list*

llave-de-negocio-*goodwill,-going-concern-value*

locación-*lease*

locador-*lessor,-landlord,-owner-of-a-rented-property*

local-*premises,-local*

locatario-*tenant,-lessee*

logaritmo-*logarithm*

lucrativo-*gainful,-lucrative*

lucro-*profit*

lucro-cesante*-business-interruption***-**

M

macroeconomía-*macroeconomics*

más-*plus*

masa-monetaria*-money-supply*

media-*mean,***-***average-*

media-aritmética*-arithmetic-mean*

media-geométrica*-geometric-mean*

mediano-plazo*-medium-term*

menos-*minus*

mensual-*monthly*

mensualidad-*monthly-payment –*

mercado-alcista*-bull-market*

mercado-bajista*-bear-market*

mercado-bursátil*-stock-market*

mercado-de-dinero*-money-market*

mercado-de-divisas*-foreing exchange-market,-currency-market*

mercado-de-futuros*-future-market*

mercado-de-valores*-securities-market,-stock-market*

mercancías-*commodities,-goods,-wares*

minorista-*retailer,-retail-dealer-*

moneda-*currency,-specie,-coin*

monto-*amount,-sum*

mora-*arrears,-default,-delinquency*

moratoria-*moratorium,-extension*

multa-*fine*

multiplicador-*multiplier*

multiplicar-*multiply-*

mutuo-*mutual-*

N

negociable-*negotiable,-marketable*

neto-*net*

nominal-*nominal, face*

nota-de-débito-*debit.note,.debit memorandum*

numerador-*numerator*

número *number, issue*

número-entero-*whole-number*

número-fraccionario-*fraction*

número-impar-*odd.number,.uneven.number*

número-negativo-*minus-number*

número-par-*even-number*

O

obligación-*obligation,.commitment,.liability,-payable,-.debt-.*

oferta-de-dinero-*money-supply,-money-stock*

oneroso-*onerous-.*

operación-de-futuro-*future.operation,-hedge-operation*

orden-de-compra-*purchase-order,-buying-order,-indent*

organigrama-*organisation.chart*

P

pactar-*agree,.reach.an.agreement*

pagadero-*due,.payable*

pagar-*pay,-settle*

pagaré-*promissory-note,.bill,-bill.of-debit,-due bill-*.

pago-*payment-*

pago-en-cuotas-*instalment-pay-.*

pago-en-efectivo-*cash-payment*

pago-fraccionado-*payment-in-instalments*

pago-inicial.*down-payment,-first.payment*

pago-mensual-*monthly-payment*

pago-parcial-*part-payment*

pago-por-**adelantado**-*prepayment*

pago-total-*total.payment,-full payment*

paraíso-fiscal-*tax.haven-.*

pasivo *liability,-debit-.*

PBI (producto bruto interno) *gross.internal.product,.GIP*

pedido-*order*

pendiente-*pending,.outstanding, unsettled*

pendiente-de-cobro-*outstanding,-uncollected*

pendiente-de-pago.*unpaid*

pensión-*pension-.*

percibir-*receive*

pérdida-*loss,-wastage*

período-*period,.term*

período-de-gracia*-grace.period,.period-of-grace*

permuta-*barter*

plan-*plan*

plan-de-financiación*.instalment.plan,-financial-plan-*.

plan-de-inversión*-investment.plan*

planeamiento*-planning*

planificación-*planning*

planificar-*plan,-schedule*

plaza *market-*.

plazo-*term,.instalment-.*

plazo-de-vencimiento*-period.of-maturity*

plazo-fijo*-fixed.term*

plus-*bonus,-bonus.payment,-plus-.*

PNB (producto nacional bruto) *gross-national.product, GNP*

por-ciento-percent

porcentaje-percentage-.

portafolios-*briefcase,-portfolio***-**

positivo-*positive*

precio-*price-.*

prefinanciar.*prefinance*

prenda-*pledge,.chattel,-chattel***-***mortgage*

prepago-*prepayment,.prepaid*

presente-*present*

prestamista-*lender,-money-lender,.pawnbroker*

préstamo-*loan,.imprest-.*

préstamo-a-corto-.**plazo***-short-term-loan,.call-loan*

presupuesto-*budget,.estimate,-quote*

principal-*principal*

producción *production*

productividad *productivity*

programa-de-inversión-*investment.program*

progresión-aritmética-*arithmetic.progression*

progresión-geométrica-*geometric.progression*

progresión-lineal-*linear.progression*

promedio *average*

promedio-ponderado-*weighted-average*

promedio-simple.*common-average,-simple***-***average*

proporcional-*proportional*

prorratear-*prorate,-apportion*

proyecto-de-inversión-*investment-project*

punto-de-equilibrio-*break-even.point*

punto-de-inflexión-*point.of-inflexion*

pyme.*abbrev. of.*"pequeña.y.mediana.empresa".*small and.medium enterprise,.SME..*

R

racionalizar-*rationalise,-streamline-.*

ratio-*ratio*

razón-*ratio,.rate*

rebajar-*reduce,-discount, rebate*

recibo-*receipt*

recobro-*recovery*

recupero-*recovery,.redemption, salvage*

recursos-financieros-*financial resources, funds*

redescuento-*rediscount*

redondear-*round off*

refinanciar-*refinance-.*

regalía-*royalty*

regla-de-cálculo-*slide.rule*

reintegro-*refund,.reimbursement,.repayment, drawback-.*

reinversión-*reinvestment*

remesa *shipment,.remittance,-delivery*

rendimiento-*yield,-profitability, return,-performance-*.

renta *profit,-revenue,-income,-.yield, rent, annuity*

reserva-*reserve,-allowance-.*

residual-*residual*

respaldo-financiero-*financial-support,-financial backing*

resta-*subtraction*

restar-*deduct, subtract*

resultado-*result, profit-or-loss-.*

revalúo-*revaluation*

riesgo-crediticio-*credit-risk*

riqueza *wealth*

rotación-del-capital-*capital-turnover*

S

SA (Sociedad Anónima) *public.limited-company-(UK),-. incorporated-company-.(US), corporation,.business.corporation*

SRL (Sociedad de Responsabilidad Limitada) *limited-. company,-limited.liability-company*

sala de-ventas-*salesroom*

saldar-*settle,.pay,.pay.off,-cancel*

saldo-*balance,-account-balance,-bargain,-remnant-*.

sanear-*clean-up*

seguro.*insurance,.assurance,.secure, safe*

seña-*part-payment,.down payment,-deposit,.binder*

sistema-bancario-*banking-system*

sobregiro-bancario.*bank-overdraft*

sobretasa-*surtax,-overcharge,.surcharge*

socio-*partner,-member-.*

suma-*sum,-addition,.amount*

.

superávit-*surplus-*.

suspender-pago-*stop.payment*

T

tabla-de-amortización-*depreciation.schedule,-.amortisation-schedule,-payment.schedule*

talón-de-cheque-*cheque-stub*

tarjeta-de-crédito *credit-card-.*

tarjeta-**de**.**débito**-*debit-card-.*

tasa-*rate-*.

tasa-activa-*lending-rate*

tasa-de-descuento-*discount.rate*

tasa-de-inflación-*rate-of-inflation*

tasa-de-interés-*interest-rate*

tasa-de-rendimiento.*yield-rate,-rate-of-return,-.performance.rate*

tasa-interna-de-retorno-*internal.rate.of-return*

tasa-pasiva-*borrowing-rate*

tasa-preferencial-*prime-rate,.preferential-rate*

tasa-variable-*floating-rate,-variable-rate*

tasa-vencida.*overdue-rate*

técnica-_technique_

tenedor-de-bonos-*bondholder*

término-_term,.duration,-period-._

tesoro-_treasury,.treasure_

tiempo-_time_

tipo.*type,-rate-.*

tipo-comprador-*buying.rate*

tipo-vendedor-*selling.rate*

título-bursátil-*listed-security*

toma-de-ganancias-*profit-taking***-**

total-_total_

transacción-_transaction_

transferencia-_transfer,.transference_

trimestre-_quarter_

U

unidad-monetaria-_monetary_**-**_unit_

útil-_useful_

utilidad-bruta-_gross_**-**_margin,_**-**_gross_**-**_profit_

utilidad-líquida-_net_**-**_profit_

V

valor-*value,-worth,-denomination,-paper-*

valor-al-cobro-*document-for-collection*

valor-residual-*scrap-value,-residual-value,-junk-value*

valuación-*appraisal,-valuation,-assessment*

variable-*variable,-that-fluctuates-or-changes*

variación-*variation,-fluctuation,-variance*

vencimiento-*maturity,-expiration,-deadline*

venta-a-crédito-*credit-sale,-charge-sale-*

venta-al-contado-*cash-sale*

Z

zona *zone*

zona-fiscal *tax-district-*

zona-**franca** *tax-free-zone, free-zone, foreign-trade-zone*

zona industrial-*industrial-area,-industrial-zone*

Bibliografía

Botbol, J. (2006). *Matemática financiera: teoría y práctica.* Editorial Ramos.

Buzzi, A. M. (2010). *Decisiones empresarias: aplicaciones de cálculo financiero e investigación de operaciones.* Osmar Buyatti.

Fernández, L. A. (2006). *Cálculo financiero de las operaciones simples*. Prometeo.

Fernández, L. A. (2009). *Elementos de cálculo financiero*. Prometeo.

Fernández, L. A. (2010). *Cálculo financiero de las operaciones simples y complejas.* Prometeo.

Gianneschi, M. (2005). *Curso de matemática financiera.* Ed. Macchi.

Instituto Nacional de Estadística y Censos. (2008). Valorización mensual de la canasta básica alimentaria y de la canasta básica total. https://biblioteca.indec.gob.ar/bases/minde/canasta_03_08.pdf

Jiménez Sánchez, J. A. y Jiménez Blasco, M. (1997). Matemáticas financieras y comerciales. McGraw-Hill; Interamericana de España.

Página web consultada:

INDEC: Instituto Nacional de Estadística y Censos. (2022). *Home* [página web]. https://www.indec.gob.ar/