RENTAS

Se denomina renta a toda sucesión de pagos o depósitos que permite, o bien constituir un fondo de ahorro hacia el futuro, o bien cancelar una deuda del pasado.

Así como hasta este momento habíamos observado la evolución de un único capital valuado a una cierta tasa en el tiempo (o pocos capitales, como ocurre al descontar dos o tres documentos en alguna institución bancaria), al hablar de rentas consideraremos la administración de muchos capitales equivalentes.
No nos apartamos de los conceptos estudiados en el régimen compuesto, pero consideraremos la posibilidad de trabajar con algunas pocas fórmulas que nos permitan simplificar los cálculos.
Tengamos en cuenta como ejemplo un préstamo bancario que se cancela mediante 60 cuotas, dicha operación financiera, independientemente de sus condiciones particulares, podría desarrollarse a partir de los conceptos ya vistos, no obstante, requeriría de un esfuerzo de cálculos reiterativos realizados en sesenta oportunidades. Es así que, teniendo en cuenta ciertas características que debemos respetar, resulta mucho más simple la aplicación de una fórmula genérica que nos devuelva la incógnita requerida en un solo paso.
Para entender la mecánica de estas operaciones consideremos inicialmente los elementos que componen una renta, distribuidos en dos grupos:

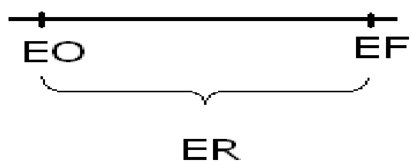
a) Tangibles
   $V_{n]}\, i$= valor actual de la renta
   $A_{n]}\, i$=valor final de la renta, imposición o anualidad
   C= cuota
   n= cantidad de términos que componen la renta
   i=i tasa efectiva pactada

b) Ideales

Resultan ser abstractos pero relevantes:

EO= época de origen (de la renta)
EF= época de finalización (de la renta)
ER= época de la renta (sus límites son EO y EF)
EV= época de valuación (momento donde se concentra el cálculo)
Estos elementos resultan imprescindibles a efectos de "interpretar" la renta para proceder a su cálculo y aplicar la formula correcta.

En el siguiente esquema se indica la ubicación de los tres primeros, en tanto que el último elemento señalado (EV) podría ser ubicado en cualquier punto, anterior, posterior o interior a la ER:



Esto tiene su explicación en el hecho de que, tanto la EO como la EF, y en consecuencia, la ER, son fijados arbitrariamente por quien realizara los cálculos financieros que arriben a un resultado válido, y al tener como premisa la exacta ubicación que se le asigne a la EV. Un mismo planteo devolverá una única solución, interpretada aun de modos distintos.

Clasificación de las rentas

Para su mejor comprensión, resulta fundamental conocer cuál es la tipología de renta que se habrá de calcular, para lo cual se desarrolla una clasificación a continuación. Cabe aclarar, asimismo, que una renta contiene más de uno de cada elemento clasificatorio, por lo que esta clasificación identifica con precisión la renta.

A. Temporales o perpetuas: en función de la duración de la renta, serán temporales aquellas de las que tengamos conocimiento cuando finalizan y la cantidad de términos que la componen, siendo perpetuas aquellas cuyo número de términos tiende a infinito.

B. Ciertas o contingentes: en función de la certeza de su existencia, serán ciertas cuando puedan reconocerse previamente, en tanto serían contingentes en la medida en que su ejecución dependa de algún hecho ajeno a sí misma.

C. Sincrónicas o asincrónicas: en función de la tasa pactada, serán sincrónicas cuando la frecuencia de capitalización de la tasa pactada coincida con la frecuencia en que se suceden los pagos o depósitos.

D. Enteras o fraccionadas: en función del modo en que se ejecute su desembolso, siendo enteras cuando dicho pago se realice en un solo acto, y fraccionadas cuando cada cuota se fraccione en partes menores. Cabe aclarar que la distribución de dichos pagos parciales que complementan la cuota deberán mantener la misma frecuencia temporal entre cada uno de ellos, asimismo, sus importes serán iguales entre sí. Es un caso particular de renta asincrónica, pues habrá que calcular la tasa correspondiente a esa subdivisión temporal.

E. Constantes o variables: en función del valor que adopte cada cuota, se considera renta de cuotas constantes cuando cada una de ellas mantiene el mismo valor a lo largo de la renta, y serían variables cuando dichos importes se modifiquen. Tales variaciones, a efectos de poder calcularlas adecuadamente y aplicar un método, deberán obedecer a alguna sucesión matemática conocida, por lo que se reconocen especialmente a las rentas que evolucionan en progresiones aritméticas o geométricas. Obviamente, una sucesión de carácter aleatoria no podría calcularse previamente.

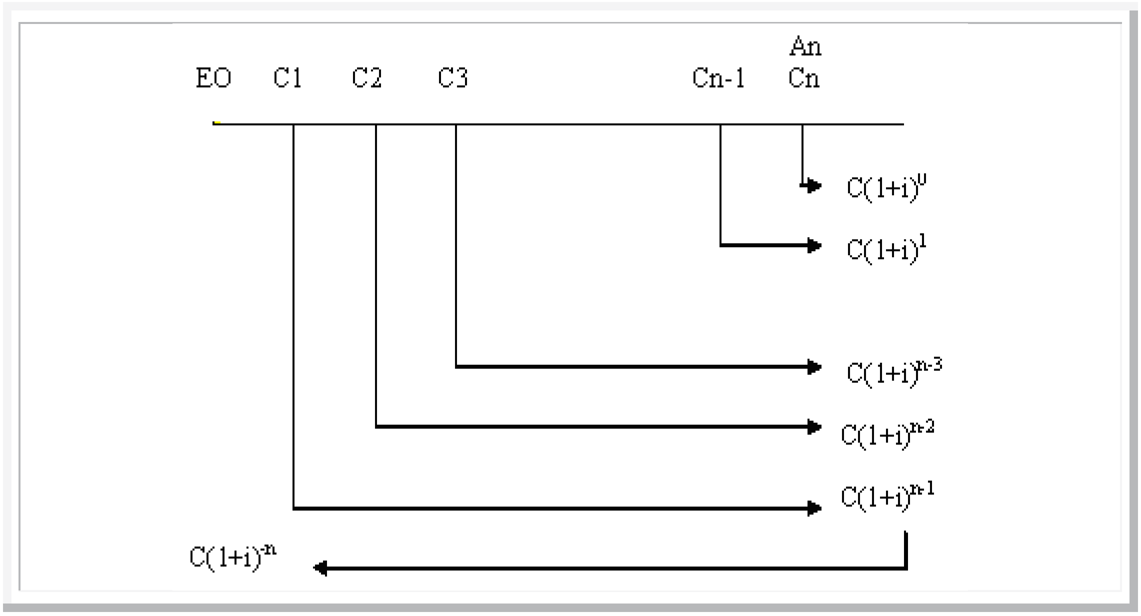
F. Inmediatas, diferidas o anticipadas: en función del momento de valuación, se denominan rentas inmediatas aquellas en que la EV concuerda con la EO, serán diferidas cuando la EV resulte anterior a la EO, por último, se consideran anticipadas cuando la EV es posterior a la EO.

G. De pagos adelantados o de pagos vencidos: en función del momento en que se efectivizan los pagos para cada periodo, serán de pagos adelantados cuando cada pago se realice al comienzo de cada periodo, y siendo de pagos vencidos cuando estos se concreten al finalizar cada periodo.

<u>Desarrollo de la fórmula del valor final de una renta de pagos vencidos</u>

Reconocemos en el siguiente gráfico la sucesión de n pagos que representan las cuotas de la renta, efectuados al término de cada periodo.

Dicha serie se encuentra valuada en un momento en común al finalizar la operación donde será retirado el valor final, ajustadas según una única tasa, efectiva y sincrónica:



De dicha sucesión se establece la siguiente igualdad:

$$A_{n\rangle i} = C + C(1 = i)^{1} + ...+ C(1+i)^{n-3} + C(1+i)^{n-2} + C(1+i)^{n-1}$$

Multiplicando a cada término por un factor (1+i) obtenemos:

$$A_{n\rangle i}(1+i) = C(1+i) + C(1+i)^{2} + ...+ C(1+i)^{n-2} + C(1+i)^{n-1} + C(1+i)^{n}$$

Descontando de esta segunda expresión la anterior igualdad, restando término a término, simplificando aquellos términos que resulten iguales, y aplicando propiedad distributiva en A por el factor (1+i), nos queda:

$$\cancel{A_{n\rangle i}} + A_{n\rangle i} \times i - \cancel{A_{n\rangle i}} = C(1+i)^{n} - C$$

Simplificando A a la izquierda de la igualdad, despejando el segundo término de "i", y operando convenientemente sobre C alcanzamos la fórmula buscada, valor final de una renta de n pagos vencidos:

$$A_{n\rangle i} = C \times \frac{\left[(1+i)^n - 1\right]}{i}$$

Para referirnos al valor final de una renta de pagos adelantados bastará con multiplicar toda la expresión por un factor (1+i), puesto que al adelantarse los pagos todos se encuentran un periodo más alejado de la época de valuación con el consiguiente beneficio adicional en los intereses; para distinguirla de la anterior agregamos un apóstrofe a A:

$$A'_{n\rangle i} = C \times \frac{\left[(1+i)^n - 1\right]}{i} \times (1+i)$$

Cálculo de intereses para el valor final:

$$(TI) = A_{n\rangle i} - n \times C$$

Ejemplo:

- Se contrata una renta donde serán depositados, al término de cada mes, doce pagos de \$3.000 cada uno. Si la tasa propuesta se fijó en el 24 % anual, calcular el importe que se hará disponible para el inversor cuatro meses después de abonado el último de ellos.

SOLUCIÓN:

Comenzamos por resolver la tasa que resulte sincrónica con la frecuencia de los pagos:

$$1{,}24^{\frac{1}{12}} - 1 = i_{mensual}$$

$$i_{mensual} = 0{,}018088$$

Luego, operamos a partir de la fórmula del valor final:

$$A_{n>i} = \frac{3000}{0{,}018088} \times \left(1{,}018088^{12} - 1\right) \times 1{,}24^{\frac{4}{12}}$$

$$A_{n>i} = \$42.764{,}41$$

Casos especiales de valuación de rentas anticipadas

Recordemos que en este grupo clasificatorio se encuentran todas aquellas rentas cuya época de valuación resulta posterior al origen. Por lo tanto, quedarán comprendidas las imposiciones o anualidades, tanto sean consideradas de pagos vencidos o de pagos adelantados, durante el desarrollo de la serie, al finalizar esta o con posterioridad a este momento.
Dado que la fórmula que nos permite calcular su valor está preparada para agrupar una serie de cuotas iguales y valuadas a una misma tasa de interés, en la medida en que se pacten operaciones con distintas cuotas o más de una tasa de interés, deberemos agruparlas en forma homogénea de modo tal que frente a cambios de esta naturaleza, serán considerados distintos términos que luego, en conjunto, resolverán el problema en particular.

Dos situaciones particulares se reconocen, a saber:

a) Valor final de una renta pactada en cuotas que varían sus importes en el transcurso.

b) Valor final de una renta pactada a distintas tasas de interés.

Ejemplos:

- Se pacta realizar ocho depósitos mensuales, los primeros cuatro de \$300 cada uno, y los restantes de \$500 cada uno. Será retirado el total acumulado al momento de efectuarse el último depósito. Tasa de la operación: 0,03 efva. mensual.

SOLUCIÓN:

Como es habitual a este tipo de operaciones, nos encontramos con distintos caminos para llegar a un mismo resultado, aquí veremos dos opciones considerando que operamos con rentas de pagos vencidos (cosa que no es excluyente), la primera opción sería agrupar cuotas iguales donde la expresión quedaría representada de la siguiente forma:

$$A_{n\rangle i} = \frac{300}{0{,}03}\left[(1+0{,}03)^4 - 1\right] \times (1+0{,}03)^4 + \frac{500}{0{,}03} \times \left[(1+0{,}03)^4 - 1\right]$$

$$A_{n\rangle i} = 1412{,}61 + 2091{,}81$$

$$A_{n\rangle i} = 3504{,}43$$

Observando el primer término de la ecuación, podemos notar que la serie de las primeras cuatro cuotas, valuadas como serie de pagos vencidos, se capitalizan cuatro periodos mensuales para hacer coincidir la fecha de valuación con la última de las cuatro cuotas de la segunda serie.

La segunda posibilidad de resolución consistiría en tomar las ocho cuotas de \$300 en forma consecutiva e incorporarle una serie “superpuesta” de cuatro cuotas finales de \$200 (que completarían los depósitos realmente pactados):

$$A_{n\rangle i}=\frac{300}{0,03}\left[(1+0,03)^{8}-1\right]+\frac{200}{0,03}\times\left[(1+0,03)^{4}-1\right]$$
$$A_{n\rangle i}=2667,70+836,73$$
$$A_{n\rangle i}=3504,43$$

Con esta alternativa de solución, el primer término se desprende de la capitalización adicional, puesto que la serie así interpretada, concluye al mismo tiempo que la serie de cuatro cuotas de $200.

- Se pacta realizar siete depósitos mensuales de $600 cada uno. Será retirado el total acumulado 30 días después de efectuado el último depósito. Tasas de la operación: 0,04 efva. mensual, vigente hasta ocho días después de practicado el depósito de la cuota tres, con posterioridad se pactó utilizar la tasa del 0,05 mensual.

SOLUCIÓN:

Para resolver este problema, debemos tratar de agrupar la mayor cantidad de cuotas contenidas por una misma tasa:

$$A_{n\rangle i}=\frac{600}{0,04}\left[(1+0,04)^{3}-1\right](1+0,04)^{\frac{8}{30}}\times(1+0,05)^{\frac{142}{30}}+\frac{600}{0,05}\left[(1+0,05)^{4}-1\right](1+0,05)$$
$$A_{n\rangle i}=2384,33+2715,38$$
$$A_{n\rangle i}=5099,71$$

Observamos que el primer término incluye las tres primeras cuotas, valuadas al 4 %, para continuar valuando la renta ocho días adicionales a la misma tasa, y 142 días al 5 % para concluir esta serie, en tanto que la segunda serie contenida en el segundo término abarca las últimas cuatro cuotas, todas valuadas al 5 % como una renta de pagos adelantados.

Cálculo de las cuotas

- Se desea conformar un fondo de ahorros de $7.000 que será valuado al 2,5 % mensual mediante el depósito de siete cuotas mensuales iguales y consecutivas, y se retirará lo producido tres meses después de realizado el último depósito.

SOLUCIÓN:

Despejamos la variable cuota de la fórmula correspondiente, teniendo en cuenta que el retiro se realiza tres meses después de finalizada la serie:

$$C = \frac{7000 \times 0{,}025}{\left[(1+0{,}025)^{7} - 1\right]} \times (1+0{,}025)^{-3}$$

$$C = 861{,}25$$

- Calcular a cuántas cuotas se pactó una renta por la cual se realizaron depósitos mensuales de $836,88 valuados al 1,5 % mensual, si el objetivo es alcanzar $8.000 junto con el último de los depósitos.

SOLUCIÓN:

La variable a despejar será la cantidad de pagos:

$$1-\frac{8000\times 0{,}015}{836{,}88}=(1+0{,}015)^{n}$$

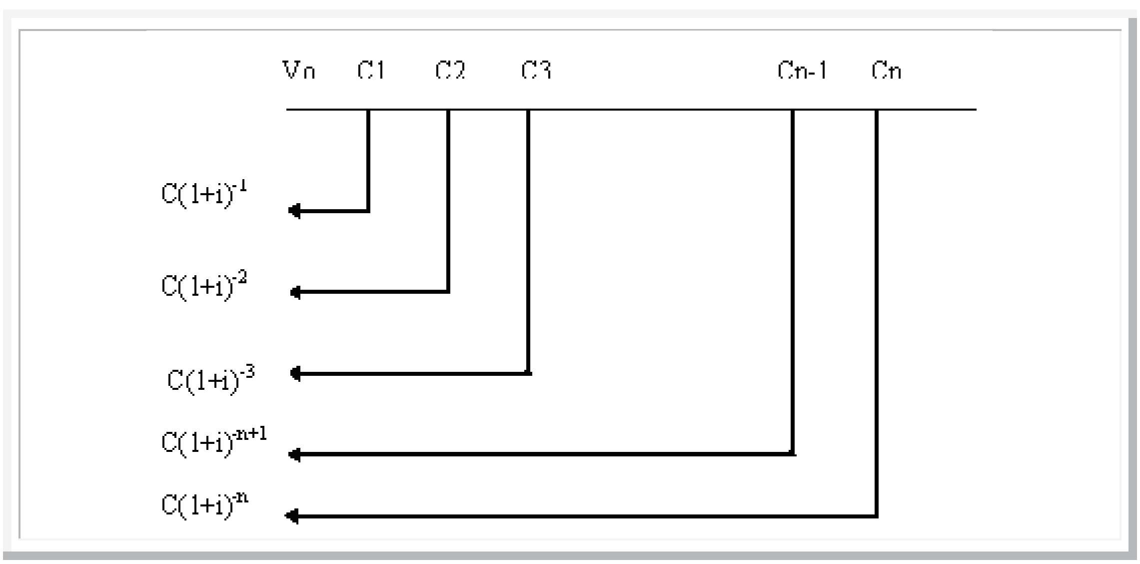
$$\ln 1{,}143389733=n\times \ln 1{,}015$$

$$n=\frac{0{,}1339973}{0{,}014888612}$$

$$n=9.cuotas$$

<u>Desarrollo de la fórmula del valor actual de una renta inmediata y de pagos vencidos</u>

Reconocemos en el siguiente gráfico la sucesión de n pagos que representan las cuotas de la renta, efectuados al término de cada periodo. Dicha serie se encuentra valuada en un momento en común al inicio de la operación donde se entregara el valor actual, ajustadas según una única tasa, efectiva y sincrónica:



De dicha sucesión se establece la siguiente igualdad:

$$V_{n\rangle i} = C(1 = i)^{-1} + C(1+i)^{-2} + C(1+i)^{-3} + ...+ C(1+i)^{-n+1} + C(1+i)^{-n}$$

Multiplicando a cada término por un factor (1+i), obtenemos:

$$V_{n\rangle i}(1+i) = C + C(1 = i)^{-1} + C(1+i)^{-2} + ...+ C(1+i)^{-n+2} + C(1+i)^{-n+1}$$

Descontando de esta segunda expresión la anterior igualdad, restando término a término y simplificando aquellos términos que resulten iguales, y aplicando propiedad distributiva en V por el factor (1+i), nos queda:

$$\cancel{V}_{n\rangle i} + V_{n\rangle i} \times i - \cancel{V}_{n\rangle i} = C - C(1+i)^{-n}$$

Simplificando V a la izquierda de la igualdad, al despejar el segundo término de "i", y al operar convenientemente sobre C alcanzamos la fórmula buscada, valor actual de una renta de n pagos vencidos:

$$\boxed{V_{n\rangle i} = C \times \frac{\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}}$$

Para referirnos al valor actual de una renta de pagos adelantados bastará con multiplicar toda la expresión por un factor (1+i), puesto que al adelantarse los pagos, todos se encuentran un periodo más próximos a la época de valuación, para distinguirla de la anterior agregamos un apóstrofe a V:

$$\boxed{V'_{n\rangle i} = C \times \frac{\left\lfloor 1-(1+i)^{-n} \right\rfloor}{i} \times (1+i)}$$

Cálculo del total de intereses para el valor actual:

$$(TI) = n \times C - V_{n\rangle i}$$

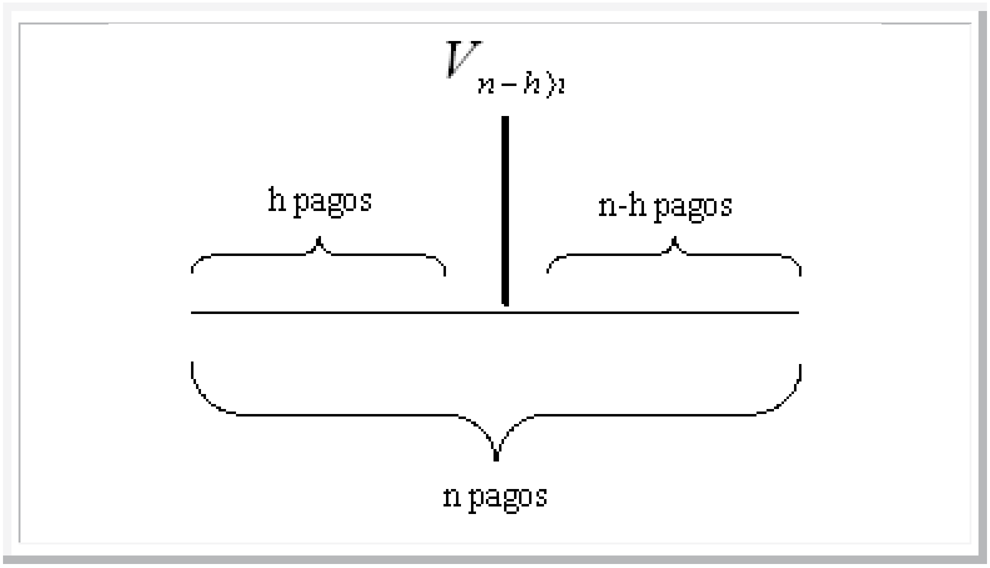
<u>Saldo de deuda</u>

La necesidad de cancelaciones anticipadas por distintas razones resulta ser práctica habitual en las operaciones financieras que manejan rentas. Tanto sea por modificaciones en el valor de las tasas originales durante el transcurso de una operación, lo que implica reformular el valor de las cuotas posteriores, como el deseo del deudor de finalizar una deuda, este concepto resulta ser imprescindible.

Se define de la siguiente forma:

Dada una renta compuesta de n pagos, y habiéndose cancelado h pagos de la serie, se denomina saldo de deuda (o de renta) al valor actual de las "n-h" cuotas aún impagas.

Gráficamente:



La fórmula quedará desarrollada de la siguiente forma:

$$V_{n-h\rangle i} = \frac{C}{i} \times \left[1-(1+i)^{-(n-h)}\right]$$

Ejemplo:

- Se contrata una deuda de \$4.000 a cancelarse en 36 pagos mensuales y vencidos, y se valúa la operación al 3,2 % mensual, una vez abonada la cuota n.º 19 el deudor solicita la cancelación anticipada al acreedor. ¿Qué suma habrá de entregar adicionalmente para cumplir con su obligación?

SOLUCIÓN:

En primer lugar, debemos calcular el valor de las cuotas de la renta:

$$C = \frac{4000 \times 0,032}{\left[1-(1+0,032)^{-36}\right]}$$
$$C = 188,72$$

Una vez hallada la cuota de la operación, la consideramos dato para el cálculo del saldo de deuda:

$$V_{36-19\rangle i} = \frac{188,72}{0,032} \times \left[1-(1+0,032)^{-36+19}\right]$$
$$V_{17} = 2445,21.-$$

- Se contrata una renta por \$100.000 para ser cancelada en 48 cuotas mensuales y vencidas, y se valúa la operación al 1,7 % mensual. El día de vencimiento de la cuota n.º 26, el deudor solicita que se le informe la suma total adeudada, a efectos de cancelar la deuda. ¿Cuánto dinero deberá disponer para esa acción?

SOLUCIÓN:

Nuevamente, corresponde calcular la cuota de la sucesión de pagos:

$$C = \frac{100000 \times 0{,}017}{\left[1-(1+0{,}017)^{-48}\right]}$$
$$C = 3064{,}39$$

Luego, procederemos a calcular el saldo de deuda que, en este caso, podrá ser interpretado de dos formas con idéntico resultado:

a) Calcular el saldo de deuda de las 23 cuotas pendientes al momento del vencimiento de la cuota 26, incluyéndola en una renta de pagos adelantados:

$$V'_{48-25\rangle i} = \frac{3064{,}39}{0{,}017} \times \left[1-(1+0{,}017)^{-48+25}\right] \times (1+0{,}017)$$
$$V_{17} = 58.918{,}68.-$$

b) Calcular el saldo de 22 cuotas vencidas e incorporarle el importe de la cuota 26 que vence ese mismo día:

$$V_{48-26\rangle i} = \frac{3064{,}39}{0{,}017} \times \left[1-(1+0{,}017)^{-48+26}\right] + 3064{,}39$$
$$V_{17} = 58.918{,}68.-$$

Con ambas interpretaciones se arriba al mismo resultado.

Otro enfoque que permite calcular el saldo de deuda:

A la fórmula de la sumatoria de una serie geométrica podemos utilizarla para otras aplicaciones en rentas, para un nuevo "paradigma" a partir de una nueva deducción del concepto del saldo de deuda.

Considerando que el desarrollo del progreso de la amortización de la deuda en dicho sistema no es lineal, sino que representa una progresión geométrica en sí misma -*de razón* $(1+i)$- podemos identificar el saldo de deuda en cualquier estado de su evolución:

$$SD = V_0 - t_1 \times \frac{1-(1+i)^h}{1-(1+i)}$$

Siendo que el segundo término que descontamos, corresponde a dicha progresión (cuyo primer elemento es precisamente t_1 o primera amortización practicada en la serie) y constituye desde el punto de vista financiero el total amortizado hasta el periodo "h", quedando ordenada finalmente de la siguiente forma:

$$SD = V_0 + \frac{t_1}{i} \times \left[1-(1+i)^h\right]$$

Si deseamos profundizar aún más este desarrollo del saldo de deuda, podríamos llegar a calcular dicho concepto sin necesidad de contar con el valor de la cuota de servicio a partir del siguiente razonamiento:

Siendo

$$t_1 = C - V_0 \times i \qquad \text{y} \qquad C = \frac{V_0 \times i}{1-\left(1+i\right)^{-n}}$$

$$\therefore \qquad t_1 = V_0 \times i \times \left[\frac{1}{1-(1+i)^{-n}} - 1\right]$$

Sabemos además que:

$$Total.Amortizado.hasta"h" = \frac{t_1}{i} \times \left[1-(1+i)^h\right]$$

Reemplazamos en t_1

$$Total.Amortizado.hasta"h" = \frac{V_0 \times i}{i} \times \left[\frac{1}{1-(1+i)^{-n}} - 1\right] \times \left[1-(1+i)^h\right]$$

Conocemos que:

$$Saldo.de.Deuda = V_0 - Total.Amortizado.hasta"h"$$

Por ello:

$$Saldo.de.Deuda = V_0 - V_0 \times \left[\frac{1}{1-(1+i)^{-n}}\right] \times \left[1-(1+i)^h\right]$$

$$Saldo.de.Deuda = V_0 \times \left\{1 - \left[\frac{1}{1-(1+i)^{-n}} - 1\right] \times \left[1-(1+i)^h\right]\right\}$$

$$Saldo.de.Deuda = V_0 \times \left\{1 - \frac{1-(1+i)^h}{1-(1+i)^{-n}} + (1+i)^h - 1\right\}$$

Finalmente, ordenando:

$$Saldo.de.Deuda = V_0 \left\{(1+i)^h + \frac{1-(1+i)^h}{1-(1+i)^{-n}}\right\}$$

$$Saldo.de.Deuda = V_0 \times \frac{\left[1-(1+i)^{-n}\right] \times (1+i)^h + 1 - (1+i)^h}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$Saldo.de.Deuda = V_0 \times \frac{(1+i)^h - (1+i)^{-n+h} + 1 - (1+i)^h}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$\boxed{Saldo\,de.Deuda = V_0 \frac{1-(1+i)^{-n+h}}{1-(1+i)^{-n}}}$$

Ejemplo

- Calcular qué suma originó su devolución en una serie de siete depósitos mensuales, iguales y vencidos, valuados al 3 % efectivo mensual, al conocer que luego de canceladas las cuatro primeras cuotas de la renta el saldo de deuda ascendía a $1.816,04.

SOLUCIÓN:

Aplicando esta fórmula no necesitamos reconocer primero el importe de las cuotas, despejamos solo la variable necesaria:

$$V_0 = \frac{1816{,}04 \times \left[1-(1+0{,}03)^{-7}\right]}{1-(1+0{,}03)^{-7+4}}$$

$$V_0 = \$4000.-$$

CÁLCULO DE LA TASA POR FÓRMULA DE BAILY

Una última consideración se presenta al momento de reconocer cuál es la tasa que se aplicó a una determinada operación, para lo cual existen distintos métodos que nos aproximan al valor de la tasa desconocida a partir de la utilización de distintas fórmulas. En el presente desarrollo, observaremos la aplicación de una de ellas, denominada fórmula de **Baily.**

Donde primero debemos establecer un valor denominado "h", siendo:

$$h = \left(\frac{C \times n}{V} \right)^{\frac{2}{n+1}} - 1$$

Una vez obtenido este valor, lo reemplazamos en la siguiente igualdad para obtener definitivamente la tasa:

$$i = \frac{12 \times (n+1) - \left(n^2 - 1\right) \times h}{12 \times (n+1) - 2 \times \left(n^2 - 1\right) \times h} \times h$$

NOTA: estas expresiones resultan válidas para aplicarse a deudas por sistema francés, en donde la primera cuota se cancela en forma vencida, sin diferimientos (renta inmediata).

Ejemplo:

Resolver el ejercicio siguiente, averiguar la tasa mensual aplicada al conocer los restantes elementos:

Vo=$179,00

n=12

C= $19,53

i=?

$$h=\left(\frac{19.53\times 12}{179}\right)^{\frac{2}{12+1}}-1$$

h= 0,042329

$$i=\frac{12\times(12+1)-\left(12^{2}-1\right)\times 0.042329}{12\times(12+1)-2\times\left(12^{2}-1\right)\times 0.042329}\times 0.042329$$

Rta=i=0.044m (esta tasa incluye el IVA sobre intereses de bienes muebles financiados en el mercado argentino como parte del costo de financiación, por lo que la tasa neta efectiva realmente pactada resultó un 21 % menor): $\frac{0.044}{1.21}$

Rta. => **i=0,0364**

Aplicación de la fórmula de Baily para rentas no inmediatas

Para soluciones de rentas diferidas, anticipadas y valor final o imposiciones incorporamos un elemento denominado "m" que corresponde a la medida temporal (en cantidad de periodos) de diferimiento o anticipación con respecto al origen de la renta, utilizando la tabla indicada a continuación, según sea el tipo de renta de que se trate:

Valoración de "m"		
Tipo de renta	**Vencida**	**Adelantada**
Inmediata	*0*	*-1*
Diferida	*m*	*m-1*
Anticipada	*-m*	*-m-1*
V. final o imposición	*-n*	*-n-1*

Para considerar el valor de “h” incorporamos “m” a la fórmula según el tipo particular de renta, de acuerdo con la tabla precedente:

$$h = \left(\frac{C \times n}{V} \right)^{\frac{2}{2m+n+1}} - 1$$

Posteriormente, hacemos lo propio con la fórmula final:

$$i = \frac{12 \times (2m+n+1) - \left(n^2 - 1\right) \times h}{12 \times (2m+n+1) - 2 \times \left(n^2 - 1\right) \times h} \times h$$

Cabe aclarar que, para una renta inmediata y de pagos vencidos, basta con sustituir el valor de “m” por cero, tal como lo indicado en el ejemplo anterior.

Imagen de un folleto de compras de la tienda Walmart

RENTAS PERPETUAS

La aplicación de las rentas perpetuas se halla ampliamente difundida en tanto corresponde a un valor actual, cuya serie de cuotas equivalentes tienden a infinito.

Partiendo de la formula del valor actual de una renta temporaria de pagos vencidos oportunamente desarrollada, aplicamos el concepto de límite para n tendiendo a infinito, de donde:

$$V_{n \to \infty \rangle i} = \frac{C}{i}\left[1-(1+i)^{-n}\right]$$

operando sobre el límite:

$$V_{\infty \rangle i} = \frac{C}{i}\left[1-(1+i)^{-\infty}\right]$$

$$V_{\infty \rangle i} = \frac{C}{i}\left[1-\frac{1}{(1+i)^{\infty}}\right]$$

$$V_{\infty \rangle i} = \frac{C}{i}\left[1-\frac{1}{\infty}\right]$$

$$V_{\infty \rangle i} = \frac{C}{i}\left[1-0\right]$$

finalmente, la expresión que permite calcular la renta perpetua de pagos vencidos es:

$$V_{\infty\rangle i} = \frac{C}{i}$$

Si despejamos C de la fórmula, podemos ver cómo se conforma la cuota de esta particular renta:

$$C_{\infty} = V_{\infty\rangle i} \times i$$

Esto resulta razonable, dado que para garantizar la existencia a perpetuidad de dicha renta solo podrán otorgarse como cuota los intereses del valor actual, puesto que si este comenzara a amortizarse terminaría por extinguirse en algún momento conocido, transformándose en renta temporal.

Para conocer el valor actual de la renta perpetua de pagos adelantados bastará incorporar a la expresión inicial el factor de capitalización (1+i):

$$V'_{\infty\rangle i} = \frac{C}{i} \times (1+i)$$

Ejemplo

- ¿Qué suma podrá otorgarse mensualmente a perpetuidad si se cuenta con un capital de $100.000 y la operación se valúa al 36 % anual?

SOLUCIÓN:

Previamente, se deberá realizar la equivalencia de tasas, puesto que se trata de una operación asincrónica:

$$(1+0{,}36)^{\frac{1}{12}} = (1+i_m)^{\frac{1}{1}}$$
$$i_m = \sqrt[12]{1{,}36} - 1$$
$$i_m = 0{,}0259548$$

aplicando la fórmula:

$$C_{\infty} = 100.000 \times 0{,}0259548$$
$$C_{\infty} = 2595{,}48$$

RENTAS VARIABLES EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA

En este caso, abordaremos al subgrupo de rentas correspondiente al conjunto de capitales cuyas cuantías varían periodo tras periodo, y obedecen a la ley de las sucesiones aritméticas, es decir, donde cada término resulta ser el anterior incrementado (o disminuido) en una misma cantidad denominada "razón de la progresión" que refleja un valor monetario que denominaremos "d".

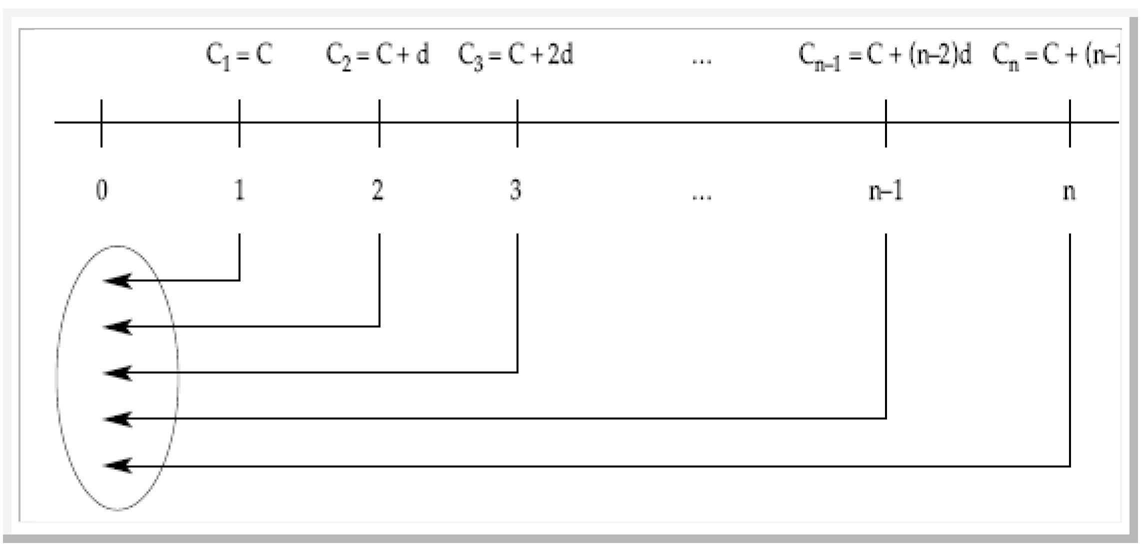
Para reconocer cualquier término resulta necesario contar con los valores de C1 y dicha razón "d".

RENTA VARIABLE EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA, TEMPORAL, DE PAGOS VENCIDOS, INMEDIATA Y ENTERA

Se trata de aquella renta variable en progresión aritmética, temporal (tiene un número determinado de capitales), de pagos vencidos o "pospagable" (los términos vencen al final del periodo), inmediata (valuamos la renta en su origen y su final), entera (cada pago se efectúa en un único momento para cada periodo) y sincrónica (tanto los términos como la tasa están en la misma unidad de tiempo).

Cálculo del valor actual

La representación gráfica de la renta anteriormente citada es la siguiente:



Aplicando la definición de valor actual y actualizando los términos uno a uno hasta su época de valuación, descontada en régimen compuesto valuando a la tasa i, se obtiene el valor actual, que se nota con la siguiente terminología V(c;

d)n/i, expresión que además de recoger la información de la renta, recoge la información de la progresión (c; d):

$$v_{(c,d)n>i} = \frac{C}{1+i} + \frac{C+d}{(1+i)^2} + \frac{C+2d}{(1+i)^3} + \ldots.. + \frac{C+(n-2)d}{(1+i)^{n-1}} + \frac{C+(n-1)d}{(1+i)^n}$$

de donde finalmente se puede obtener la siguiente expresión:

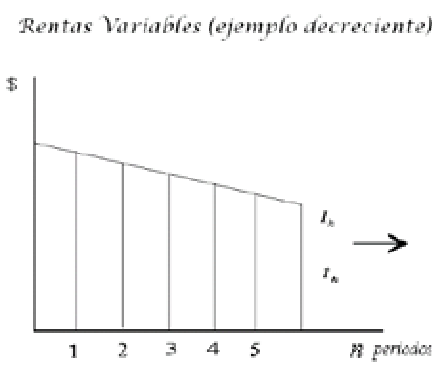
$$V_{(c,d)n>i} = \left(C_1 + \frac{d}{i}\right) \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{n \times d \times (1+i)^{-n}}{i}$$

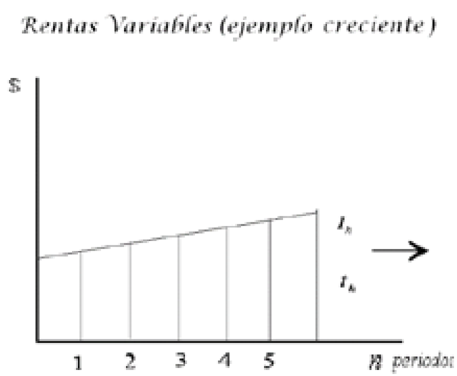
Pudiéndose resumir en esta otra fórmula de cálculo:

$$V_{(c,d)n>i} = \left(C_1 + \frac{d}{i} + n \times d\right) \times v_{n>i} - \frac{n \times d}{i}$$

Cálculo del total de intereses

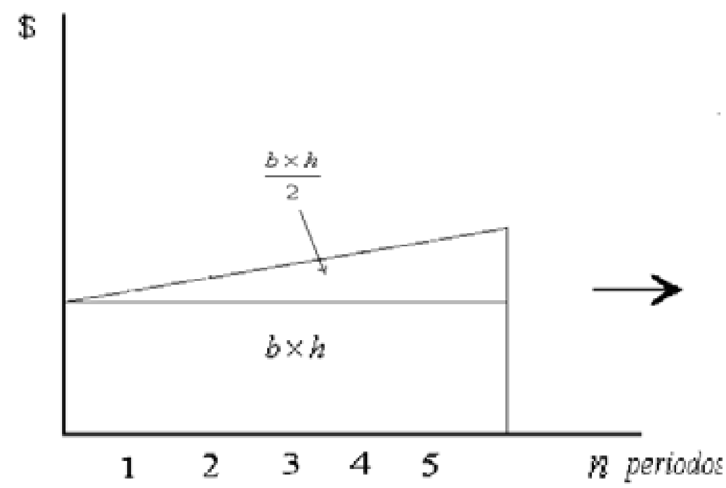
Aquí podemos recordar la figura de la representación gráfica de la renta variable en progresión aritmética (crece o decrece en forma constante):





Observamos que en ambos casos se presentan dos figuras conocidas y adyacentes (un triángulo y un rectángulo), recordemos las fórmulas que permiten reconocer sus respectivas superficies, tomando como ejemplo la representación creciente será:

Rentas Variables (ejemplo creciente)



Interpretamos que la altura del rectángulo obedece al valor de C_1, la altura del triángulo adyacente, la diferencia entre C_n y C_1, y la base estará dada por la cantidad de cuotas o términos de la renta, por lo tanto, el total de desembolsos para cualquier renta en progresión variable aritmética resultará:

$$Total\ de\ Desembolsos = C_1 \times n + \frac{(C_n - C_1)}{2} \times n$$

$$Total\ de\ Desembolsos = n \times \left[C_1 + \frac{(C_n - C_1)}{2} \right]$$

Siendo por lo tanto el total de intereses:

$$Total.de.Intereses = n \times \left[C_1 + \frac{(C_n - C_1)}{2} \right] - V_0$$

Ejemplo:

Conocido que \$100 resultó ser la primera cuota de una renta variable en progresión aritmética de cuatro términos con una razón de \$10 y valuada al 5 % efvo. periódico, calcular el total de intereses y su valor actual, y confeccionar el cuadro de marcha para su comprobación:

Calculamos el valor actual aplicando la correspondiente fórmula:

$$V_{(c,d)n>i} = \left(C_1 + \frac{d}{i} + n \times d \right) \times v_{n>i} - \frac{n \times d}{i}$$

$$V_{(c,d)n>i} = \left(100 + \frac{10}{0,05} + 4 \times 10 \right) \times \frac{1 - (1 + 0,05)^{-4}}{0,05} - \frac{4 \times 10}{0,05}$$

$$V_{(c,d)n>i} = \$405,62$$

Calculamos el total de desembolsos:

$$Total.de\ Desembolsos = n \times \left[C_1 + \frac{(C_n - C_1)}{2} \right]$$

$$Total.de\ Desembolsos = 4 \times \left[100 + \frac{(130 - 100)}{2} \right]$$

$$Total.de\ Desembolsos = \$460$$

Por lo tanto, el total de intereses asciende a:

$$Total.de.Intereses = 460 - 405{,}62$$

$$Total.de.Intereses = \$54{,}38$$

Comprobación a través del cuadro de marcha:

n	Vn/i	Ch	th	Ih
0	405,62			
1	325,90	100,00	79,72	20,28
2	232,20	110,00	93,70	16,30
3	123,81	120,00	108,39	11,61
4	0,00	130,00	123,81	6,19
		460,00	405,62	**54,38**

Cálculo del valor final

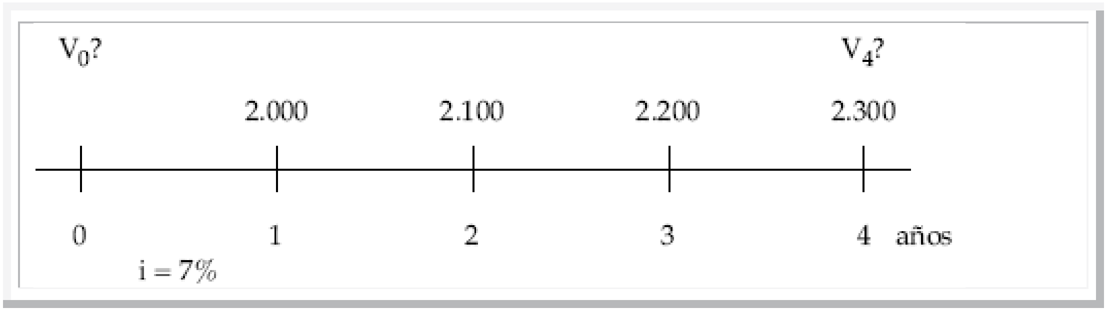
A partir del valor actual se podrá proyectar hacia cualquier otro momento de valuación, al utilizar la relación que existe entre los diferentes valores financieros en el tiempo:

Valor final:

$$A_{(c,d)n>i} = V_{(c,d)n>i} \times (1+i)^n$$

Ejemplo:

Hallar el valor actual y final de una corriente de gastos anuales vencidos de un negocio que el primer año van a ser de $2.000 y se espera que aumenten $100 cada año, se supone una tasa del 7 % y para un horizonte temporal de cuatro años.



• Valor actual:

$$V_{(2000;100)4>0,07} = \left(2000 + \frac{100}{0,07} + 4 \times 100\right) \times \frac{1-1,07^{-4}}{0,07} - \frac{4 \times 100}{0,07} = 7253,89$$

• Valor final:

$$A_{(2000;100)4>0,07} = V_{(2000;100)4>0,07} \times 1,07^{4} = 9508,38$$

Cálculo del total de intereses para una renta variable en progresión geométrica

Recordamos la expresión que permite reconocer la sumatoria de términos de una serie en progresión geométrica, siendo:

$$S_n = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

Y reconociendo que del reemplazo de las variables descriptas en la simbología financiera las distinguimos como:

$a_1 = C_1$ (cuota de orden 1)

$q =$ razón geométrica de la progresión

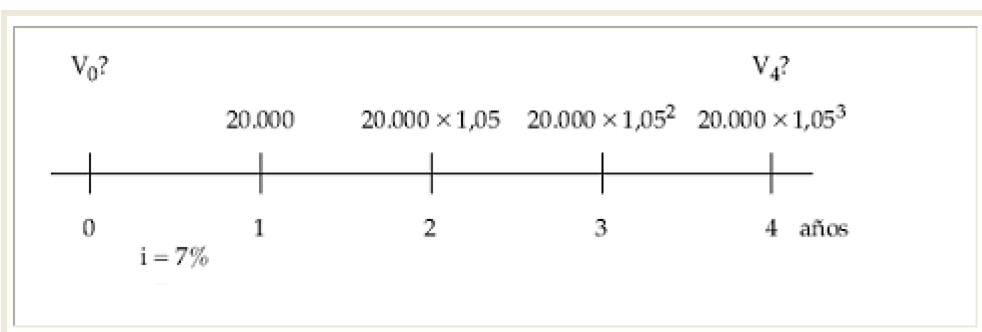
$S_n =$ sumatoria del total de reembolsos de la renta

Finalmente, el total de intereses para una renta en progresión geométrica será:

$$TI_{geometrica} = C_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} - V_0$$

Ejemplo:

Hallar el valor actual de una progresión geométrica de pagos anuales y vencidos cuya primera cuota de servicio es de $20.000 y se espera que crezca un 5 % anual de forma acumulativa para un horizonte temporal de cuatro años, suponiendo una tasa de interés del 7 %. Calcular el total de intereses en forma analítica.



Valuando al 7 %:

$$V_{(20000;1,05)4>0,07} = 20000 \times \frac{1 - 1,05^{4} \times (1 + 0,07)^{-4}}{1 + 0,07 - 1,05} = \$72.696,10$$

Aplicando la fórmula del total de intereses:

$$TI_{geometrica} = C_{1} \times \frac{1 - q^{n}}{1 - q} - V_{0}$$

$$TI_{geometrica} = 20000 \times \frac{1 - 1,05^{4}}{1 - 1,05} - 72696,10$$

$$TI_{geometrica} = \$13506,40$$

Comprobación a través del cuadro de marcha:

n	Vn/i	Ch	th	Ih
0	72696,10			
1	57784,83	20000,00	14911,27	5088,73
2	40829,76	21000,00	16955,06	4044,94
3	21637,85	22050,00	19191,92	2858,08
4	0,00	23152,50	21637,85	1514,65
		86202,50	72696,10	**13506,40**

Nota: en las rentas variables en progresión geométrica decreciente la razón resultará ser un número menor a la unidad, como podemos observar en la siguiente serie compuesta de cuatro términos:

1000, 800, 640, 512

La razón aquí utilizada es 0,8 siendo que:

$$Total.de.Desembolsos = 1000 \times \frac{1 - 0,8^{4}}{1 - 0,8}$$

$$Total.de.Desembolsos = \$2952$$

RENTAS VARIABLES DE PAGOS ADELANTADOS

En este caso, basta con multiplicar por (1 + i) el valor actual o final (según corresponda) de la renta de pagos adelantados:

$$V_{(c,d)n>i} = V_{(c,d)n>i} \times (1+i)$$
$$A_{(c,d)n>i} = A_{(c,d)n>i} \times (1+i)$$

RENTAS PERPETUAS

El cálculo de la renta en progresión aritmética perpetua se realiza, como para cualquier renta perpetua, a través del límite cuando la cantidad de términos (n) tiende a infinito:

$$V_{(c,d)n>i} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(c+\frac{d}{i}\right)\times v_{n>i} - \frac{nd(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$V_{(c,d)n>i} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(c+\frac{d}{i}\right)\times v_{n>i} - \lim_{n\to\infty}\frac{nd(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

resultando finalmente:

$$V_{(c,d)\infty>i}=\left(c+\frac{d}{i}\right)\times\frac{1}{i}$$

Nota: en caso de tratarse de una variabilidad decreciente bastará con invertir el signo positivo de la razón (d) para reflejar dicha disminución.

RENTAS VARIABLES EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

En este caso, abordaremos al subgrupo de rentas correspondiente al conjunto de capitales cuyas cuantías varían periodo tras periodo obedeciendo a la ley de las sucesiones geométricas, es decir, donde cada término resulta ser el anterior multiplicado por un mismo número denominado "razón de la progresión geométrica", que denominaremos "q".

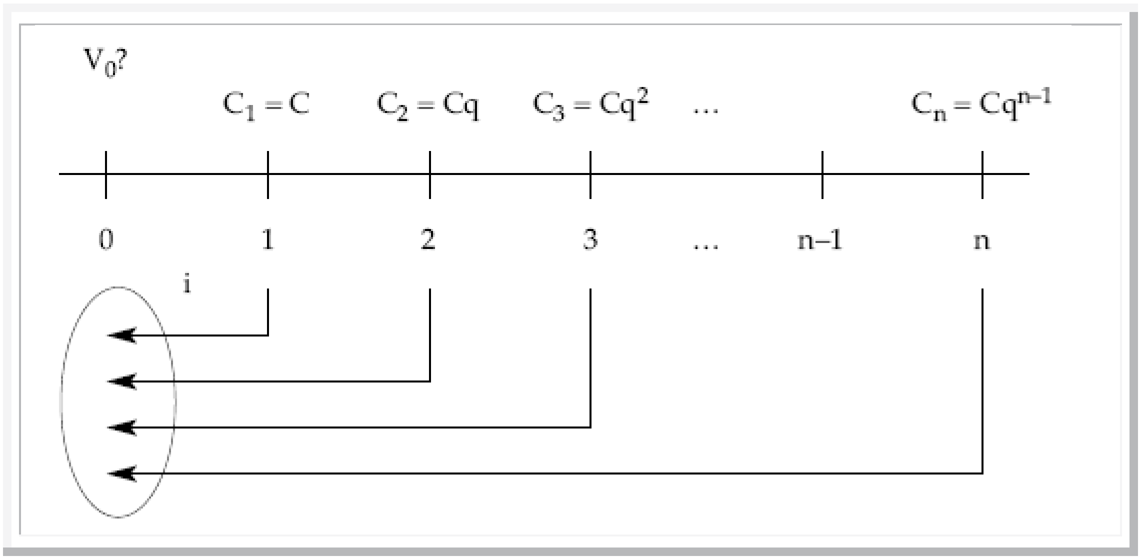
Para calcular cualquier término basta con conocer, por tanto, el primero de ellos (c) y la razón de la progresión (q).

RENTA VARIABLE EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA, TEMPORAL, DE PAGOS VENCIDOS, INMEDIATA Y ENTERA

Vamos a estudiar una renta variable (términos que siguen una progresión geométrica), temporal (tiene un número determinado de capitales), de pagos vencidos o "pospagable" (los términos vencen al final del periodo), inmediata (valuaremos la renta en su origen) y entera, y sincrónica (tanto los términos como la tasa están expresados en la misma unidad de tiempo). Calculándose en régimen compuesto.

Cálculo del valor actual

La representación gráfica de la renta anteriormente citada es la siguiente:



Se trata de valuar en el origen todos los términos que componen la renta. Para ello, los actualizaremos uno a uno descontando en régimen compuesto a la tasa que fuera valuada la renta (i), desde donde está cada capital hasta el origen, obteniéndose el valor actual que se nota con la siguiente terminología: V(c;q)n/i, expresión que recoge la información de la renta (n términos, valuados a la tasa i) y también datos de la progresión que siguen los capitales: primer término (C) y razón de la progresión (q):

$$V_{c,q)n>i} = \frac{C}{1+i} + \frac{Cq}{(1+i)^2} + \frac{Cq^2}{(1+i)^2} + ... + \frac{Cq^{n-2}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{Cq^{n-1}}{(1+i)^n}$$

Sacando factor común:

$$\frac{C}{(1+i)}$$

se obtiene:

$$V_{(c,q)n>i} = \frac{C}{1+i} \times \left[1 + \frac{q}{1+i} + \frac{q^2}{(1+i)^2} + \ldots. + \frac{q^{n-1}}{(1+i)^{n-1}} \right]$$

donde el corchete es la suma de n términos en progresión geométrica creciente de razón:

$$r = \frac{q}{1+i}$$

Aplicando la expresión que suma términos para esta ley:

$$S = \frac{a_1 - a_n \times r}{1-r}$$

siendo a_1 el primer término de la progresión, a_n el último término y r la razón.

Aplicando dicha fórmula a los términos actualizados de la renta, el valor actual de la renta queda de la siguiente forma:

$$V_{(c,q)n>i} = \frac{C}{1+i} \times \left[\frac{1 - \frac{q^{n-1}}{(1+i)^{n-1}} \times \frac{q}{1+i}}{1 - \frac{q}{1+i}} \right]$$

$$V_{(c,q)n>i} = \frac{C}{1+i} \times \frac{1 - \frac{q^n}{(1+i)^n}}{\frac{1+i-q}{1+i}}$$

de donde finalmente se puede obtener:

$$V_{(c,q)n>i} = C \times \frac{1 - q^n \times (1+i)^{-n}}{1+i-q}$$

expresión que solamente se podrá utilizar cuando q ≠ 1 + i.

Cuando se cumple: q = 1 + i, la expresión del valor actual quedará de la siguiente forma:

$$V_{(c,q)n>i} = \frac{C}{1+i} + \frac{C(1+i)}{(1+i)^2} + \frac{C(1+i)^2}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{C(1+i)^{n-1}}{(1+i)^n}$$

sacando factor común:

$$V_{(c,q)n>i} = \frac{C}{1=i}\left[1+\frac{1+i}{1+i}+\frac{(1+i)^2}{(1+i)^2}+....+\frac{(1+i)^{n-1}}{(1+i)^{n-1}}\right]$$

Dentro del corchete, al simplificarse, obtenemos la suma aritmética de n veces la unidad, siendo:

$$V_{(c,q)n>i} = \frac{n \times C}{1+i}$$

Para identificar el total de intereses de las rentas variables en progresión geométrica recurrimos a la siguiente igualdad:

$$T.Intereses = T.Desembolsos - V_0$$

El total de desembolsos puede calcularse aplicando los criterios de una progresión geométrica como vimos oportunamente, donde:

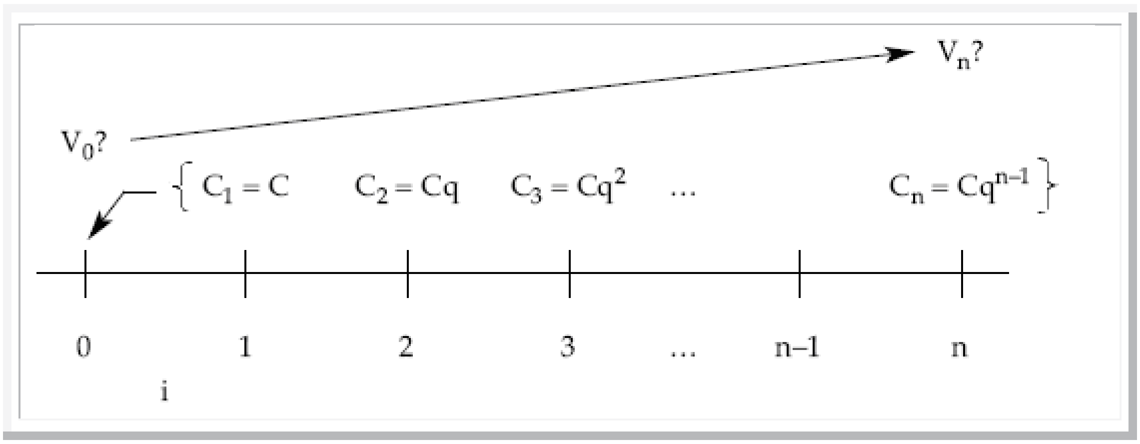
$$Total.de.Desembolsos = C_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

Por lo tanto:

$$T.Intereses = C_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} - V_0$$

Cálculo del valor final

A partir del valor actual se podrá calcular el valor de la renta en cualquier otro momento, al utilizar la relación que existe entre los valores financieros en los diferentes momentos de tiempo. Es decir, capitalizaremos el valor actual a la tasa de referencia hasta alcanzar el momento del valor final.

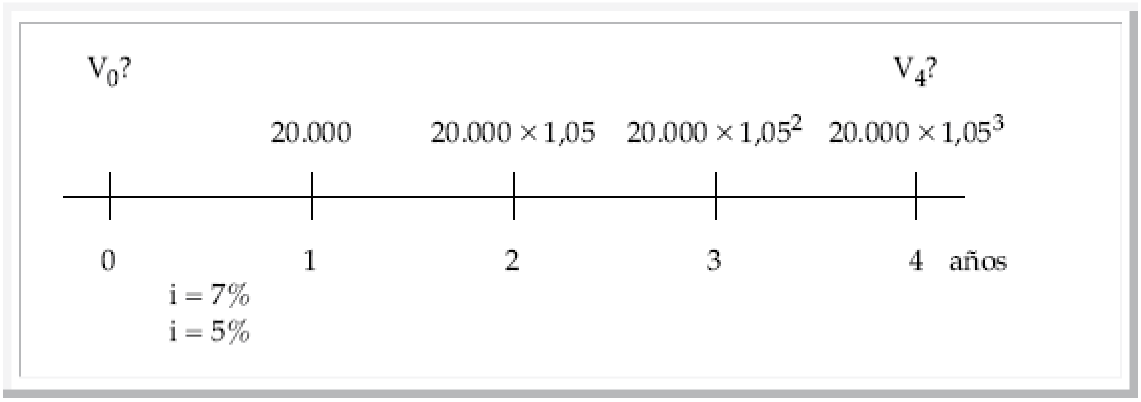


$$A_{(c,q)n>i} = V_{(c,q)n>i} \times (1+i)^n$$

Ejemplo:

Hallar el valor actual y final de los ingresos anuales vencidos de un trabajador que el primer año va a ganar $20.000 y espera que crezcan un 5 % anual de forma acumulativa para un horizonte temporal de cuatro años.

a) Suponiendo una tasa de interés del 7 %
b) Suponiendo una tasa del 5 %



a) Valuando al 7 %:

$$V_{(20000;1,05)4>0,07} = 20000 \times \frac{1-1{,}05^{4} \times \left(1+0{,}07\right)^{-4}}{1+0{,}07-1{,}05} = 72.696{,}10$$

$$A_{(20000;1,05)4>0,07} = 72696{,}10 \times 1{,}07^{4} = 95289{,}76$$

b) Valuando al 5 %:

$$V_{(20000;1,05)4>0,05} = \frac{4 \times 20000}{1+0{,}05} = 76.190{,}48$$

$$A_{(20000;1,05)4>0,05} = 76.190{,}48 \times 1{,}05^{4} = 92.610{,}00$$

EJERCICIOS RESUELTOS DE RENTAS

- Se otorga un crédito de $17.000 que será cancelado en diez cuotas iguales, valuándose la operación al 2 % efectivo mensual. Si se otorgara un plazo de gracia de cinco meses, calcular el valor de cada cuota de servicio, así como el total de intereses que genera la operación.

SOLUCIÓN:

Tengamos en cuenta que el plazo de gracia establece la distancia temporal entre el momento en que se otorga el crédito y el instante en que se abona la primera cuota, por lo que si consideramos resolverlo con la expresión de las rentas de pagos vencidos, el origen de la operación se fijaría un periodo antes del desembolso de dicha cuota, por lo que el diferimiento sería de cuatro meses:

$$C = \frac{17000 \times 1{,}02^{4} \times 0{,}02}{1 - 1{,}02^{-10}}$$

$$C = \$2048{,}56$$

Para identificar el total de intereses:

$$TI = n \times C - V_0$$

$$TI = 10 \times 2048{,}56 - 17000$$

$$TI = \$3485{,}58.-$$

- Para devolver la suma de $14.000 se pactó entregar ocho pagos vencidos, mensuales y consecutivos de $2.000 cada uno. Calcular la tasa efectiva y mensual pactada en dicha operación.

SOLUCIÓN:

Utilizamos la fórmula de Baily:

$$h = \left(\frac{2000 \times 8}{14000}\right)^{\frac{2}{9}-1}$$
$$h = 0{,}030118$$

$$i = \frac{12 \times (8+1) - (8^2 - 1) \times 0{,}030118}{12 \times (8+1) - 2 \times (8^2 - 1) \times 0{,}030118} \times 0{,}030118$$
$$i = 0{,}0307$$

- Se decide realizar 12 depósitos mensuales y consecutivos de $800 valuados al 2 % efectivo mensual, para retirar el total al momento de efectuar el último depósito. Calcular el total de intereses que genera la operación.

SOLUCIÓN:

$$A_{n>i} = \frac{800}{0{,}02} \times \left(1{,}02^{12} - 1\right)$$
$$A_{n>i} = 10729{,}67$$
$$TI = A_{n>i} - n \times C$$
$$TI = 10729{,}67 - 12 \times 800$$
$$TI = \$1129{,}67$$

- Un inversor desea reunir $15.000 mediante el depósito de nueve cuotas mensuales y consecutivas. Calcular el importe de dichas cuotas si se empleó una tasa mensual del 2,4 % y el retiro se realizará 35 días después del último depósito.

SOLUCIÓN:

$$15000 = \frac{C}{0{,}024} \times \left(1{,}024^{9} - 1\right) \times 1{,}024^{\frac{35}{30}}$$
$$C = \$1471{,}70$$

- Con el propósito de efectuar un viaje por Europa el próximo año, la Sra. González está decidida a reunir la suma de \$27.000. ¿Qué importe deberá depositar mensualmente durante los próximos 11 meses si planea retirar sus ahorros tres meses después de efectuado el último de ellos? Luego de notificarse que omitió abonar la cuota de orden cinco, ¿cuál sería la suma realmente conseguida? Tasa de la operación: 3 % efectiva mensual.

SOLUCIÓN:

Calculamos el importe de los depósitos mensuales previstos para reunir \$27.000:

$$27000 = \frac{C}{0{,}03} \times \left(1{,}03^{11} - 1\right) \times 1{,}03^{3}$$
$$C = \$1929{,}20$$

Bajo el supuesto de la omisión de la cuota de orden cinco, recibiría tan solo:

$$Suma\ \mathrm{Re}cibida = 27000 - 1929{,}20 \times 1{,}03^{9}$$
$$Suma\ \mathrm{Re}cibida = \$24482{,}83$$

- El Sr. Sánchez abonó el 1.ro de abril la cuota n.º 14 correspondiente a una serie de 30 depósitos mensuales y consecutivos que le permitirán obtener un beneficio de $3.000 valuada la operación al 1 % efectivo mensual. Calcular el importe de las cuotas que abona y el total que prevé reunir.

SOLUCIÓN:

$$3000 = A_{n>i} - 30 \times C$$
$$A_{n>i} = 3000 + 30 \times C$$
$$30 + 0{,}3 \times C = 0{,}3478489 \times C$$
$$C = \frac{30}{0{,}0478489}$$
$$C = \$626{,}97$$

Para calcular el total, reemplazamos el importe obtenido en la fórmula inicial:

$$A_{n>i} = 3000 + 30 \times C$$
$$A_{n>i} = 3000 + 30 \times 626{,}97$$
$$A_{n>i} = \$21809{,}10$$

Podríamos usar la fórmula del valor final para alcanzar igual resultado:

$$A_{n>i} = \frac{626{,}97}{0{,}01} \times \left(1{,}01^{30} - 1\right)$$
$$A_{n>i} = \$21809{,}10$$

- Se decide realizar diez depósitos mensuales de $2.000 cada uno en una cuenta para, una vez efectuado el último, prestar el 60 % de lo obtenido a un tercero, quien pagará por dicha suma cuatro cuotas trimestrales e iguales entre sí, abonándose la primera de ellas tres meses después de finalizada la primera operación. Si la tasa pactada en ambas operaciones fue del 2 % efectivo mensual, calcular el total de intereses que podrá reunir el inversor.

SOLUCIÓN:

Calculamos inicialmente la tasa sincrónica:

$$1{,}02^{3} - 1 = i_{trimestral}$$
$$i_{trimestral} = 0{,}061208$$

$$A_{n>i} = \frac{2000}{0{,}02} \times \left(1{,}02^{10} - 1\right)$$
$$A_{n>i} = \$21899{,}44$$

A continuación, el inversor destina el 60 % para prestar (retiene el 40 % para sí como parte del recupero):

$$21899{,}44 \times 0{,}60 = \frac{C}{0{,}061208} \times \left(1 - 1{,}061208^{-4}\right)$$
$$C = \$3802{,}49$$

Procedemos por último a calcular el total de intereses:

$$TI = 0{,}4 \times 21899{,}44 + 4 \times 3802{,}49 - 20000$$
$$TI = \$3969{,}74$$

- Contratada una renta de $15.000 por la que se pactó abonar 18 cuotas mensuales e iguales valuadas al 3 % efectivo mensual, se desea conocer qué importe se debería adicionar a la última cuota para cancelar la deuda si se conoce que inmediatamente después de abonada la cuota nueve se interrumpieron los pagos por cuatro meses, y se los reanudó normalmente a partir de ese momento.

SOLUCIÓN:

$$C = \frac{15000 \times 0{,}03}{1 - 1{,}03^{-18}}$$
$$C = \$1090{,}63$$

La interrupción por cuatro periodos posteriores al desembolso de la novena cuota incluye tres periodos impagos (dado que la reanudación se verifica con la cuota 13, cancelada en tiempo y forma); se trata de las cuotas de orden 10, 11 y 12.
Calcularemos la imposición de tres cuotas iguales (valuadas al momento de vencimiento de la cuota 12) y capitalizada seis periodos para hacerla coincidir con el último pago:

$$Pago\ Sustitutivo = \frac{1090{,}63}{0{,}03} \times \left(1{,}03^{3} - 1\right) \times 1{,}03^{6}$$

$$Pago\ Sustitutivo = \$4025{,}18$$

- La Srta. Rodríguez decide depositar mensualmente, 12 cuotas de $600 cada una para iniciar un ahorro. La tasa de la operación es del 3,5 % efectivo mensual. Calcular el importe que podrá reunir dos meses después de efectuado el último. Suponiendo que olvidó abonar la cuota n.º 8, ¿qué importe debería adicionar junto con el último depósito para concretar su objetivo inicial?

SOLUCIÓN:

Para conocer el importe que desea conseguir:

$$A_{n>i} = \frac{600}{0{,}035} \times \left(1{,}035^{12}1\right) \times 1{,}035^{2}$$
$$A_{n>i} = \$9385{,}19$$

Para determinar la suma compensatoria por la cuota omitida:

$$reposicion = 600 \times 1{,}035^{4}$$
$$reposicion = \$688{,}51$$

La siguiente expresión también devuelve el valor requerido:

$$9385{,}19 = \frac{600}{0{,}035} \times \left[\left(1{,}035^{7} - 1\right) \times 1{,}035^{7} + \left(1{,}035^{4} - 1\right) \times 1{,}035^{2} \right] + X \times 1{,}035^{2}$$
siendo
$$X = \$688{,}51$$

- Se piden prestados \$13.800 que serán abonados en seis pagos mensuales iguales y consecutivos, valuados al 2 % efectivo mensual. Determinar el importe de dichas cuotas.

SOLUCIÓN:

$$C = \frac{V_{0} \times i}{1 - \left(1 + i\right)^{-n}}$$
$$C = \frac{13800 \times 0{,}02}{1 - 1{,}02^{-6}}$$
$$C = \$2463{,}66$$

- Dada una serie de 12 cuotas mensuales y vencidas de \$1.600 cada una, calcular la suma que origina la operación si se valúa al 2 % efectivo mensual.

SOLUCIÓN:

$$V_{n>i} = \frac{C}{i} \times \left[1-(1+i)^{-n}\right]$$
$$V_{n>i} = \frac{1600}{0{,}02} \times \left(1-1{,}02^{-12}\right)$$
$$V_{ni} = \$16920{,}55$$

- El Sr. Pérez recibe $3.600 que serán devueltos en nueve cuotas mensuales y vencidas al valuar la operación al 1,5 % mensual. Calcular el costo financiero de dicha operación y el valor de las cuotas que habrá de abonar.

SOLUCIÓN:

$$TI = n \times C - V$$
$$TI = 3600 \times \left(\frac{9 \times 0{,}015}{1-1{,}015^{-9}} - 1\right)$$
$$TI = \$275{,}36$$

De la primera fórmula, despejamos el valor de la cuota:

$$275{,}36 = 9 \times C - 3600$$
$$9 \times C = 3600 + 275{,}36$$
$$C = \frac{3875{,}36}{9} \qquad \text{Su}$$
$$C = \$430{,}60.-$$

- ¿Qué pago extraordinario debe efectuarse junto con la cuota mensual número 12 de una renta de $132.000 cancelable en 30 cuotas mensuales vencidas para reducir el plazo de la operación en ocho meses? Tasa de interés 19 % cuatrimestral capitalizable quincenalmente.

SOLUCIÓN:

Inicialmente, sincronizamos la tasa dada con la frecuencia de los pagos:

$$\left(1+\frac{0{,}19\times 15}{120}\right)^{\frac{30}{15}}=\left(1+i_{menual}\right)^{\frac{30}{30}}$$

$$i_{mensual}=0{,}04806$$

Luego, calculamos el valor de cada cuota según se proyectó en el inicio:

$$C=\frac{13200\times 0{,}0406}{1-1{,}04806^{-30}} \qquad C=\$8397{,}52$$

Según el enunciado, se deberá reducir el plazo original en ocho meses, lo que implica calcular una renta de pagos vencidos de ocho cuotas y actualizar el conjunto hasta el momento en que se abona la cuota de orden 12 (es decir, diez periodos mensuales):

$$P\_Exrtraordinario=\frac{8397{,}52}{0{,}04806}\times\left(1-1{,}04806^{-8}\right)\times 1{,}04806^{-10}$$

$$P\_Extraordinario=\$34209{,}83$$

- Un deudor que abonó la cuota 16 por \$400 decide cancelar anticipadamente su deuda en ese mismo instante. ¿Qué suma adicional debería depositar para cumplir su objetivo si la deuda se pactó cumplir en 24 cuotas valuando la operación al 2,5 % efectivo mensual? ¿Cuál fue el importe originalmente recibido? ¿Cuál resultó ser la economía de intereses?

SOLUCIÓN:

La deuda original:

$$V_0 = \frac{400}{0,025} \times \left(1 - 1,025^{-24}\right)$$
$$V_0 = \$7154$$

La suma que debería adicionar en ese momento corresponde al saldo de deuda por las cuotas pendientes:

$$SD = \frac{400}{0,025} \times \left(1 - 1,025^{-8}\right)$$
$$SD = \$2868,08$$

Para calcular el ahorro de intereses, cotejamos este importe contra las ocho cuotas de servicio pendientes:

$$ahorro = 8 \times 400 - 2868,08 \qquad ahorro = \$331,94$$

- Una serie de 12 depósitos mensuales valuados al 2 % mensual se realizaron en una institución financiera para reunir un cierto importe dos meses después de efectuado el último de ellos. Si se conoce que los pagos impares fueron de $500 cada uno y los pares de $1.000 cada uno, calcular el importe alcanzado.

SOLUCIÓN:

Tenemos distintas formas para solucionar este problema, en cualquier caso, nos está faltando conocer el valor de la tasa bimestral equivalente:

$$(1+i_b)^{\frac{1}{2}} = (1+0{,}02)$$
$$i_b = 0{,}0404$$

$$A_{n>i} = \frac{500}{0{,}0404} \times \left(1{,}0404^6 - 1\right) \times 1{,}02^3 + \frac{1000}{0{,}0404} \times \left(1{,}0404^6 - 1\right) \times 1{,}02^2$$
$$A_{n>i} = \left(500 \times 1{,}02 + 1000\right) \times \frac{\left(1{,}0404^6 - 1\right) \times 1{,}02^2}{0{,}0404}$$
$$A_{n>i} = \$10430{,}91$$

Asimismo, podemos considerar una renta de 12 depósitos mensuales de \$500 más una segunda renta "superpuesta" de \$500 bimestrales para los periodos pares de pagos adelantados:

$$A_{n>i} = 500 \times 1{,}0404 \times \left\{\left[\left(1+0{,}02^{12} - 1\right)\right] \times \frac{1}{0{,}02} + \left[\left(1+0{,}0404\right)^6 - 1\right] \times \frac{1}{0{,}0404}\right\}$$
$$A_{n>i} = \$10430{,}91$$

- Calcular el valor del capital amortizado correspondientes a las cuotas 14 a 18, ambas inclusive, de una renta cuya cancelación se pactó en 48 cuotas mensuales si se considera que el costo financiero de la operación ascendió a \$6.480, se otorgó un plazo de gracia de cinco meses en el inicio y la tasa efectiva de la operación fue convenida al 18 % nominal anual.

SOLUCIÓN:

Siendo $TI = n \times C - V_0$ $6480 = 48 \times C - V_0$

$$V_0 = 48 \times C - 6480$$

$$48 \times C - 6480 = \frac{C}{0,015} \times \left(1 - 1,015^{-48}\right) \times 1,015^{-4}$$
$$48 \times C - 32,07436 \times C = 6480$$
$$C = \$406,89$$

Reemplazamos:

$V_0 = 48 \times 406,89 - 6480$ $V_0 = \$13050,72$

- Conociendo que entre las cuotas 41 a 44, ambas inclusive, de una cierta renta pactada a cancelarse en 60 cuotas mensuales se amortizaron \$1.200 y se conoce adicionalmente que la tasa empleada en la operación que ascendió al 2 % mensual, determine el capital original de dicha operación.

SOLUCIÓN:

Calculamos el valor de la cuota de servicio constante a partir de los datos del enunciado:

$$1200 = V_{(60-20)} - \frac{C}{0,02} \times \left(1 - 1,02^{-16}\right)$$
$$1200 = \frac{C}{0,02} \times \left[\left(1 - 1,02^{-20}\right) - \left(1 - 1,02^{-16}\right)\right]$$
$$1200 \times 0,02 = C \times \left(\cancel{1} - 1,02^{-20} - \cancel{1} + 1,02^{-16}\right)$$
$$C = \$432,62$$

Para averiguar V_0:

$$V_0 = \frac{432{,}62}{0{,}02} \times \left(1 - 1{,}02^{-60}\right)$$

$$V_0 = \$15038{,}25$$

- Se pacta depositar una serie de 20 cuotas mensuales e iguales entre sí con el propósito de retirar $20.000 una vez depositada la última de ellas. Las tasas pactadas a tales efectos se fijaron en el 3 % efectivo mensual, que se mantendría vigente hasta el momento del depósito de la décima cuota para luego incrementarse en un punto. Una vez concluido el plazo previsto, se verifica que el aportante omitió el desembolso de los sucesivos depósitos inmediatamente después de abonada la cuota n.º 8, durante cuatro meses.
  Se solicita determinar qué suma deberá ingresar junto con el último depósito para alcanzar el objetivo.

  SOLUCIÓN:

  Averiguaremos inicialmente el importe de las cuotas de la renta:

$$20000 = C\left\{\frac{1}{0{,}03}\left[(1+0{,}03)^{10} - 1\right](1{,}04)^{10} + \frac{1}{0{,}04}\left[(1+0{,}04)^{10} - 1\right]\right\}$$

$$C = \frac{20000}{28{,}97544896}$$

$$C = 690{,}24$$

Según lo indicado en el ejercicio, y suspendidos los pagos durante cuatro meses, significa que se retoman los pagos normalmente con la cuota de orden n.º 12, por lo que se omitieron las intermedias, es decir, cuotas nueve, diez y once; las dos primeras valuadas al 3 % pueden incluirse en una renta de dos cuotas de pago vencidos (no podría considerarse una imposición de pagos adelantados puesto que se verían afectadas a dos tasas diferentes), en tanto, la cuota n.º 11 deberá valuarse sola por regirse al 4 %.

$$Suma.a.ingresar = 690{,}24\left\{\left[(1+0{,}03)^2 - 1\right] \times \frac{1}{0{,}03} \times (1+0{,}04)^{10} + (1+0{,}04)^9\right\}$$

$$Suma.a.Ingresar = \$3056{,}53$$

- Se contrata una renta a pagarse con 15 cuotas mensuales y constantes de $250 cada una para retirar lo producido luego de cuatro meses de efectuado el último depósito. Las tasas vigentes en dicha operación fueron del 3 % mensual hasta quince días posteriores al pago de la cuota nueve, para luego ascender al 4 %. Dada una suspensión de los pagos de cuatro meses luego de haberse depositado la cuota siete, se generó una deuda que sería cancelada mediante tres cuotas bimestrales y vencidas, posteriores a la última cuota de la primera serie. Calcular:
    1. el importe de dichos pagos sabiendo que resultarán iguales entre sí,
    2. el valor reunido al finalizar toda la operación,
    3. el valor efectivamente disponible en la fecha final inicialmente estipulada,
    4. el incremento en los intereses producidos por la prórroga en la cancelación.

SOLUCIÓN:

1. El importe de dichos pagos sabiendo que resultarán iguales entre sí:

$$\frac{250}{0.03}\times\left(1.03^{2}-1\right)\times\sqrt{1.03}\times 1.04^{5,5}+250\times 1.04^{5}=C\times\frac{1-1.0816^{-3}}{0.0816}$$

Nota: al calcular el valor de la cuota C se consideró la tasa efectiva sincrónica (bimestral) equivalente al 4 % efectivo mensual indicado.

$$C=\$367,06.-$$

2. El valor reunido al finalizar toda la operación:

$$\frac{250}{0.03}\times\left(1.03^{7}-1\right)\times 1.03^{2.5}\times 1.04^{11,5}+\frac{250}{0.04}\times(1.04^{5}-1)\times 1.04^{6}+367.06\times\frac{1.0816^{3}-1}{0.0816}=\$6144.88.-$$

Considerando que las cuotas bimestrales sustituyeron las cuotas omitidas oportunamente, al mismo resultado se hubiera llegado al presentar el siguiente cálculo:

$$250\times\left[\frac{\left(1{,}03^{9}-1\right)}{0{,}03}\times\sqrt{1{,}03}\times 1{,}04^{11,5}+\frac{\left(1{,}04^{6}-1\right)}{0{,}04}\times 1{,}04^{6}\right]=\$6144{,}88.-$$

3. El valor efectivamente disponible en la fecha final inicialmente estipulada:

$$\frac{250}{0.03}\times\left(1.03^{7}-1\right)\times 1.03^{2.5}\times 1.04^{9.5}+\frac{250}{0.04}\times(1.04^{5}-1)\times 1.04^{4}+367.06\times\frac{1.0816^{2}-1}{0.0816}=\$5341{,}91.-$$

4. El incremento en los intereses producido por la prórroga en la cancelación:

Para este cálculo consideramos comparar lo efectivamente reunido contra lo que hubiéramos conseguido de haberse desarrollado correctamente la operación tal como se previó originalmente.

$$6144.87-\left\{\frac{250}{0.03}\times\left(1.03^{9}-1\right)\times 1.03^{0.5}\times 1.04^{9.5}+\frac{250}{0.04}\times\left(1.04^{6}-1\right)\times 1.04^{4}\right\}=\$463.59.-$$

- Se procede a cancelar un saldo de deuda con $42.611 once días después de abonada la cuota 23 sobre un total de 31 cuotas. La operación se perfeccionó con dos tasas anuales del 28 y 34 %, ambas efectivas, vigente la primera de ellas hasta el depósito de la cuota 14. Dicho saldo de deuda incluye el importe de la cuota n.º 6, no cumplimentada en su oportunidad. Se desea conocer el importe de la deuda original.

SOLUCIÓN:

En primer lugar, calculamos las tasas que corresponden por tratarse de una renta asincrónica:

$$(1+0{,}28)^{\frac{1}{12}}=(1+i_1)$$
$$i_1=\sqrt[12]{1{,}28}-1$$
$$i_1=0{,}02078$$

$$(1+0{,}34)^{\frac{1}{12}}=(1+i_2)$$
$$i_2=\sqrt[12]{1{,}34}-1$$
$$i_2=0{,}02469$$

Valuando el saldo de deuda:

$$42611 = C \times 1{,}02078^{8} \times 1{,}02469^{\frac{281}{30}} + C \times \frac{\left[1-(1+0{,}02469)^{-8}\right]}{0{,}02469} \times 1{,}02469^{\frac{11}{30}}$$

$$C = \frac{42611}{8{,}725524031}$$

$$C = 4883{,}49$$

$$V_0 = 4883{,}49 \left\{ \frac{\left[1-(1+0{,}020708)^{-14}\right]}{0{,}020708} + \frac{\left[1-(1+0{,}02469)^{-17}\right]}{0{,}02469} \times 1{,}020708^{-14} \right\}$$

$$V_0 = \$109214{,}54$$

- Se toma un crédito por $12.000 a cancelarse en 36 cuotas mensuales y vencidas de igual importe entre sí, para lo cual se pactó la operación a tasa variable y se inició con el 24 % anual. Quince días posteriores al desembolso de la cuota de orden n.º 14 se le informa al deudor que la tasa se incrementó en seis puntos. Calcular el importe de las cuotas que componen originalmente la deuda, el nuevo valor de las cuotas ajustadas por el aumento en la tasa y el costo financiero adicional que sufre el deudor.

SOLUCIÓN:

Recordemos que se trata de una renta de tipo asincrónica, por lo que deberemos ajustar las tasas a la frecuencia de los pagos:

$$(1+i_m)^{\frac{1}{1}} = (1+0{,}24)^{\frac{1}{12}}$$

$$i_m = \sqrt[12]{1{,}24} - 1$$

$$i_1 = 0{,}0180876$$

$$(1+i_m)^{\frac{1}{1}} = (1+0{,}30)^{\frac{1}{12}}$$

$$i_m = \sqrt[12]{1{,}30} - 1$$

$$1_2 = 0{,}02210445$$

Una vez conocidas las tasas, calculamos el valor original de las cuotas:

$$C = \frac{12000 \times 0{,}0180876}{\left[1-\left(1+0{,}0180876\right)^{-36}\right]}$$

$$C = 456{,}46$$

Como alternativa, calculamos el saldo de deuda luego de abonada la cuota n.º 14 para luego capitalizar la operación durante un mes (pasando por ambas tasas) y continuar como una renta de pagos adelantados:

$$V_{36-14} = \frac{456{,}46}{0{,}0180876}\left[1-\left(1+0{,}0180876\right)^{-36+14}\right]$$

$$V_{36-14)} = 8224{,}34$$

$$8224{,}34 \times 1{,}0180876^{\frac{1}{2}} \times 1{,}02210445^{\frac{1}{2}} = \frac{C}{0{,}02210445}\left[1-\left(1+02210445\right)^{-22}\right]\times\left(1+0{,}02210445\right)$$

$$C = 475{,}17$$

Por último, el incremento en el costo del proceso puede fácilmente establecerse por la diferencia de la sumatoria de las cuotas a abonar, contra la sumatoria de las cuotas que se modificaron:

$$Diferencia = 22 \times (475{,}17 - 456{,}46)$$

$$Diferencia = 411{,}62$$

- Se decide implementar un fondo de ahorro depositando cuotas iguales y mensuales durante diez años, para comenzar a retirar a perpetuidad en forma trimestral $10.000, y se efectúa el primero de los retiros al mes de efectuado el último de los depósitos. Conociendo que la tasa de la operación se fijó en el 10 % anual capitalizable mensualmente, indicar el monto de los depósitos que serían necesarios para alanzar lo propuesto.

SOLUCIÓN:

Se trata de conformar en este caso una imposición tal que se transforme en el valor actual de una renta perpetua. En virtud de que la tasa de la operación es la misma en todo momento, calcularemos el valor de la equivalencia trimestral para el desarrollo de la perpetua:

$$i_m = \frac{0{,}10}{12}$$
$$i_m = 0{,}00833333$$
$$(1 + i_t)^{\frac{1}{3}} = (1 + 0{,}00833333)$$
$$i_t = 0{,}025209$$

La imposición bien podría tratarse como una renta anticipada de pagos adelantados, igual tratamiento correspondería a la perpetua en ese caso:

$$\frac{C}{0,00833333}\times\left[(1+0,00833333)^{120}-1\right]=\frac{10000}{0,025209}\times(1+0,025209)$$

$$C=1985,33$$

- Para saldar definitivamente una deuda, un inversor debió depositar $6.233 dos meses después del último de una serie de 16 pagos mensuales implementados para un fondo de ahorro valuado al 2 % mensual. Dicho importe corresponde a las cuotas cuatro, cinco y nueve, no depositadas oportunamente. Calcular el importe de la anualidad tal como se la esperaba inicialmente.

SOLUCIÓN:

Dos de las cuotas se encuentran contiguas en la serie, por lo que pueden agruparse en una renta (cuota cuatro y cuota cinco), la restante será valuada en forma independiente:

$$6233=\left\{\frac{C}{0,02}\left[(1+0,02)^{2}-1\right]\times 1,02^{4}+C\right\}\times 1,02^{9}$$

$$C=\frac{6233}{3,808177962}$$

$$C=1636,74$$

Una vez obtenido el valor de la cuota, podemos fácilmente calcular el valor de la imposición esperada originalmente:

$$A_{16\rangle 0,03} = \frac{1636,74}{0,02}\left[(1+0,02)^{16} - 1\right]$$

$$A_{16\rangle 0,02} = 30507,68$$

- Se contrata una renta a pagarse con 15 cuotas mensuales y constantes de $250, cada una para retirar lo producido luego de cuatro meses de efectuado el último depósito. Las tasas vigentes en dicha operación fueron del 3 % mensual hasta quince días posteriores al pago de la cuota nueve, para luego ascender al 4 %. Dada una suspensión de los pagos de cuatro meses, luego de haberse depositado la cuota siete, se generó una deuda que sería cancelada mediante tres cuotas bimestrales y vencidas, posteriores a la última cuota de la primera serie. Calcular:

    1 el importe de dichos pagos sabiendo que resultarán iguales entre sí,

    2 el valor reunido al finalizar toda la operación,

    3 el valor efectivamente disponible en la fecha final inicialmente estipulada.

SOLUCIÓN:

1 El importe de dichos pagos sabiendo que resultarán iguales entre sí:

$$\frac{250}{0.03}\times\left(1.03^{2}-1\right)\times\sqrt{1.03}\times 1.04^{5,5}+250\times 1.04^{5} = C\times\frac{1-1.0816^{-3}}{0.0816}$$

Nota: al calcular el valor de la cuota C, se consideró la tasa efectiva sincrónica (bimestral), equivalente al 4 % efectivo mensual indicado.

$$C = \$367{,}06.-$$

2 El valor reunido al finalizar toda la operación:

$$\frac{250}{0.03}\times\left(1.03^{7}-1\right)\times1.03^{2.5}\times1.04^{11,5}+\frac{250}{0.04}\times(1.04^{5}-1)\times1.04^{6}+367.06\times\frac{1.0816^{3}-1}{0.0816}=\$6144.88.-$$

3 El valor efectivamente disponible en la fecha final inicialmente estipulada:

$$\frac{250}{0.03}\times\left(1.03^{7}-1\right)\times1.03^{2.5}\times1.04^{9.5}+\frac{250}{0.04}\times(1.04^{5}-1)\times1.04^{4}+367.06\times\frac{1.0816^{2}-1}{0.0816}=\$5360,65.-$$

- Teresa abona $14.200 al hacerse cargo de las últimas 16 cuotas mensuales de pagos vencidos que conforman una serie de ahorros constantes iniciados oportunamente por su hermano Carlos. Dicha transmisión se valúo al 2,5 % efectivo mensual. Si se conoce que Carlos había pactado la renta a cancelarse en 40 cuotas mensuales valuadas al 2 % mensual, ¿cuál fue el resultado que obtuvo en la transacción? ¿Cuál fue el capital que esperaba reunir Carlos una vez finalizada la serie de ahorros? ¿Con qué importe se reunió Carlos al momento de la transmisión si se supone que rescato para sí las cuotas previas en ese instante?

SOLUCIÓN:

Averiguamos el valor de cada cuota que conformaba la serie, a partir del dinero que recibe Carlos y la tasa que acordara con su hermana Teresa:

$$C = \frac{14200 \times 0{,}025}{1 - 1{,}025^{-16}} \qquad C = \$1087{,}70$$

Para reconocer el resultado que obtuviera Carlos en esta cesión, actualizamos las 16 cuotas a la tasa que oportunamente pactara:

$$V = \frac{1087{,}70}{0{,}02} \times \left(1 - 1{,}02^{-16}\right) \qquad V = \$14768{,}47$$

De haber efectuado la serie de 16 pagos finales, hubiera obtenido más dinero: $14768{,}47 - 14200 = \$568{,}47$

Para saber la suma que hubiera alcanzado de completar el pago de las 40 cuotas:

$$A_{40>0{,}02} = \frac{1087{,}70}{0{,}02} \times \left(1{,}02^{40} - 1\right) \qquad A_{40>i} = \$65699{,}24$$

Para saber el importe total que alcanzó Carlos al momento de la transmisión, valuamos las 24 cuotas que depositó y las adicionamos al pago de Teresa:

$$A_{24>0{,}02} = \frac{1087{,}70}{0{,}02} \times \left(1{,}02^{24} - 1\right) \qquad A_{24>0{,}02} = 33089{,}86$$

Suma total reunida por Carlos:

$$33089{,}86 + 14200 = \$47289{,}86$$

- Se pacta devolver una cierta deuda al abonar 30 cuotas mensuales y consecutivas, de las cuales las 15 primeras serán de $1.000 y las restantes de $1.500 cada una. Se pactaron dos tasas consecutivas, la primera de ellas, del 1,5 % efvo. anual, permanecería vigente hasta 15 días posteriores al depósito de la novena cuota, para luego pactarse al 1,8 % efectivo mensual. ¿De qué deuda se trata? Si se supone que se desearía cancelar dicha deuda diez días después de hecho efectivo el sexto depósito, ¿qué suma sería necesaria?

SOLUCIÓN:

$$V_0 = \frac{1000}{0{,}015} \times \left(1 - 1{,}015^{-9}\right) + \frac{1000}{0{,}018} \times \left(1 - 1{,}018^{-6}\right) \times 1{,}018^{-\frac{15}{30}} \times 1{,}015^{-9{,}5} +$$
$$+ \frac{1500}{0{,}018} \times \left(1 - 1{,}018^{-15}\right) \times 1{,}018^{-5{,}5} \times 1{,}015^{-9{,}5}$$

$$V_0 = \$28610{,}14$$

Saldo de deuda:

$$V_0 = \frac{1000}{0{,}015} \times \left(1 - 1{,}015^{-3}\right) \times 1{,}015 \times 1{,}015^{-\frac{20}{30}} + \frac{1000}{0{,}018} \times \left(1 - 1{,}018^{-6}\right) \times 1{,}018^{-\frac{15}{30}} \times 1{,}015^{-\frac{95}{30}} +$$
$$+ \frac{1500}{0{,}018} \times \left(1 - 1{,}018^{-15}\right) \times 1{,}018^{-5{,}5} \times 1{,}015^{-\frac{95}{30}}$$

$$S\_Deuda = \$25178{,}66$$

Al mismo resultado llegaríamos con la siguiente expresión:

$$28610{,}14 \times 1{,}015^{\frac{190}{30}} - \frac{1000}{0{,}015} \times \left(1{,}015^{6} - 1\right) \times 1{,}015^{\frac{10}{30}} = \$25178{,}66$$

- Se conoce la primera y última cuota de una renta en progresión geométrica, sus valores respectivos son de \$78 y \$6,06 y se pacta cancelarla en seis pagos mensuales y valuados al 5 % efectivo mensual. Calcular el total de intereses y confeccionar el cuadro de marcha correspondiente.

SOLUCIÓN:

Previamente al uso de las fórmulas, debemos establecer la razón que fuera empleada al saber que se trata de una renta variable en progresión geométrica "decreciente" donde el resultado esperado será menor a uno:

$$C_6 = C_1 \times q^5 \qquad \text{ya que } C_n = C_1 \times q^{n-2}$$

$$6{,}06 = 78 \times q^5 \qquad q = \sqrt[5]{\frac{6{,}06}{78}} \qquad q = 0{,}6$$

Podemos ahora completar la expresión que nos permite reconocer el total de desembolsos:

$$T.de.Desembolsos = 78 \times \frac{1 - 0{,}6^6}{1 - 0{,}6} \qquad T.de.Desembolsos = \$185{,}90$$

También debemos calcular el valor actual:

$$V_{(c,q)n>i} = C \times \frac{1 - q^n \times (1+i)^{-n}}{1 + i - q}$$

$$V_{(c,q)n>i} = 78 \times \frac{1 - 0{,}6^6 \times (1 + 0{,}05)^{-6}}{1 + 0{,}05 - 0{,}6}$$

$$V_{(c,q)n>i} = \$167{,}30$$

Por último, utilizamos la fórmula del total de intereses para una renta variable en progresión geométrica, con los valores ya calculados parcialmente:

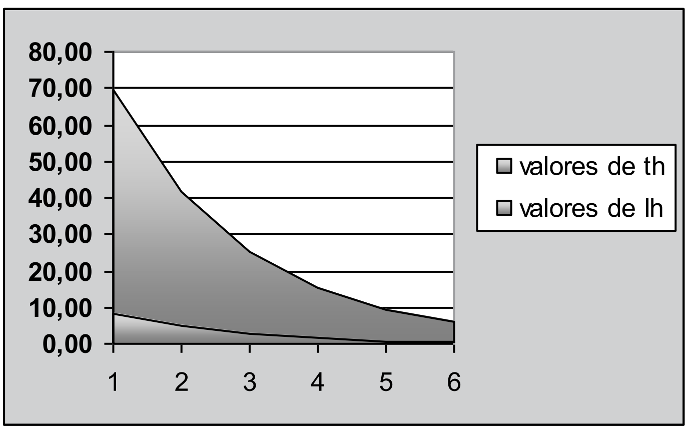
$$T.Intereses = C_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} - V_0$$

$$T.Intereses = 185{,}90 - 167{,}30 \qquad T.Intereses = \$18{,}60$$

Podremos comprobar los resultados previos mediante la confección del cuadro de marcha solicitado:

n	V(cq)n>i	Ch	th	Ih
0	**167,30**			
1	97,67	78,00	69,64	8,37
2	55,75	46,80	41,92	4,88
3	30,46	28,08	25,29	2,79
4	15,13	16,85	15,33	1,52
5	5,78	10,11	9,35	0,76
6	0,00	6,07	5,78	0,29
		185,90	167,30	**18,60**

Gráficamente:



Resolver el ejercicio anterior, si se supone que se trata de una renta variable en progresión aritmética.

SOLUCIÓN:

En este caso, también siendo decreciente, la razón aritmética empleada (d) resultará un número negativo y surgirá de la siguiente relación:

$C_n = C_1 + (n-1) \times d \qquad C_6 = 6{,}06$ y $C_1 = 78$, de donde:

$$6{,}06 = 78 + (6-1) \times d \qquad -5 \times d = 78 - 6{,}06 \quad d = \frac{-71{,}94}{5}$$

$$d = -14{,}39$$

Identificamos ahora la deuda original:

$$V_{(c,d)n>i} = \left(C_1 + \frac{d}{i} + n \times d \right) \times v_{n>i} - \frac{n \times d}{i}$$

$$V_{(c,d)n>i} = \left(78 + \frac{(-14{,}39)}{0{,}05} + 6 \times (-14{,}39) \right) \times \frac{1 - 1{,}05^{-6}}{0{,}05} - \frac{6 \times (-14{,}39)}{0{,}05}$$

$$V_{(c,d)n>i} = \$223{,}71$$

Calculamos el total de intereses al tener presente que, por tratarse de una renta decreciente, invertimos los valores de C_1 y C_n

$$Total.de.Intereses = n \times \left[C_1 + \frac{(C_1 - C_n)}{2} \right] - V_0$$

$$Total.de.Intereses = 6 \times \left[78 + \frac{78 - 6{,}06}{2} \right] - 223{,}71$$

$$Total.de.Intereses = \$28{,}47$$

Nota: puede observarse que en las rentas variables en progresión geométrica, a iguales condiciones de contratación el costo financiero puro resultará menor al que surja de la aplicación de las rentas variables en progresión aritmética.

Por último, resolvemos el cuadro de marcha con el que podremos corroborar los resultados:

n	V(cq)n>i	Ch	th	Ih
0	**223,71**			
1	156,90	78,00	66,81	11,19
2	101,13	63,61	55,77	7,84
3	56,96	49,22	44,17	5,06
4	24,98	34,83	31,98	2,85
5	5,78	20,44	19,20	1,25
6	0,00	6,06	5,78	0,29
		252,17	223,71	**28,47**

Gráficamente: