APLICACIONES MATEMÁTICAS BÁSICAS UTILIZADAS EN CÁLCULO FINANCIERO

La matemática financiera sustenta la estructura de resolución de sus problemas en un conjunto mínimo de reglas, procedimientos y principios que provienen de la matemática general. El evaluador financiero deberá, por consiguiente, encontrarse familiarizado con este lenguaje para abordar con éxito la solución de los interrogantes planteados.

Desde el punto de vista pedagógico, el docente encargado de transmitir los conceptos y fundamentos financieros, sugerirá a los alumnos la revisión de dichos fundamentos matemáticos previos al desarrollo de los distintos tópicos de la materia, con el propósito de hacer más comprensible la interpretación de los desarrollos y, obviamente, arribar a resultados satisfactorios.

No resulta posible, por consiguiente, interpretar adecuadamente los distintos conceptos financieros sin esta mínima cantidad de elementos de matemática general, por lo que podría resultar de interés al lector recordar algunos pocos conceptos que servirán para el desarrollo de los siguientes capítulos, sin perjuicio de las oportunas consultas al abundante material bibliográfico que existe a tales efectos.

EXPONENTES

El producto de un número real que se multiplica por sí mismo, "a x a", o bien "a*a", se expresa como a^2. Si este mismo número se multiplicara por sí mismo n veces se expresaría como a^n.

Es así que designamos al número "a" como base y al número "n" (escrito arriba y a la derecha de este) se lo llama exponente o potencia. Entonces, el exponente nos indicará el número de veces que la base "a" se multiplica por sí misma. La expresión a^n se lee como "a elevado a n".

Si n es un número entero positivo:

$$a^n = a \times a \times a \times a..x..a, \text{ n veces}$$

Ejemplos:

Siendo a = 2 y n = 3, entonces resulta que:

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

Ahora, siendo a = (1+i) y n = 3, entonces $a^3 = (1+i)^3$ y si asignamos a i un valor, por ejemplo del 4 %, es decir del "cuatro por ciento", leeremos entonces: 4/100, lo cual indica que el entero se ha dividido en cien partes y se han tomado de ellas cuatro, esto equivale en una expresión de "tantos por uno" a 0,04, la expresión sería: $(1+i)^3 = (1+0{,}04)^3 = 1{,}124864$

REGLAS EN EL USO DE LOS EXPONENTES

Si "a" y "b" son números reales distintos de cero y los exponentes "m" y "n" resultan ser enteros y positivos, podremos deducir algunas reglas necesarias para trabajar con exponentes:

Multiplicación de dos potencias de igual base:

a^m y a^n son dos potencias que tienen igual base "a". La multiplicación o producto de a^m xa^n = a $^{m+n}$

Ejemplo:

para m = 3 y n = 2, resulta ser que:

$$a^m \times a^n = a^3 \times a^2 = a^{2+3} = a^5$$

$$(a \times a \times a) \times (a \times a) = a \times a \times a \times a \times a = a^5$$

El producto o multiplicación de dos potencias de igual base es igual a la base común elevada a la suma de los exponentes.

División o cociente de dos potencias de igual base:

Sean a^m y a^n dos potencias de igual base "a", la división o cociente entre a^m y a^n = a^m / a^n = a $^{m-n}$.

Ejemplo:

Si m = 6 y n=3, entonces:

$$\frac{a^6}{a^3} = a^6 - a^3 = a^3$$

La división o cociente de dos potencias de igual base es igual a la base común elevada a la diferencia o resta de los exponentes, aquí se resta del exponente del numerador el exponente del denominador.

Potencia de potencia:

Si a a^m la consideramos como base y elevamos esta a la potencia n = 2, $(a^m)^2$, significaría que a^m (en conjunto) se multiplica por sí misma dos veces: $(a^m)^n = (a^m)^2 = a^m \times a^m$, $a^{(m+m)} = a^{2m}$, así entonces generalizando, tenemos que: $(a^m)^n = a^{(m+n)}$

Ejemplo:

Si m = 2 y n = 3, entonces:

$$(a^m)^n = a^2 \times a^2 \times a^2 = (a^2)^3 = a^{(2+2+2))} = a^6$$

o bien podría explicarse de otra forma:

$a^2 = a \times a$, y entonces $(a^2)^3$ sería igual a:

$$(a \times a)(a \times a)(a \times a) = a \times a \times a \times a \times a \times a = a^6$$

La potencia de una potencia es igual a la base elevada al producto de los exponentes.

Potencia del producto de dos factores:

Siendo $6^2 = 6 \times 6 = 36$, si descomponemos el 6 en dos factores tendríamos, por ejemplo, que:

$(2 \times 3)^2 = (2 \times 3)\times(2 \times 3) = 2 \times 3 \times 2 \times 3$, los cuales al reagruparlos se pueden expresar como:

$(2 \times 2)\times(3 \times 3)$, o bien $2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$

Así, generalizando podemos decir que:

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

El producto de dos factores elevados a una potencia es igual al producto de los factores elevados a dicha potencia.

Potencia del cociente de dos factores:

Si partimos de:

$$\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 2^2 = 4,$$

sabemos además que la división es el inverso de la multiplicación.

Utilizando las propiedades antes mencionadas tenemos que:

$$\left(4\times\frac{1}{2}\right)^2 = 4^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4^2\times\left(\frac{1^2}{2^2}\right) = 4^2\times\frac{(1\times1)}{(2\times2)} = 16\times\frac{1}{4} = 4$$

Generalizando, tenemos que:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

El cociente de dos factores elevado a una potencia, es igual al cociente de los factores elevados a dicha potencia.

Casos particulares con exponente cero, negativo y fraccionario:

1) Exponente cero: por definición matemática, todo número real distinto de cero elevado al exponente cero es igual a 1, entonces $a^0 = 1$

2) Todo número dividido por sí mismo es igual a la unidad, ejemplo $\frac{208}{208}=1$, $\frac{a}{a}=1$,

también $\frac{a^m}{a^m}$ será = 1. Si recordamos que el cociente de dos potencias de igual base se expresa como la base común elevada a la diferencia de los exponentes: $a^{m-m}=a^0$, comprobamos entonces que todo número elevado a cero = 1

3) Exponente negativo: todo número real distinto de cero y elevado a un exponente negativo, es igual a la fracción de 1 dividido por dicho número elevado a su exponente con signo positivo: $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

4) A la inversa, toda fracción cuyo denominador es un número real distinto de cero y está elevado a una potencia con signo negativo es igual a dicho número elevado a la misma potencia con exponente positivo.

5) Exponente fraccionario: sea a un número real distinto de cero y está elevado a un exponente fraccionario m/n, entonces:

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(a)^m}$$ (raíz de n, elevada a la potencia m)

Ejemplo:

$9^{\frac{4}{2}}=9^2=81$, o bien $9^{\frac{4}{2}}=\left(\sqrt[2]{9}\right)^4=3^4=81$

Logaritmos

La teoría logarítmica fue creada para simplificar los cálculos financieros, especialmente, de factores de capitalización en régimen compuesto, más tarde se difundió su empleo en otras áreas matemáticas. Juan Neper, hacia 1614, elaboró la primera tabla logarítmica (que lleva su nombre) hacia 1614, utilizando el número irracional 2,71828…; también conocidos como logaritmos "en base e" o "naturales". Posteriormente, en 1617 Briggs publica la primera tabla de logaritmos "en base 10" o "decimales".

Definición: si "N" y "b" son números positivos distintos de 1, entonces el logaritmo en base b del número N es el exponente "L" de la base b, tal que:

$$b^L = N \quad L = \log b \ N$$

Se usan comúnmente los llamados logaritmos naturales cuya base es el número e = 2,718281829 y los logaritmos decimales cuya base es b = 10

Por ejemplo: $3 = \log_2 8$, implica que:

$2^3 = 8$ log 1.000 = 3, ya que:

$10^3 = 1.000$ log 10 = 1, ya que $10^1 = 10$ log 1 = 0, ya que 100 = 1 log 0.10 = -1, ya que $10^{-1} = 0.10$

El logaritmo del producto de dos números positivos es igual a la suma de los logaritmos de los números. Por ejemplo: log (A x B) = log A + log B

El logaritmo del cociente de dos números positivos es igual a la diferencia del logaritmo del numerador con el logaritmo del denominador: log (A / B) = log A - log B

El logaritmo de un número elevado a la potencia n es n veces el logaritmo del número log An = n log A.

Si L = log N, N es llamado el antilogaritmo de L.

Progresiones aritméticas

Si observamos el siguiente ordenamiento numérico:

1; 3; 5; 7; 9

Se cumple que:

3-1=2

5-3=2

7-5=2

9-7=2

Esta relación nos permite inferir que se cumplen algunas premisas constantes:

1. Existe un ordenamiento en la sucesión de términos
2. Se verifican como mínimo más de dos términos
3. La diferencia entre dos valores consecutivos se presenta constante

Estamos entonces en condiciones de reconocer una progresión de tipo aritmética cuando se cumplen las anteriores premisas. Veamos también la siguiente secuencia numérica:

24; 20; 16; 12; 8

En este caso, también se cumplen las premisas puesto que la diferencia (-4), aun siendo un valor constante y negativo, responde al concepto básico de donde podemos generalizar que una progresión aritmética es aquella sucesión de números formada por tres o más términos en la cual cada uno de ellos es igual al anterior, más (menos) un número constante denominado diferencia, razón o incremento.

Para el caso del primer ejemplo, será considerada una PA (progresión aritmética) creciente y para el segundo se trataría de una PA decreciente.

Otra característica relevante de estas series es que se las suele denominar monótonas porque solamente crecen o disminuyen, y suelen ser representadas como una recta en un eje de coordenadas ortogonales. Por otra parte, estas pueden considerarse definidas o finitas, o bien indefinidas o infinitas, dependiendo de qué la cantidad de términos sea o no conocida o cuantificable.

Progresión geométrica

Si observamos el siguiente ordenamiento numérico:

1; 4; 16; 64; 256

Se verifica que:

$$\frac{4}{1} = \frac{16}{4} = \frac{64}{16} = \frac{256}{64}$$

Para mantener la formación estable se respetaron ciertas premisas:

1. Existe un ordenamiento en la sucesión de términos
2. Se verifican como mínimo más de dos términos
3. El cociente entre dos términos consecutivos se presenta constante

Podemos aseverar que, en este caso, nos encontramos en presencia de una progresión geométrica (PG) por cumplirse las premisas anteriores, es decir que se trata de una PA cuando existe una sucesión formada por tres o más términos, donde cada uno de ellos es igual al anterior multiplicado por un número constante denominado razón.

Aquí puede presentarse, como característica distintiva, que la razón resulte menor a 0 (cero), en cuyo caso, y aplicando la regla de signos, se presentarán valores alternadamente positivos y negativos, por lo que así se las llamará oscilantes.

Límites (continuidad)

El concepto de límite se encuentra asociado a los distintos tipos de sucesiones numéricas que se pueden formar: ellas son definidas cuando poseen un valor finito, y serán indefinidas cuando tienden a más infinito o menos infinito, por último se encuentran las oscilantes que no tienden a ningún valor.

Concepto de infinitésimo: se dice que la función es un infinitésimo en un punto x=k si el límite de esta se anula cuando tiende a ese valor k.
Ejemplo: lím. x= >1 de x^5-1=0, se dice que es infinitésima en x=1, entre otros casos, las funciones son infinitésimas en ciertos valores de x.

EJERCICIOS DE ADAPTACIÓN

1. $270x(6+8{,}2X)=8$

2. $(426Z+132N)x5=\frac{1}{9}x(936Z+1035N)-28Z$ (para Z=700^{-1})

3. $\frac{4306}{2R}+30x(\frac{54}{276})=\frac{1}{4}R$

4. $1{,}75=[(1+0.8X)+(1+0.7Z)]$

5. $\frac{45}{80}=7X+\left(X-\frac{0.75}{100}\right)^{5}$

6. $3.1=(1+0.5X)x[1+(0.2X+0.3)]$

7. $\frac{1475}{\left(1+\frac{6}{12X}\right)}=\frac{1675}{(1+\frac{3}{4}Xx\frac{1}{20})}$

8. $372.5=200x7X+200X5Z$ (para Z=(X+1.25/100)

9. $200=X(1+\frac{2}{10})^{11}-1$

10. $50=X\left[(1+0.08\ )^{36}x(1+0.21)^{12}-1\right]$

11. $443=200x(1.005)^{x}-1$

12. $1234 = 436x\left(1.08^{x} - 1\right)$

13. $X = \sqrt[15]{\frac{227}{107} + 1} - 1$

14. $400 = 2.45Xx(1 + 0.05)^{8} + Xx(1.07)^{10}$

15. $Z = \left[400x(1 + 0.03)x(1 + 0.07)x(1 + 0.06) - Z\right]^{0.5} x1.05^{0.5}$

16. $\sqrt[N]{\frac{1790}{52}} = 1.2$

17. $\frac{1}{2}R = \left\{\left[100\left(1.15\right)^{5} - R\right]^{2} x1.7x1.2 - R\right\}2x13$

18. $270 = \frac{A}{\left(1 + 0.07x2\right)} + Ax(1 + 0.07x3)$

19. $25T + 100 = T\left\{\left[1.02^{-8} - 1\right]/ 0.02\right\}x1.05x1.07 + 12$

Resolver aplicando logaritmos

1. $2.317^{11} xX^{-3} = X^{14}$

2. $\frac{5}{23^{9}} x\left(\frac{1}{36}\right)^{31} = B^{11}$

3. $\left(\frac{1}{35}\right)^{-1} = \left(\frac{44}{12}\right)^{7} x\frac{R^{\frac{2}{7}}}{H^{\frac{-5}{6}}}$ (para H=14)