CAPITALIZACIÓN COMPUESTA

Habiendo visto ya la operatoria financiera en el régimen simple, donde los intereses se generan de periodo en periodo siempre a partir del mismo capital original (Co), y recordando que el concepto de capitalización de intereses consiste en incorporar los intereses devengados en un cierto periodo de tiempo al capital preexistente (como hecho aislado o esporádico), el proceso conocido como capitalización compuesta se sustenta en sucesivas capitalizaciones a intervalos regulares de tiempo, coincidentes con la unidad de tiempo de la tasa pactada.

Esto significa que el inversor podrá verificar un incremento de su patrimonio de modo más que proporcional en cada ciclo, dado que, a medida que se incorporen intereses a su capital, los próximos intereses serán calculados por ese nuevo monto, no ya por el capital original, esto es que resultan productivos.

Calcular una operación por el régimen de capitalización compuesta en lugar de hacerlo por el régimen de capitalización simple permite transformar los rendimientos finales puesto que, tanto el monto (Cn) alcanzado como el interés (I) final variará en distinta proporción. Esto ocurre porque en el monto compuesto los intereses se calculan sobre capitales distintos.

La fórmula utilizada para evitar la repetición innecesaria de cálculos reiterativos se obtiene del cuadro de la página siguiente al referirnos a un periodo de tiempo genérico definido como "n", y es la siguiente:

Fórmula general del monto a interés compuesto:

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

Cuadro de evolución de un capital Co desde el periodo "0" hasta el periodo "n"

n	Capital	Interés: Cxi	Monto: C+i
0	C_0	0	C_0
1	C_0	$C_o \times i$	$C_1 = C_0 + C_0 \times i = C_0(1+i)$
2	C_1	$C_1 \times i$	$C_2 = C_1 + C_1 \times i = C_1(1+i) = C_0(1+i)^2$
3	C_2	$C_2 \times i$	$C_3 = C_2 + C_2 \times i = C_0(1+i)^2 \times (1+i) = C_0(1+i)^3$
…			
n-1	C_{n-2}	$C_{n-2} \times i$	$C_{n-1} = C_{n-2} + C_{n-2} \times i = C_0(1+i)^{n-2} \times (1+i) = C_0(1+i)^{n-1}$
n	C_{n-1}	$C_{n-1} \times i$	$C_n = C_{n-1} + C_{n-1} \times i = C_{n-1}(1+i) = C_0(1+i)^{n-1} \times (1+i) = C_0(1+i)^n$

Para reconocer el interés percibido por el inversor al concluir la operación financiera realizada en el régimen de capitalización compuesta, recordaremos la expresión que vincula al monto con el capital:

$$I = C_n - C_0$$

Por lo que, reemplazando la fórmula del monto compuesto en Cn, obtendremos:

$$I = C_0(1+i)^n - C_0$$

$$I = C_0[(1+i)^n - 1]$$

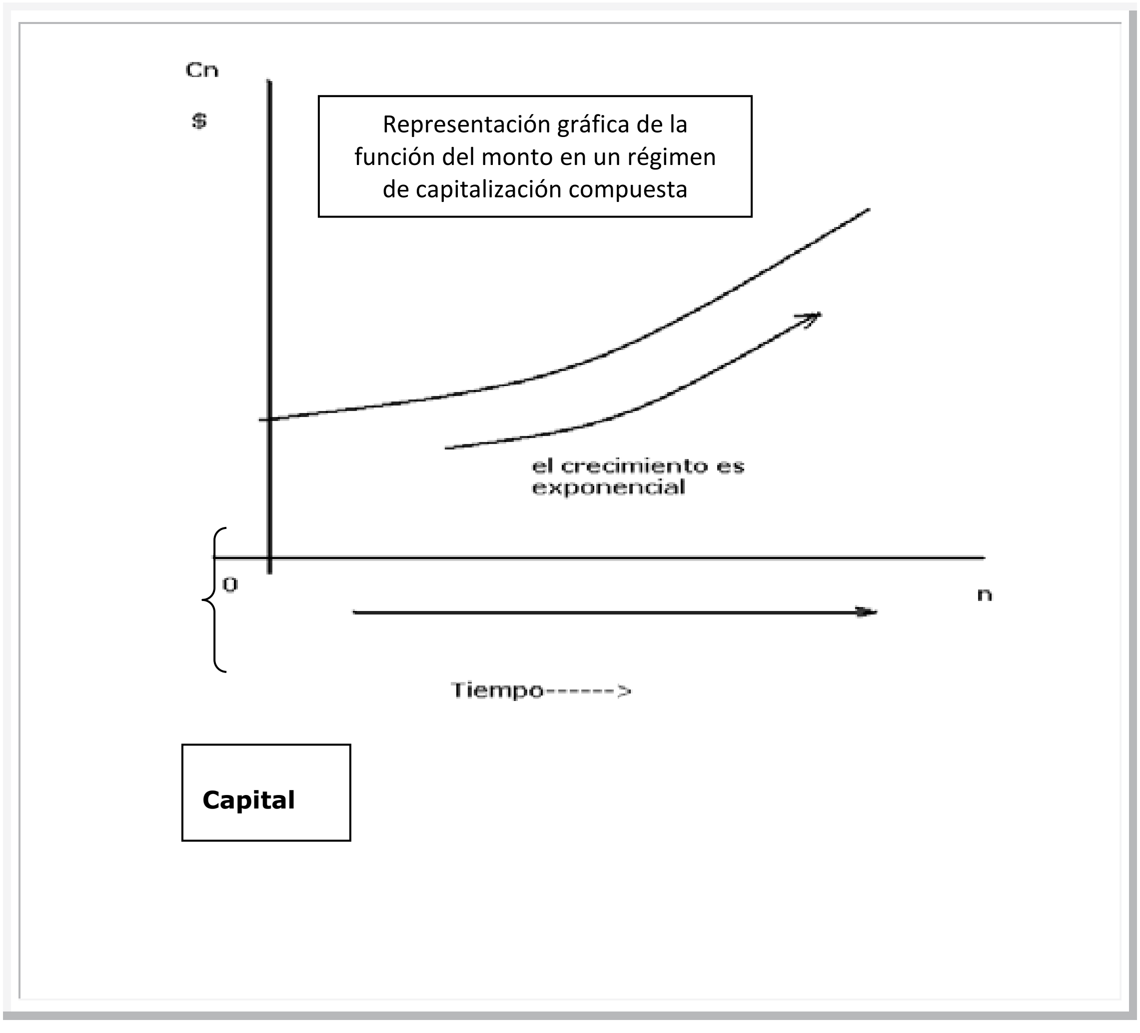
Podemos invertir la expresión del monto compuesto despejando el capital, donde:

$$C_0 = C_n(1+i)^n$$

Para obtener el interés compuesto a partir de Cn:

$$I = C_n - \mathrm{C_n}(1+i)^n$$

$$I = C_n[1 - (1+i)^{-n}]$$



La función del monto evoluciona en forma exponencial, los intereses que se van capitalizando al término de cada periodo contribuyen a incrementar de manera más que proporcional el capital a lo largo del tiempo, a diferencia de lo ocurrido en el régimen simple de capitalización donde la evolución se mantiene constante, ya que se parte siempre del valor adoptado por Co.

Lo propio ocurre si se observa la función del interés compuesto. Se origina al igual que el simple a partir de 0 (cero), pues en el instante inicial de la operación el capital original aún no ha devengado interés alguno pero rápidamente, luego de haberse alcanzado el primer periodo, es decir, un ciclo completo correspondiente a la unidad de tiempo en que fuera pactada la tasa de la operación, la aceleración del proceso de capitalización permite distanciar los resultados del interés simple, en sentido figurado "mientras uno camina por las escaleras, el otro viaja en ascensor".

COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS ENTRE EL INTERÉS SIMPLE Y EL INTERÉS COMPUESTO

Cabe aclarar que, al contrario de lo que se supone "a primera vista", *no necesariamente siempre* será mayor el resultado final usando una tasa efectiva (régimen compuesto) que otra simple del mismo valor y frecuencia temporal, pues antes deberemos verificar la relación entre la unidad de tiempo propia de la tasa pactada con el plazo de exposición en cada operación.
Podemos aseverar que, en relación a "t" (plazo de exposición del capital en la operación), cuando:

a) El plazo de exposición se encuentra comprendido entre el instante de origen y el límite definido por la unidad de tiempo de la tasa pactada:

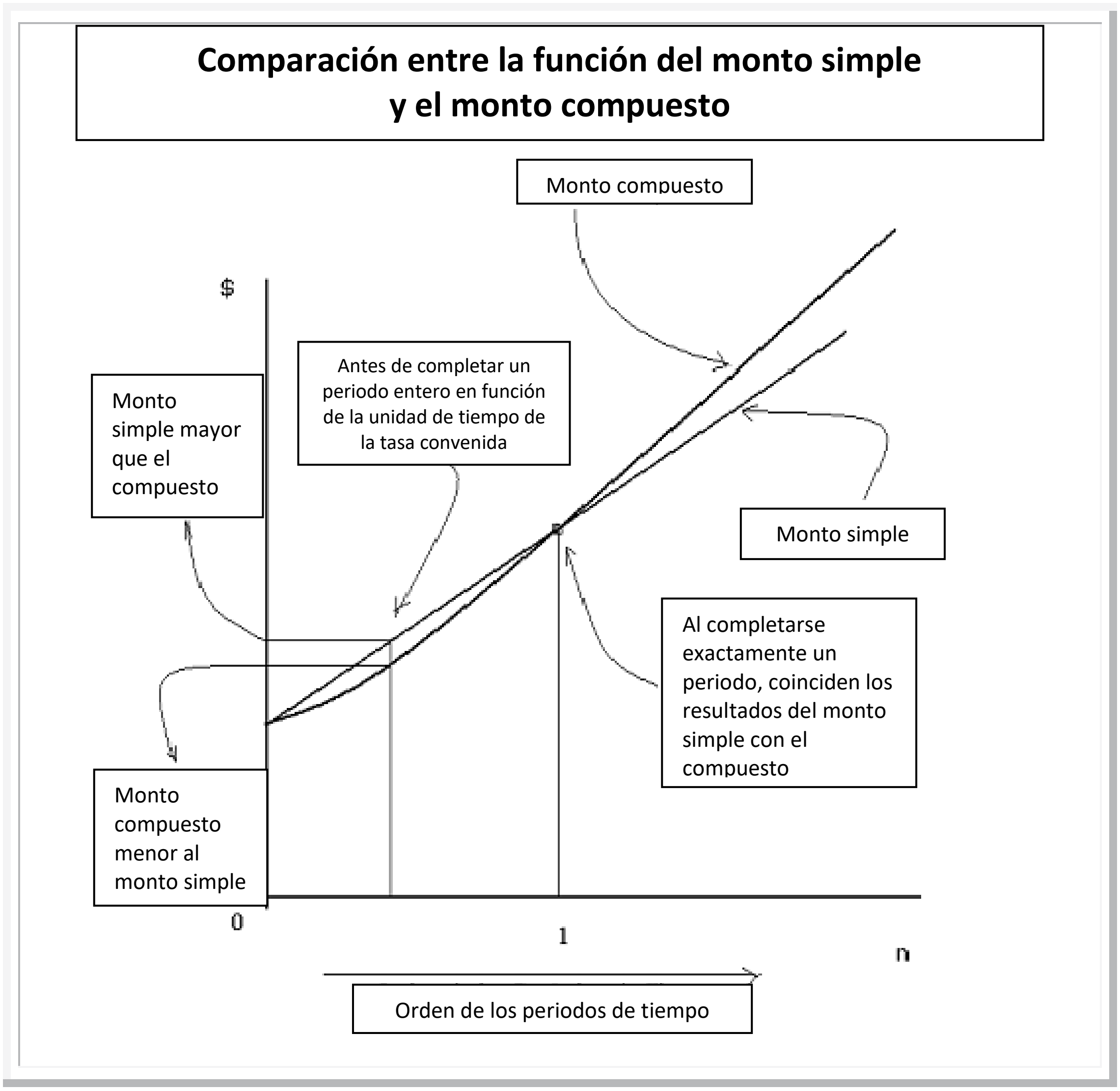
$0 < t < 1$ el monto simple es mayor que el compuesto

b) El plazo de exposición es "0" o coincide con el instante en que se cumple la unidad de tiempo de la tasa: "1":
$0 = t = 1$ el monto simple es igual al compuesto

c) El plazo de exposición supera el límite definido por la unidad de tiempo de la tasa:

t >1 <u>el monto compuesto es superior al simple</u>

El siguiente gráfico nos muestra qué ocurre en cada momento:



Ejemplo:

Calcular el monto del que podrá disponer un inversor que deposita $10.000 durante cinco meses, si en la operación pacta una tasa del 40 % anual (año comercial) bajo los siguientes supuestos:

a) Régimen simple (tasa simple)
b) Régimen compuesto (tasa efectiva)

SOLUCIÓN:

a) $$10000 \times \left(1 + 0.40 \times \frac{5}{12}\right) = 11.666.67$$

b) $$10000 \times (1 + 0.40)^{\frac{5}{12}} = 11.505.00$$

Rtas.: en régimen simple la operación devuelve un monto de $11.666,67 mayor al monto compuesto de $11.505,00.

EJERCICIOS RESUELTOS EN RÉGIMEN COMPUESTO

- Se colocan \$10.000 durante 11 meses y se obtiene un monto de \$89.116,50 al utilizar una cierta tasa mensual capitalizable mensualmente. Calcular los intereses ganados en los últimos cinco meses.

SOLUCIÓN:

Independientemente de la tasa indicada en el enunciado, para responder a lo pedido podemos usar cualquier tasa efectiva por lo que podríamos elegir una tasa para cinco meses sin alterar el resultado final:

$$89116.50 = 10000 \times (1 + i_5)^{\frac{11}{5}}$$

$$i_5 = \left(\sqrt[11]{8.91165}\right)^5 - 1$$

$$i_5 = 1.70271$$

Luego de conocer una tasa para esta operación, podríamos ubicarnos en el sexto mes para saber el valor del capital a ese momento:

$$10000 \times (1 + 1.70271)^{\frac{6}{5}} = C_6$$

$$C_6 = \$32.973.04$$

Para conocer el interés del último periodo de cinco meses de la operación podríamos utilizar la tasa hallada, dado que devengará el interés indicado efectivamente al cumplirse un ciclo completo de su propia unidad de tiempo (cinco meses):

$$I_{11-6} = C_6 \times i_5$$

$$I_{11-6} = 32973.04 \times 1.70271$$

$$I_{11-6} = \$56.143.52.-$$

También bastaría con definir la diferencia entre el monto final y el capital disponible al terminar el sexto periodo:

$$I_{11-6} = C_{11} - C_6$$

$$I_{11-6} = 89.116.50 - 32.973.04$$

$$I_{11-6} = \$56.143.52$$

- Un capital ha producido en diez meses al 8 % mensual efectivo de interés, un monto que supera en \$2.000 al que hubiera logrado en igual lapso y condiciones de tasa a interés simple. Determinar de qué capital se trata y cuál hubiera sido la tasa que a interés simple igualara el monto logrado a interés compuesto.

SOLUCIÓN:

El planteo requiere igualar ambos montos:

$$C_n = M + 2.000$$

$$C_0 (1 + 0.08)^{10} = C_0 (1 + 0.08 \times 10) + 2.000$$

$$2.158925C_0 = 1.8C_0 + 2000$$

$$0.358925C_0 = 2.000$$

$$C_0 = \frac{2000}{0.358925}$$

$$C_0 = \$5.572.19.-$$

Para obtener la tasa mensual simple de la operación que le permita al inversor reunirse con $12.029,95:

$$12.029.95 = 5.572.19 \times (1 + i_m \times 10)$$

$$i_m = \frac{2.1589 - 1}{10}$$

$$i_m = 0.11589$$

La tasa mensual simple sería del 11,589 %

- Un capital colocado a interés compuesto rinde al cabo de diez meses un monto de $11.894, en cambio, si es colocado por 36 meses el monto asciende a $18.674. Encontrar el capital colocado y la tasa bimestral utilizada.

SOLUCIÓN:

Se debe cumplir que:

$$C_0 = C_n (1+i)^{-n}$$

$$11894(1+i_b)^{-5} = 18674(1+i_b)^{-18}$$

$$\frac{18674}{11894} = \frac{(1+i_b)^{18}}{(1+i_b)^{5}}$$

$$1.57 = (1+i_b)^{18-5}$$

$$\sqrt[13]{1.57} - 1 = i_b$$

$$i_b = 0.035307$$

Rta.: la tasa bimestral efectiva utilizada en dicha operación fue del 3,5307 %

Para calcular el capital original partimos de cualquiera de los montos:

$$11894(1+0.035307)^{-5} \cong \$10.000$$

$$18674(1+0.035307)^{-18} \cong \$10.000$$

- Se depositaron $1.000 en una cuenta al 5 % efectivo mensual durante un año, sin embargo al cumplirse cuatro meses de la colocación inicial se efectúa un retiro de $200 y a los siete meses del depósito inicial se realiza una adicional de depósito de $250. Determinar el monto final de la operación.

SOLUCIÓN:

$$C_n = 1000(1+0.05)^{12} - 200(1+0.05)^{8} + 250(1+0.05)^{5}$$

$$C_n = 1795.86 - 295.49 + 319.07$$

$$C_n = \$1.819.44.-$$

Otra manera de llegar al mismo resultado:

$$C_n = \left\{\left[1000 \times (1+0.05)^4 - 200\right] \times (1+0.05)^3 + 250\right\} \times (1+0.05)^5$$

$$C_n = (1015.51 \times 1.1576 + 250) \times 1.27628$$

$$C_n = \$1.819.44.-$$

- Un inversor realiza un depósito de $12.000 en una cuenta que capitaliza intereses mensualmente, durante 180 días. La tasa pactada en dicha operación resultó inicialmente del 21 % trimestral, incrementándose un 26,25 % luego de 70 días de comenzada la operación. Calcular el total de intereses una vez finalizada la colocación.

SOLUCIÓN:

Observamos que las tasas indicadas resultan ser en ambos casos tasas nominales, por lo que debemos ajustarlas transformándolas a tasas efectivas para poder realizar nuestros cálculos:

$$I = 12.000 \times \left(1+\frac{0.21\times 30}{90}\right)^{\frac{70}{30}} \times \left(1+\frac{0.2625\times 30}{90}\right)^{\frac{110}{30}} - 12000$$

Rta.: el interés neto de la operación es: $I = \$7.112.49.-$

- Durante una operación financiera cuya duración se extendió por diez meses el interés devengado en el último bimestre resultó ser 1/3 del capital originalmente depositado. La tasa vigente durante el primer semestre fue del 8 % bimestral adelantada. Calcular la tasa bimestral adelantada posterior, sabiendo que se desarrolla en un régimen compuesto.

SOLUCIÓN:

Definimos el planteo de acuerdo al enunciado propuesto:

$$\frac{C_0}{3} = C_0 \times (1-0.08)^{-3} \times (1-d)^{-1} \times \left[(1-d)^{-1} - 1\right]$$

$$0.25956 \times \frac{\cancel{C_0}}{\cancel{C_0}} = (1-d)^{-1} \times (1-d)^{-1} - (1-d)^{-1}$$

$$0.25956 = (1-d)^{-2} - (1-d)^{-1}$$

siendo:

$$(1-d)^{-1} \equiv \frac{1}{X}$$

$$0.25956 = \frac{1}{X^2} - \frac{1}{X}$$

$$0.25956 = \frac{X - X^2}{X^3}$$

$$0.25956\frac{X^3}{X} + \frac{X^2}{X} - \frac{X}{X} = \frac{0}{X}$$

$$0.25956X^2 + X - 1 = 0$$

Operando convenientemente a partir de una expresión cuadrática, obtenemos el valor de "X" válido:

X=0.8238

Reemplazando en (1-d) obtenemos la respuesta:

$$d_{bimestral} = 0.1761646$$

- Se depositaron durante 180 días $8.600 que generaron un monto de $10765,60. En su transcurso se emplearon tres tasas efectivas y mensuales, del 3, 4 y 5 % respectivamente, la primera de ellas permaneció vigente el doble de tiempo que la última. Calcular los sucesivos plazos de capitalización.

SOLUCIÓN:

La variable a identificar es el plazo t, recordamos que $n=\frac{t}{ut}$, por lo tanto, si asignamos al último plazo el valor t, el primer plazo será $2t$ y el segundo, $180-3t$, en consecuencia la ecuación quedaría armada de la siguiente forma:

$$10765{,}60 = 8600 \times 1{,}03^{\frac{2t}{30}} \times 1{,}04^{\frac{180-3t}{30}} \times 1{,}05^{\frac{t}{30}}$$

Aplicando logaritmos:

$$\ln\left(\frac{10765{,}60}{8600}\right) = \frac{2t}{30} \times \ln 1{,}03 + \frac{180-3t}{30} \times \ln 1{,}04 + \frac{t}{30} \times \ln 1{,}05$$

Operando:

$$30 \times 1{,}251814 = 2t \times 0{,}0295588 + (180-3t) \times 0{,}0392207 + t \times 0{,}0488$$

$$6{,}738 = 0{,}0591176t + 7{,}05973 - 0{,}117663t + 0{,}0488t$$
$$0{,}0097454t = 0{,}32173$$
$$t \cong 33.dias$$

$$\therefore \begin{array}{l} 1er.plazo\_3\% \Rightarrow 2t = 66.dias \\ 2doplazo\_4\% \Rightarrow 180-3t = 81.dias \therefore \\ 3er.plazo\_5\% \Rightarrow t = 33.dias \end{array}$$