TASAS EQUIVALENTES EN RÉGIMEN COMPUESTO

Al referirnos a la equivalencia de tasas en el régimen compuesto debemos recordar las tasas oportunamente estudiadas hasta aquí, tanto en régimen de capitalización simple como en régimen de capitalización compuesta que se emplean con mayor frecuencia, de donde podemos encontrar tasas efectivas y tasas nominales, así como de carácter vencido o de carácter adelantado.

Resultará práctico disponer de un cuadro que las vincule, como el que se expone a continuación:

Capitalización	Carácter	Vencidas	Adelantadas
R. simple	Simples	***i***	***d***
Régimen compuesto	Efectivas Nominales	***i*** ***jm***	***d*** ***fm***

Para definir dos tasas que resulten equivalentes entre sí en régimen compuesto se deben presentar tres condiciones necesarias:

a) Que se obtengan a partir de capitales iguales
b) Que con ambas se puedan alcanzar a igualar sus montos finales
c) Que la comparación sea realizada en el mismo lapso de tiempo (t).

Partiendo de estas premisas, la comparación será efectuada a partir de la igualación de sus montos:

$$C_{n1} = C_{n2} \qquad (1)$$

Con independencia del tipo de operación o tasa aplicada ajustaremos convenientemente la expresión anterior, adecuándola a la tasa empleada.

1.1 Comparación entre dos tasas efectivas y vencidas

Adaptamos la expresión (1):

$$C(1+i1)^{n1} = C(1+i2)^{n2}$$

Lo que significa que, a la tasa denominada i1 (tasa conocida) se mantendrá vigente por n1 periodos, situación equivalente para la tasa por averiguar que denominaremos i2, la que se encontrará vigente por el plazo n2 (igualmente equivalente a n2).
Conociendo que:

$$n = \frac{t}{ut}$$

y simplificando los capitales C, puesto que las comparaciones se harán en función de capitales unitarios, es decir de $1 en cada caso para luego proporcionarlos al capital deseado, se nos representa la comparación solo entre los factores de capitalización como igualmente válida:

$$(1+i1)^{\frac{t}{ut1}} = (1+i2)^{\frac{t}{ut2}}$$

En la expresión precedente, ut1 responde a la unidad de tiempo en la que opera la tasa i1, en tanto ut2 se corresponde con la unidad de tiempo en que actúa la tasa i2. Por otra parte, expresando tanto t, ut1 y ut2 en la misma frecuencia temporal, es decir en forma homogénea, tendremos que resultará uniforme la comparación si tomamos todos estos elementos en días, como si los consideramos todos en meses, años, etc. Por lo que el elemento t resultará igual para cada caso, en concordancia con la condición (c) arriba indicada:

El mismo plazo

$$(1+i1)^{\frac{t}{ut1}}=(1+i2)^{\frac{t}{ut2}}$$

Veamos un ejemplo:

Considerar la tasa que resulta equivalente al 24 % efectivo trimestral que opera en forma bimestral.

SOLUCIÓN:

$$(1+0.24)^{\frac{t}{90}}=(1+i_b)^{\frac{t}{60}}$$

La tasa ib (bimestral) es la tasa que queremos comparar en este caso. Hemos elegido (arbitrariamente) realizar la comparación con plazos diarios, por lo que para la tasa trimestral indicamos que su ut=90, en tanto que para la bimestral ut=60. Resta pues definir algún valor de “t” (plazo de exposición) idéntico para cada una, por lo que podría decidir comparar ambas tasas en el término de 1 solo día, de donde:

$$(1+0.24)^{\frac{1}{90}}=(1+i_b)^{\frac{1}{60}}$$

Resolviendo la expresión anterior y despejando ib, tendremos: ib=0.1542, es decir que la tasa equivalente al

24 % efectivo trimestral resultará ser del 15,42 % efectiva bimestral.

Nótese que en un régimen compuesto no existe proporcionalidad entre las tasas efectivas que resultan ser equivalentes, puesto que el proceso de capitalización al que se ven sometidos los capitales incrementa en modo más que proporcional sus rendimientos.

Por otra parte, ambas tasas pueden utilizarse de manera indistinta por cualquier inversor, independientemente de la cuantía del capital disponible, dando como resultado montos iguales al partir de capitales iguales.

1.2 Comparación entre una tasa efectiva vencida (im) y otra nominal vencida (jm)

De la expresión (1) y considerando a la tasa nominal "jm" de características proporcionales y enunciativas, tendremos:

$$(1+i1)^{n1} = (1+\frac{jm}{m})^{n\times m}$$

Donde "m" nos indica la cantidad de veces que se producen capitalizaciones de intereses dentro de la unidad de tiempo de la tasa nominal. Dado entonces:

$$m = \frac{ut}{fs}$$

Donde fs= frecuencia subperiódica de la tasa nominal dada, tendremos que:

$$(1+i1)^{\frac{t}{ut1}} = (1+\frac{jm\times fs}{ut})^{\frac{t}{fs}}$$

Nótese que al realizar el producto de n*m podemos simplificar ut en el exponente del factor de capitalización de la tasa nominal, ya que:

$$n\times m = \frac{t\times \cancel{ut}}{\cancel{ut}\times fs}$$

Ejemplo:

Considerar la tasa efectiva vencida cuatrimestral equivalente al 18 % semestral con capitalización cada 33 días:

SOLUCIÓN:

La tasa por resolver es la efectiva, partimos del conocimiento de la tasa nominal:

$$\left(1+i_c\right)^{\frac{t}{120}} = \left(1+0.18\times\frac{33}{180}\right)^{\frac{t}{33}}$$

En este caso, ic =tasa efectiva vencida cuatrimestral.

Si elegimos considerar un plazo “t”=33 días:

$$\left(1+i_c\right)^{\frac{33}{120}} = 1.033$$

operando:

$$1.033^{\frac{33}{120}} = 1 + i_c$$

$$i_c = 1.1253 - 1$$

$$i_c = 0.1253$$

Rta.: la tasa efectiva vencida cuatrimestral resultará del 12.53 %.

1.3 Comparación entre una tasa nominal vencida (jm) y otra nominal vencida (jm)

Procedemos análogamente al desarrollo anterior:

$$(1 + \frac{jm1}{m})^{n \times m} = (1 + \frac{jm2}{m})^{n \times m}$$

$$(1 + \frac{jm \times fs}{ut1})^{\frac{t}{fs}} = (1 + \frac{jm \times fs}{ut2})^{\frac{t}{fs}}$$

Ejemplo:

Calcular cuál será la tasa nominal trimestral con capitalización quincenal equivalente al 24 % mensual con capitalización semanal.

$$\left(1+0.24\times\frac{7}{30}\right)^{\frac{t}{7}}=\left(1+j_m\times\frac{15}{90}\right)^{\frac{t}{15}}$$

Considerando el plazo "t"=15

$$1.12385=1+016667\times.j_m$$

$$j_m=\frac{0.12385}{0.16667}$$

$$j_m=0.7431$$

Rta.: la tasa nominal buscada será del 74,31 % trimestral con capitalización quincenal.

1.4 <u>Comparación entre dos tasas efectivas y adelantadas</u>

Para resolver este tipo de tasas debemos recordar la forma en que se expresa su fórmula, puesto que siendo:

$$V=N(1-d)^n$$

y $N=V(1-d)^{-n}$

Análogamente a $V\leftrightarrow C$ y $N\leftrightarrow C_n$

Por lo que:

$$Cn = C(1-d)^{n}$$

Igualando los montos unitarios para respetar la premisa n.º 2:

$$(1-d1)^{-n1} = (1-d2)^{-n2}$$

Por lo que podemos multiplicar por -1 cada exponente:

$$(1-d1)^{n1} = (1-d2)^{n2}$$

$$(1-d1)^{\frac{t}{ut1}} = (1-d2)^{\frac{t}{ut2}}$$

Ejemplo:

Calcular la tasa efectiva mensual adelantada equivalente al 4 % efectivo adelantado bimestral.

SOLUCIÓN:

Para d1=0.04 bimestral como la tasa conocida y d2=dm (tasa efectiva adelantada mensual):

$$(1-0.04)^{\frac{t}{60}} = (1-d_2)^{\frac{t}{30}}$$

Considerando a "t"=30

$$0.96^{\frac{30}{60}} = 1-d_{mensual}$$

$$d_{mensual} = 1 - 0.96^{\frac{1}{2}}$$

$$d_{mensual} = 0.0202$$

Rta.: la tasa efectiva mensual adelantada y equivalente resultaría del 2,02 %.

1.5 Comparación entre una tasa adelantada efectiva y otra adelantada nominal

Recordemos previamente que las tasas adelantadas "actualizan" en lugar de "capitalizan" al momento de referirnos específicamente al procedimiento de equivalencias. Para solucionar este caso debemos hacer lo propio de la siguiente forma:

$$(1-d)^n = (1-\frac{fm}{m})^{n \times m}$$

de donde:

$$(1-d1)^{\frac{t}{ut1}} = (1-\frac{fm \times fs}{ut})^{\frac{t}{fs}}$$

Ejemplo:

Considerar la tasa nominal cuatrimestral con actualización cada 27 días equivalente al 16 % semestral efectiva y adelantada.

$$(1-0.16)^{\frac{t}{180}} = \left(1 - f_m \times \frac{27}{120}\right)^{\frac{t}{27}}$$

Para el plazo "t"=27:

$$0.84^{\frac{27}{180}} = (1 - f_m \times 0.225)^{\frac{27}{27}}$$

$$0.974186 = 1 - f_m \times 0.225$$

$$f_m \times 0.225 = 1 - 0.974186$$

$$f_m = \frac{0.025814}{0.225}$$

$$f_m = 0.114729$$

Rta.: la tasa nominal equivalente resultaría del 11,4729 % cuatrimestral con actualizaciones cada 27 días.

1.6 <u>Comparación entre dos tasas nominales adelantadas</u>

Para el supuesto de comparar dos tasas "fm" procederemos a partir de la siguiente expresión:

$$(1 - \frac{fs1}{ut1})^{\frac{t}{fs1}} = (1 - \frac{fs2}{ut2})^{\frac{t}{fs2}}$$

Ejemplo :

Calcular la tasa nominal trimestral con actualización mensual equivalente al 6 % mensual con actualizaciones diarias.

SOLUCIÓN:

$$\left(1-f_m\times\frac{30}{90}\right)^{\frac{t}{30}}=\left(1-0.06\times\frac{1}{30}\right)^{\frac{t}{1}}$$

Siendo el plazo "t"=1 tendremos que:

$$(1-f_m\times 0.333)^{\frac{1}{30}}=0.998$$

$$1-f_m\times 0.333=0.998^{30}$$

$$-f_m\times 0.333=0.058292$$

multiplicando ambos términos por -1, y despejando fm:

$$f_m=\frac{0.058292}{0.333}$$

$$f_m=0.174876$$

Rta.: la tasa nominal trimestral con actualizaciones mensuales resultaría del 17.4876 %.

1.7 Comparación entre una tasa efectiva vencida con otra efectiva adelantada

Aquí se debe prestar especial atención, puesto que alguno de los exponentes correspondientes a los factores de capitalización y actualización deberá ser de signo negativo, puesto que los montos de cada uno así lo exigen. Recordemos que para la tasa vencida:

$$Cn = C(1+1)^{n}$$

mientras que para la tasa adelantada:

$$Cn = C(1-d)^{-n}$$

Al igualar sus montos para un capital unitario, sus respectivos factores de capitalización y actualización quedan enfrentados de la siguiente manera:

$$(1+i)^{n} = (1-d)^{-n}$$

Extendiendo los exponentes:

$$(1+i1)^{\frac{t}{ut1}} = (1-d2)^{-\frac{t}{ut2}}$$

Ejemplo:

Conociendo una tasa efectiva vencida mensual del 5 %, calcular la tasa efectiva y adelantada mensual equivalente.

SOLUCIÓN:

$$(1+0.05)^{1} = (1-d)^{-1}$$

operando:

$$1.05 = \frac{1}{1-d}$$

$$1-d = \frac{1}{1.05}$$

$$1-d = 0.952381$$

$$-d = -0.047619$$

multiplicando ambos miembros por -1:

d=0.047619

Rta.: la tasa efectiva mensual equivalente buscada sería del 4,7619 % adelantado.

1.8 <u>Comparación entre dos tasas nominales, una vencida (jm) y otra adelantada (fm)</u>

Resolver estas equivalencias nos remite a las explicaciones anteriores:

$$(1+\frac{jm}{m})^{n\times m} = (1-\frac{fm}{m})^{-n\times m}$$

Extendiendo sendas expresiones:

$$(1+\frac{jm\times fs}{ut})^{\frac{t}{fs}} = (1-\frac{fm\times fs}{ut})^{-\frac{t}{fs}}$$

Ejemplo:

Dada la tasa nominal anual con actualización trimestral del 24 %, conocer la tasa nominal semestral con capitalizaciones cada 35 días equivalente (considerar año comercial de 360 días):

SOLUCIÓN:

$$\left(1-0.24\times\frac{90}{360}\right)^{\frac{t}{90}} = \left(1+j_m\times\frac{35}{180}\right)^{\frac{-t}{35}}$$

Nótese que resulta indistinta la ubicación del signo negativo del exponente, puesto que resultan operaciones inversas.

Para "t"=35

$$0.9762245 = \left(1+j_m\times 0.02777\right)^{-1}$$

$$\frac{1}{0.9762245} = 1+j_m\times 0.02777$$

$$1.0243545 = 1 + j_m \times 0.02777$$

$$j_m \times 0.2777 = 0.0243545$$

$$j_m = 0.877$$

Rta.: la tasa nominal semestral con capitalizaciones cada 35 días que resulta equivalente sería del 87,7 %.

1.9 Comparación entre una tasa instantánea y una tasa efectiva y vencida

Partiendo de la siguiente expresión:

$$Cn = C \times e^{n \times \sigma}$$

ya vista al referirnos a la tasa instantánea igualaremos luego los montos con el factor de capitalización vencido:

$$C(1+i)^n = C \times e^{n \times \sigma}$$

Luego simplificamos los capitales:

$$(1+i)^n = e^{n \times \sigma}$$

Siendo $$n=\frac{t}{ut}$$

$$(1+i1)^{\frac{t}{ut1}}=e^{\frac{t\times\sigma}{ut2}}$$

Siendo ut1 la unidad de tiempo de la tasa efectiva y vencida y ut2 la unidad de tiempo de la tasa instantánea.

Ejemplo:

Dada la tasa vencida con capitalizaciones mensuales del 6 %, calcular la tasa instantánea semestral equivalente.

$$(1+0.06)^{\frac{t}{30}}=e^{\frac{t\times\sigma}{180}}$$

Si elegimos que t=180 días, entonces

$$(1+0.06)^{6}=e^{\sigma}$$

aplicando logaritmos:

$$\ln 1.418519=\sigma\times\ln e$$

$$\sigma=0.3496$$

Rta.: la tasa instantánea equivalente será del 34,96 %.

1.10 Comparación entre una tasa instantánea y una tasa efectiva y adelantada

Partiendo de la siguiente expresión:

$$Cn = C \times e^{n \times \sigma}$$

vista al referirnos a la tasa instantánea, igualaremos los montos:

$$C(1-d)^{-n} = C \times e^{n \times \sigma}$$

Luego simplificamos los capitales:

$$(1-d)^{-n} = e^{n \times \sigma}$$

Siendo $n = \frac{t}{ut}$

$$(1-d1)^{-\frac{t}{ut1}} = e^{\frac{t \times \sigma}{ut2}}$$

Siendo ut1 la unidad de tiempo de la tasa efectiva y adelantada y ut2 la unidad de tiempo de la tasa instantánea.

Ejemplo:

Dada la tasa instantánea del 50 % trimestral, calcular la tasa efectiva y adelantada bimestral que resulte equivalente.

$$(1-d_1)^{\frac{-t}{ut_1}} = e^{\frac{t \times \sigma}{ut_2}}$$

$$(1-d_1)^{\frac{-t}{60}} = e^{\frac{t \times 0.5}{90}}$$

Si elegimos que t=60 días, entonces

$$(1-d_1)^{\frac{-60}{60}} = e^{\frac{60 \times 0.5}{90}}$$

$$\frac{1}{1-d_1} = 1.395612425$$

despejando (1-d1):

$$1-d_1 = \frac{1}{1.395612425}$$

$$1-d_1 = 0.71653131$$

$$-d_1 = -0.283468689$$

multiplicando por -1:

$$d_1 = 0.283468689$$

Rta.: la tasa efectiva bimestral adelantada equivalente será del 28.35 %.

EJERCICIOS DE TASAS EQUIVALENTES

- Se realiza un cierto depósito en una cuenta durante un año, una vez cumplido el plazo se pudo retirar de esta \$32.500. Calcular el capital inicial si la operación se pactó en las siguientes condiciones: durante los primeros 100 días la tasa convenida fue del 20 % efectivo trimestral vencido, por los siguientes 110 días la tasa empleada fue del 36 % cuatrimestral con capitalizaciones bimestrales, por último, se usó una tasa adelantada efectiva del 16 % cada 70 días.

SOLUCIÓN:

$$32.500 = V_0 \times (1+0.2)^{\frac{100}{90}} \times \left(1+\frac{0.36x60}{120}\right)^{\frac{110}{60}} \times (1-0.16)^{\frac{-155}{70}}$$

$$V_0 = \frac{32.500}{1.224557 \times 1.3545 \times 1.47105}$$

$$V_0 = \frac{32.500}{2.4402}$$

$$V_0 = \$13.319.81.-$$

- Determinar la tasa nominal anual con actualización cada 55 días que fuera empleada en una operación financiera dónde se depositó \$11.560 durante cinco meses para retirar al término de la operación la suma de \$14.120.

SOLUCIÓN:

Siendo:

$$V = N(1-d)^{n}$$

y usando una tasa nominal transformada:

$$11560 = 14120 \times \left(1 - \frac{j_m \times 55}{365}\right)^{\frac{150}{55}}$$

$$0.8187^{\frac{55}{150}} = 1 - 0.150685 \times j_m$$

$$0.150685 \times j_m = 1 - 0.929278$$

$$j_m = 0.4693$$

Rta.: la tasa nominal anual (año civil) empleada en dicha operación fue del 46,83 % con actualizaciones cada 55 días.