SISTEMAS DE AMORTIZACIÓN

Las modalidades de financiación crediticias han dado lugar al desarrollo de distintos sistemas de cancelación de deudas, en función de la forma en que se restituye el capital solicitado inicialmente y el modo en que se calculan los intereses de la deuda a favor del acreedor.
Independientemente del sistema que se utilice, observamos ciertos elementos comunes a todos ellos, a saber:

V=valor actual de la deuda (indicado como Vo, se refiere a la deuda al momento inicial, de origen o "cero", indicado con los subíndices 1, 2, 3, …., n, nos referimos al saldo de deuda que subsiste luego de cancelada la cuota de ese momento)

n=cantidad de cuotas que compone la operación

th= cuota de amortización (del capital)

Ih= cuota de intereses

Ch= cuota de servicio (desembolso total)

Por lo que

$$\boxed{Ch = th + Ih}$$

Se trata pues de vincular, cuando el sistema lo requiere, el componente de intereses, así como la restitución del capital del acreedor.

A los métodos más difundidos en la cancelación de deudas los podemos agrupar en dos grupos, a saber:

a) Aquel que basa la restitución en el régimen simple, conocido como método de los intereses directos.

b) Aquellos que toman en cuenta las cancelaciones anteriores a la culminación de la transacción financiera, conocidos como métodos sobre saldos.

Es así que, a partir de ahora, iremos desarrollando las características particulares de cada uno al entender que al hablar de sistemas de amortización podremos observar algunas excepciones a las definiciones generales.

Para la mayor comprensión de cada uno de los sistemas, procederemos a la confección de lo que se conoce como cuadro de marcha, esquema que permite tabular la evolución de un sistema y en particular una operación financiera de esta naturaleza al ingresar los datos en una matriz de doble entrada.

a) SISTEMA DE INTERESES DIRECTOS

Como se señalara oportunamente, dicho sistema se basa en los conceptos del régimen simple, su cálculo es sumamente sencillo, de ahí su extraordinaria difusión, pero como contrapartida muchas veces se lo emplea como una carga financiera excesiva en detrimento del deudor, por lo que lo convierte en un método "injusto" e incluso hasta lindante con la usura al favorecer el beneficio del acreedor.

No significa que el préstamo en sí mismo resulte oneroso al deudor, dado que todo dependerá de la tasa aplicada a este, pero el lector deberá comprender que frente a tasas que "aparentemente" resulten habituales por tratarse de este método es muy probable que su aplicación genere esa excesiva carga financiera a la que se alude precedentemente, tanto al momento de compararla frente a una tasa efectiva o bien, al ponderar el total de intereses a pagar.

Para comprender su evolución, indicaremos las fórmulas que permiten su cálculo, donde,

cuota de amortización del capital:

$$th = \frac{V}{n}$$

Es decir que, independientemente del orden (h) que corresponda, con este sistema el deudor abona con cada cuota una "enésima" parte del capital tomado al origen. Esto significa que, por ejemplo, si se recibe $4.000 a cancelarse en diez cuotas mensuales, el deudor que pacta este sistema deberá restituir en cada una de las diez cuotas la suma de $400 al acreedor en concepto de amortización, dado que 400=4.000/10.

Ahora nos resta conocer el importe de intereses (Ih) que completará la cuota de servicio (Ch) a favor del acreedor, por lo que su cálculo será:

$$Ih = V_o \times i$$

Es decir, que solo basta con aplicar la tasa (periódica) pactada en la operación al importe de la deuda original para conocer la cuantía de intereses que serán abonados en cada oportunidad, conjuntamente con la amortización prevista anteriormente para conocer el total de la cuota de servicio (Ch). A modo de ejemplo, supongamos que la deuda anteriormente indicada de $ 4.000, se pacta a una tasa semestral del 12 %:

Tendremos en cuenta previamente "sincronizar" la tasa (semestral) con la frecuencia en que se practicará la devolución (en nuestro caso, las cuotas se indicaron "mensualmente"), y dado que se trata de operar en el régimen simple, bastará dividir la tasa semestral en seis partes iguales para reconocer la tasa (mensual) en que será calculada la operación, de donde 0,12/6=0,02 (mensual).

Nota: ya hemos procedido a transformar la razón porcentual a una tasa apta para hacer cálculos (tasa unitaria).

De este modo, concluiremos que el deudor deberá abonar al acreedor con cada cuota de servicio la suma de $80, importe que surge del producto de la deuda original por la tasa mensual, es decir 4.000x0,02.

Ya contamos con los dos elementos básicos para reconocer el desembolso total periódico que deberá efectuar el deudor o cuota de servicio (Ch):

De donde:

$$Ch = th + Ih$$

$$Ch = 400 + 80$$

$$Ch = 480$$

El deudor se compromete a realizar diez pagos iguales y mensuales de $480 cada uno para cancelar la deuda al acreedor y satisfacer sus intereses.

Para comprender mejor las características de este sistema, resulta conveniente volcar su evolución a un cuadro de marcha y sobre el este realizar algunas aclaraciones:

Orden	Vn	Ch	Th	Ih
0	4000	---	---	---
1	3600	480	400	80
2	3200	480	400	80
3	2800	480	400	80
4	2400	480	400	80
5	2000	480	400	80
6	1600	480	400	80
7	1200	480	400	80
8	800	480	400	80
9	400	480	400	80
10	----	480	400	80
			4000	800

Para confeccionar dicho cuadro, establecimos diversas columnas, de modo que la primera de ellas nos indica el orden o momento en que se encuentra el préstamo, las siguientes corresponden al saldo de deuda que se verifica a cada momento, la cuota de servicio, la amortización y los intereses.

En el instante cero se recibe el préstamo y no se produce devolución alguna por parte del deudor, luego, al cumplirse el vencimiento de la primera cuota, abona $480 por todo concepto. Nótese que resulta correcto que el deudor abone $80 en concepto de intereses en función que pudo disponer de la totalidad del crédito otorgado por el acreedor ($4.000), pero ¿qué ocurre cuando el deudor cancela su primera cuota? Recordemos que con ella ha tenido que amortizar $400 como se observa en la cuarta columna y que su saldo de deuda pasó a ser de $3.600. Esto da lugar a detenernos en el costo financiero que incurre el deudor al momento de cancelar la segunda cuota, recordemos que continuará abonando $80 en concepto de intereses al acreedor a lo largo de cada cuota hasta concluir con su obligación.

Tengamos en cuenta que la tasa resultó del 0,02 y esto ya resulta injusto a los intereses del deudor si pensamos que su actual deuda es de solo \$3.600. Este hecho se intensifica a medida que se avanza en el desarrollo del sistema, y resulta su punto culminante al momento de cancelarse la última cuota; en ese instante, el deudor solo debe restituir al acreedor \$400 que corresponde al saldo de deuda luego de abonada la cuota nueve de nuestro ejemplo, ya que el deudor abonó 9x400 hasta ese momento.

Si relacionamos el interés que se abona con este último importe, concluiremos que la tasa genuina que corresponde a ese periodo se eleva al 20 % (0,20 medida en términos unitarios): 80/400=0,20i

Por último, cabe desarrollar la fórmula que nos permita reconocer el costo financiero total de la operación, también llamado total de intereses:

$$TI = V_o \times i \times n$$

Para nuestro ejemplo, TI=4000x0,02x10, es decir \$800.

b) SISTEMA SOBRE SALDOS

Aquí debemos detenernos con especial interés sobre estos sistemas y sus particularidades. En todos los casos, se opera en régimen compuesto y el deudor abona intereses en función del capital adeudado.

Si este disminuye por efecto de la amortización, el acreedor reconoce la disminución y solo percibe intereses en concordancia con el capital efectivamente cedido, de ahí su título. No obstante, uno de ellos, el americano, resulta un "híbrido" entre el sistema de intereses directos y aquellos sobre saldos, hasta podríamos reconocer que opera en régimen simple, por lo que lo esbozaremos en sus particularidades.

Dentro de estos sistemas, en este trabajo distinguimos cinco, de los cuales tres de ellos resultan ser los más empleados en la actividad financiera, sin perjuicio del resto que cumplen eficazmente con la premisa de calcularse sobre saldos, asimismo, incorporamos otro sistema presentado por el autor, en las XXX Jornadas de Matemática Financiera de San Miguel de Tucumán, a saber:

b.1) Sistema americano

b.2) Sistema alemán

b.3) Sistema francés

b.4) Sistema progresivo

b.5) Sistema de cuotas constantes con intereses promediados y cargados al préstamo

b.6) Sistema áureo

b.1) Sistema americano

En este sistema, el deudor restituye al acreedor la suma recibida inicialmente en un solo acto, en forma total, conjuntamente con el último desembolso. Periódicamente, se compromete a abonar intereses y puesto que el capital inicial (Vo) no experimenta disminuciones parciales, lógicamente el costo financiero para el deudor será calculado como en el sistema de intereses directos, esto es V_0xi:

$$Ih(am) = Ch(am) = V_o \times i$$

No obstante, recordemos que el deudor realiza la restitución del capital inicial junto con la cuota (cuota de interés) "n", es decir, la última de la serie, por lo que previamente, desde la cuota n.º 1 a la cuota "n-1" se aplica la precedente fórmula, y se reserva para la última la incorporación de V:

$$Ch_n(am) = V_o \times i + V_o$$

$$Ch_n(am) = V_o \times (1 + i)$$

Siguiendo el mismo ejemplo de deuda anterior, para un capital de $4.000 a devolverse en diez cuotas mensuales valuado al 2 % mensual, el cuadro de marcha para este sistema quedará confeccionado de la siguiente forma:

Orden	Vn	Ch	Th	Ih
0	4000	---	---	---
1	4000	80		80
2	4000	80		80
3	4000	80		80
4	4000	80		80
5	4000	80		80
6	4000	80		80
7	4000	80		80
8	4000	80		80
9	4000	80		80
10	----	4080	4000	80
			4000	800

Si se observa el total de la última columna, notamos que el total de intereses acumulados coincide con el costo financiero total para el sistema de intereses directos, la diferencia sustancial radica en que, mientras en el anterior el deudor cancelaba progresivamente su deuda, aquí el deudor dispone del capital prestado originalmente, sin devoluciones hasta el momento de concluir la operación, por lo que resulta equitativo para ambas partes.

La sumatoria de intereses se calcula de igual modo que para los intereses directos:

$$TI = V_o \times i \times n$$

Nota: la importante suma monetaria que representa el desembolso final motivado por la restitución completa de la deuda original lleva en algunos casos a la creación de un fondo voluntario de ahorro periódico de la forma conocida como anualidad o imposición, denominada cuota facultativa o sinking fund. De este modo, se logra atemperar el impacto que representa el desembolso completo del capital prestado.

Para atender a este ahorro voluntario, el deudor podrá organizar una serie de pagos periódicos, a modo de una imposición para afrontar el momento del desembolso extraordinario final, ya sea en forma total o parcial (en este caso, se mitiga el impacto financiero). Se debe, asimismo, tener en consideración que la tasa pactada a lo largo de este ahorro no necesariamente resulta ser igual a la tasa del préstamo y tampoco es habitual que se pacte con el propio acreedor.

Para el cálculo de esta cuota, recurrimos a lo estudiado oportunamente como valor final de rentas de donde proviene su fórmula. El lector ya se encuentra en condiciones de verificar la fórmula más adecuada, acorde a las características contractuales particulares, no obstante, aquí recordaremos aquella renta temporal y de pagos vencidos que permite reconocer una cuota facultativa, creada para satisfacer la constitución de un valor final:

$$C_{facultativa} = \frac{V_0 \times i}{(1+i)^n - 1}$$

b.2) Sistema alemán

Sus características particulares se sustentan en cuotas de capital constantes (todas del mismo valor) calculadas como se describiera en el método de intereses directos, es decir, fraccionando la deuda original por sus n cantidad de cuotas en que se amortiza el capital, de donde:

$$th(al) = \frac{V_o}{n}$$

Para nuestro ejemplo inicial, th= 4000/10, es decir th=400

Cabe aclarar la íntima relación que existe entre este sistema y la progresión aritmética decreciente, es así que tanto la sucesión de cuotas de servicio (Ch) como la sucesión de cuotas de interés (Ih) representan en sí mismas progresiones de esta naturaleza.

Sin entrar a considerar las fórmulas que generan este tipo de progresiones, vemos su aplicación a este sistema en algunas relaciones interesantes a tener en cuenta, al ser que:

Cuota de capital:

$$th(al) = \frac{r}{i}$$

Total de intereses:

$$TI(al) = (I_1 + I_n) \times \frac{n}{2}$$

Primera cuota de interés:

$$I_1 = n \times r$$

Última cuota de interés:

$$I_n = r$$

Total de intereses:

$$TI(al) = (n \times r + r) \times \frac{n}{2}$$

$$TI(al) \times 2 = n^2 \times r + n \times r$$

$$\frac{TI(al) \times 2}{r} = n^2 + n$$

Resulta útil esta última expresión al momento de contar con datos sobre el total de intereses y la razón de decrecimiento de la progresión, dado que podemos obtener los valores de los n términos del sistema al aplicar los criterios de resolución de una ecuación cuadrática, del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde:

$$n^2 + n - \frac{TI(al) \times 2}{r} = 0$$

En lo que respecta a los intereses, en primer lugar, son calculados sobre saldos (concepto que ya fuera explicado) y estos decrecen en forma constante con cada cuota abonada a modo de una progresión aritmética decreciente, dado que la amortización de la deuda original disminuye de modo constante y progresivo, también lo hace el interés, esto da lugar a considerar que “todas” las cuotas de servicio resultarán distintas para este sistema:

$$Ch(al) = th(al) + Ih$$

Para reconocer el importe que habrá de pagarse en cada instante, debemos previamente saber cuál es el capital que le da origen y en este sistema resulta muy simple, dado que basta con saber cuántas cuotas de capital restan por pagarse en algún momento inmediato al pago de alguna cuota para distinguir el interés monetario (Ih) que habrá de pagarse en la siguiente cuota. Si a este último valor le incorporamos el valor de th, sabremos cuál es el valor de Ch.

Siendo que en nuestro ejemplo original se desea conocer el valor de la cuota de orden n.º 8, con los datos correspondientes calcularemos el saldo de deuda a ese momento:

Nos preguntamos, ¿cuántas cuotas restan cancelar si sobre un total de diez hemos cancelado siete? La respuesta es simple: **tres**. Luego, multiplicamos este número por el valor de cualquier th (no olvidemos que son todos iguales), es decir, 3x400=1200. En ese momento, reconocemos que el deudor canceló $2.800 al abonar puntualmente hasta la cuota n.º 7 (puesto que 7x400=2800), consecuentemente, está debiendo aún $1.200 de capital. Una vez que tenemos este importe, solo queda multiplicarlo por el valor de la tasa:0,02, entonces:

$$I_8 = 1200 \times 0{,}02$$
$$I_8 = \$24$$

Adicionando $400 correspondientes a cualquier th, tendremos que:

$$C_8 = 400 + 24$$
$$C_8 = 424$$

Una vez desarrollado el cuadro de marcha para este sistema, podremos comprobar la veracidad de nuestros cálculos:

Orden	Vn	Ch	Th	Ih
0	4000	---	---	---
1	3600	480	400	80
2	3200	472	400	72
3	2800	464	400	64
4	2400	456	400	56
5	2000	448	400	48
6	1600	440	400	40
7	1200	432	400	32
8	800	**424**	400	**24**
9	400	416	400	16
10	----	408	400	8
		4440	4000	440

Podemos observar que los datos obtenidos analíticamente concuerdan con los datos devueltos en el cuadro de marcha para la cuota de orden n.º 8, donde Ch=424 e Ih=24.

Dado que la disminución en la carga de intereses decrece como se indicara precedentemente en forma de una progresión aritmética, la fórmula que nos permite conocer el costo financiero total deriva de ella, al ser que:

$$TI(al) = \frac{V_o \times i}{2} \times (n+1)$$

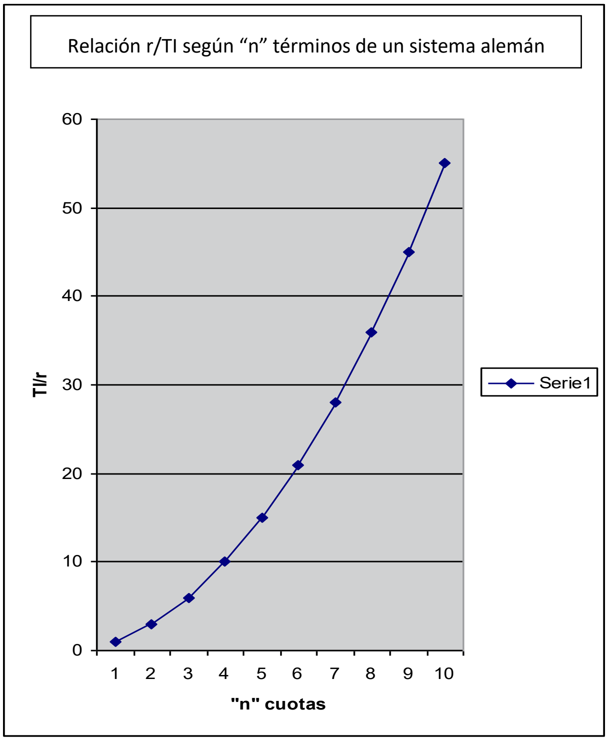
Reemplazando en ella, obtendremos el valor indicado al pie de la columna Ih (intereses):

$$TI = \frac{4000 \times 0{,}02}{2} \times (10+1)$$
$$TI = \$440$$

La tabla que se expone a continuación, permite relacionar los valores de "r" (razón de decrecimiento aritmético y lineal de los intereses de un sistema alemán) y sus correspondientes TI (totales de intereses) en función de la cantidad de cuotas que componen el sistema.

La columna VI marca una progresión lineal según evolución de los "n" términos, fácil de calcular; nótese que la columna V arrastra el acumulado en una serie perfectamente predecible en el tiempo y refleja la relación establecida en las columnas II y III; dicha sucesión se verifica como una parábola que se grafica en el eje de coordenadas desarrollado posteriormente.

I	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI=II/IV*
Valor de "r"	**TI/r (V $\times$ IV)**	**TI (I $\times$ II)**	**Términos "h"**	**Acumulado** $\frac{h^2+h}{2}$	**Progresión** $\frac{h+1}{2}$
r	1	r	1	(1+0)	1
r	3	3r	2	(2+1)	1,5
r	6	6r	3	(3+3)	2
r	10	10 r	4	(4+6)	2,5
r	15	15 r	5	(5+10)	3
r	21	21 r	6	(6+15)	3,5
r	28	28 r	7	(7+21)	4
r	36	36 r	8	(8+28)	4,5
r	45	45 r	9	(9+36)	5
r	55	55 r	10	(10+45)	5,5
r	66	66 r	11	(11+55)	6
r	78	78 r	12	(12+66)	6,5



b.3) Sistema francés

Para este modelo, probablemente el más reconocido, las cuotas de servicio (desembolso periódico total) resultan iguales, pero mientras el desarrollo de las sucesivas cuotas de interés decrece por tratarse de un sistema sobre saldos donde el acreedor reconoce las amortizaciones periódicas que efectúa el deudor, estas últimas cancelaciones de capital se incrementan gradualmente en la cuantía de las disminuciones de los intereses.

Para abordar el cálculo de la cuota (de servicio) de este sistema, partimos de la fórmula para determinar el valor actual de una renta:

$$V_{n\rangle}i = \frac{C}{i} \times \left[1 - (1+i)^{-n}\right]$$

$$despejando\ C$$

$$C = \frac{V_0 \times i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

En el siguiente cuadro de marcha, vemos la evolución del préstamo de $4.000 valuado al 2 % mensual.
Será cancelado en diez cuotas (de servicio constante), podemos apreciar el valor de las cuotas de capital, cuotas de interés y cuotas de servicio, así como también la evolución del saldo de deuda cada vez que se cancelan las cuotas:

Orden	Vn	Ch	Th	Ih
0	4000	---	---	---
1	3634,7	445,3	365,3	80
2	3262,1	445,3	372,6	72,7
3	2882	445,3	380,1	65,2
4	2494,3	445,3	387,7	57,6
5	2098,9	445,3	395,4	49,9
6	1695,6	445,3	403,3	42
7	1284,2	445,3	411,4	33,9
8	864,6	445,3	419,6	25,7
9	436,5	445,3	428	17,3
10	0	445,3	436,6	8,7
		4453,1	4000	453,1

Con el cuadro a la vista, podemos extraer algunas conclusiones:

1- Mientras las sucesivas cuotas de interés disminuyen (por tratarse de un sistema sobre saldos), el "espacio que ceden" los intereses es "ocupado" por el capital, de este modo se mantiene constante el desembolso periódico (cuota de servicio).
2- La primer cuota de interés ($80) coincide en su importe con el resto de los sistemas vistos hasta aquí, cuando se trata de evaluar las mismas condiciones crediticias en forma comparativa.
3- Para reconocer fácilmente la cuota de capital siguiente, bastará con multiplicar la precedente por un factor (1+i), por ejemplo, para conocer el valor de t2 basta con conocer t1 y multiplicarlo por 1,02, asimismo, por tratarse de un régimen compuesto, conocido t1 podremos conocer t3 multiplicando al primero por $(1+i)^2$ y así sucesivamente en forma ascendente o descendente, por lo que arribamos al valor de t5 si conocemos t9, al dividir a este último por 1,02.
4- La relación que existe entre la cuota de servicio (C_h) y la primera cuota de amortización (t_1) es la misma que hallamos al determinar el monto compuesto (C_n) a partir del capital original (C_0):

$$C_0 \underline{\hspace{3cm}} C_n$$
$$t_1 \underline{\hspace{3cm}} C_h$$

Siendo: $C_h = t_1 \times (1+i)^n$

En nuestro ejemplo: $445{,}30 = 365{,}30 \times (1{,}02)^{10}$

b.4) Sistema progresivo

Este sistema se relaciona estrechamente con el concepto de progresiones aritméticas, tanto o más que el propio sistema alemán. Su particularidad radica en que el capital amortizado crece en tanto disminuye cada cuota de interés (tal como ocurre con el sistema francés, pero a distinto ritmo); el deudor comienza abonando pequeñas sumas en concepto de capital para ir incrementándose a lo largo de la evolución de las cuotas. Una vez expuestas las fórmulas particulares para este sistema, procederemos a la explicación de la conformación de su cuadro de marcha.

Cuotas de amortización:

$$t_1 = V_0 \times f_1$$

$$t_h = h \times t_1 \qquad t_1 = \frac{V_0 \times f_h}{h}$$

$$t_h = V_0 \times f_h \qquad t_1 = \frac{2 \times V_0}{n^2 + n}$$

Donde:

$$f_1 = \frac{1}{\frac{(1+n)\times n}{2}} \qquad f_h = h \times f_1$$

Cuotas de interés:

$$I_h = \left[\frac{(1+n)\times n}{2} - \frac{h}{2}\times(h-1)\right]\times i \times t_1$$

$$I_1 = V_0 \times i \qquad I_h = \frac{V_0 \times i}{n^2 + n}\times\left(n^2 + n - h^2 + h\right)$$

$$I_h = V_0 \times i \times \left(1 - \frac{h^2 - h}{n^2 + n}\right)$$

Valor actual: $$V_0 = \frac{t_1 + t_n}{2} \times n$$

Saldo de deuda: $$S.D = \left[\frac{n^2 + n}{2} - \frac{h^2 + h}{2} \right] \times t_1$$

Reemplazando en t_1 por su igualdad:

$$S.D. = \left[\frac{n^2 + n - h^2 - h}{\cancel{2}} \right] \times V_0 \times \frac{\cancel{2}}{n^2 + n}$$

Finalmente:

$$S.Deuda = V_0 \times \left(1 - \frac{h^2 + h}{n^2 + n} \right)$$

Total de intereses: $$TI = V_0 \times i \times \left(1 + \frac{n - 1}{1{,}5} \right)$$

Contando con las variables adecuadas, calculamos el valor del factor de evolución del proceso de amortización (f_1) relacionado a la evolución de una progresión aritmética. Para el ejemplo que venimos desarrollando, con un capital original de $4.000, tasa periódica del 2 % y diez pagos, resolvemos el valor de f_1:

$$f_1 = \frac{1}{\frac{(1 + 10) \times 10}{2}}$$

$$f_1 = 0{,}0181818$$

Una vez disponible el valor de f_1, podemos proyectar para cada periodo su propio factor al multiplicar f_1 por el orden correspondiente (h), es así que el 2.do factor resultará de multiplicar $f_1x2=0{,}0363636$, el 3.er factor será $f_1x3=0{,}0545455$ y así sucesivamente. Luego, a partir de f_1, establecemos el valor de t_1, siendo $t_1=V_0xf_1$, tenemos que $t_1=4000x0{,}0181818$, siendo $t_1=72{,}73$ según nuestro ejemplo.

A partir de entonces, podrán calcularse los sucesivos valores de t, ya sea multiplicando V_0 (como constante) por el propio factor correspondiente al orden "h", o bien, multiplicando a t_1 por el valor "h" correspondiente (ya que su crecimiento es lineal y constante).

En lo que respecta a la evolución de los intereses (decrecientes), estos serán calculados a partir del saldo de deuda una vez cancelada la cuota de amortización previa, al interés de orden "h" que se desea conocer. A efecto de calcular analíticamente el total de intereses, utilizamos la fórmula ya descripta, donde:

$$TI = V_0 \times i \times \left(1 + \frac{n-1}{1{,}5}\right)$$

$$TI = 4000 \times 0{,}02 \times \left(1 + \frac{10-1}{1{,}5}\right)$$

$$TI = \$560$$

Orden	Vn	Ch	Th	Ih	Factor
0	4000	---	---	---	
1	3927,27	152,73	72,73	80	*0,0181818*
2	3781,82	224,00	145,45	78,55	*0,0363636*
3	3563,64	293,82	218,18	75,64	*0,0545455*
4	3272,73	362,18	290,91	71,27	*0,0727273*
5	2909,09	429,09	363,64	65,45	*0,0909091*
6	2472,73	494,55	436,36	58,18	*0,1090909*
7	1963,64	558,55	509,09	49,45	*0,1272727*
8	1381,82	621,09	581,82	39,27	*0,1454545*
9	727,27	682,18	654,55	27,64	*0,1636364*
10	0,00	741,82	727,27	14,55	*0,1818182*
		4560,00	4000	560	*1*

Como observación, podemos notar que representa un sistema que genera un gran desembolso en concepto de intereses, no lo consideramos más oneroso que el resto de los sistemas sobre saldos (a excepción del americano), dado que el deudor utiliza el capital ajeno durante más tiempo que en los sistemas alemán y francés a modo de ejemplo, hecho que incluso genera beneficios adicionales como el "apalancamiento" o efecto Leverage que será comentado más adelante.

b.5) Sistema de cuotas constantes con intereses promediados y cargados al préstamo

Posee alguna similitud con el sistema alemán en cuanto al valor de sus cuotas amortizadas en forma constante, y aunque al igual que en el sistema de intereses directos las cuotas de interés son todas iguales entre sí (también constantes), este sistema se calcula sobre saldos. Sus fórmulas relevantes se describen a continuación.

Cuota de amortización del capital:

$$t_h = \frac{V_0}{n}$$

Cuota de interés:

$$I_h = \frac{V_0 \times i}{2 \times n} \times (n+1)$$

Total de intereses:

$$TI = n \times I_h$$

$$TI = \frac{V_0 \times i \times \cancel{n}}{2 \times \cancel{n}} \times (n+1)$$

$$TI = \frac{V_0 \times i}{2} \times (n+1)$$

Tasa de interés de periodo "h":

$$i_h = \frac{I_h}{V_{n-h+1}}$$

El ejercicio anteriormente detallado, con una deuda de \$4.000 valuada al 2 % efectivo y periódico, para ser cancelada en diez cuotas periódicas será desarrollado a modo de ejemplo para esta modalidad en el próximo gráfico:

Orden	Tasa(i_h)	Vn-h	Ch	Th	Ih
0		4000	---	---	---
1	0,011000	3600	440	400	44
2	0,012222	3200	440	400	44
3	0,013750	2800	440	400	44
4	0,015714	2400	440	400	44
5	0,018333	2000	440-	400	44
6	0,022000	1600	440	400	44
7	0,027500	1200	440	400	44
8	0,036667	800	440	400	44
9	0,055000	400	440	400	44
10	0,110000	----	440	400	44
			4440	4000	440

Para comprender este sistema en particular y elaborar correctamente el cuadro de marcha, se puede iniciar con el cálculo de la cuota constante de interés:

$$I_h = \frac{4000 \times 0,02}{2 \times 10} \times (10+1)$$

$$I_h = 44$$

Resta completar la columna del capital amortizado, sumando cuota a cuota cada periodo (serán todos iguales) y cargar la columna de la cuota de servicio C_h; el saldo de deuda se deberá completar al descontar en cada periodo el importe constante amortizado ($400 en nuestro ejemplo). Lleva especial mención la columna dedicada a visualizar la tasa de interés efectivamente cargada a cada periodo que comienza siendo inferior a la tasa pactada y luego se incrementa paulatinamente hasta superarla ampliamente en el último tramo; esto beneficia a aquel deudor que decidiera realizar una cancelación anticipada en una etapa temprana del periodo de endeudamiento, dado que obtendría una ventaja considerable frente al acreedor, hecho que generalmente no se encuentra contemplado en los contratos así pactados, dado que la balanza resultaría desfavorable a este último e iría en detrimento del principio de equidad o equilibrio financiero de las partes, tanto es así que al observar el total de intereses abonados una vez concluido el préstamo resulta igual al total de intereses que un deudor abonaría contratando la misma deuda por sistema alemán (incluso las fórmulas que permiten su cálculo resultan idénticas).

b.6) Sistema áureo

Se trata de un sistema cancelatorio de deudas basado en la tradicional amortización de capital y carga de intereses sobre saldos para ser aplicado a las transacciones financieras, vinculado a la reconocida serie de Fibonacci o serie "áurea" (de allí su denominación).

Bajo las condiciones de este sistema de amortización basado en la reconocida serie de Fibonacci se resuelve parte de la deuda en el tramo comprendido entre las cuotas de orden 1 a $n-1$, para luego liquidarse por completo en el periodo n como relación=$1-\frac{1}{\phi}$ de la deuda original, de forma de preservar la "armonía dorada".

<u>Sus variables</u>

El deudor que contrata un crédito bajo estas condiciones estaría abonando capital durante los n-1 términos iniciales, por un total de $\frac{V_0}{(n-1)\times\phi}$, y debe desembolsar en el periodo n $V_0 \times\left(1-\frac{1}{\phi}\right)$ como capital residual.

En todo momento, el acreedor recibe con cada cuota de servicio (esto es $t_h = \frac{V_0}{(n-1)\times\phi}$) los intereses correspondientes al saldo previo de deuda como ocurre en cualquier otro sistema sobre saldos.

Como detalle particular, este sistema mantiene el residuo de capital impago ($V_0 \times \left(1 - \frac{1}{\phi}\right)$) luego de cancelada la cuota n-1, por lo que en todo sistema de estas características deberá cancelarse el saldo en el periodo n, así se verá satisfecha la restitución del capital original hacia el acreedor.
Durante el plazo 1 a $n-1$, el deudor amortizará el capital original como ya fuera expuesto, es decir:

$$t_h = \frac{V_0}{(n-1) \times \phi}$$

Siendo:

$$t_n = V_0 \times \left(1 - \frac{1}{\phi}\right)$$

Para reconocer el saldo de deuda, convenimos que:

$$S - Deuda = V_0 - h \times \frac{V_0}{(n-1) \times \phi}$$

Aquí se pude observar que se deduce de la deuda original, tanto las cuotas posteriores impagas (primer término del corchete), así como el capital residual a extinguirse en el periodo n+1, de donde finalmente:

$$S - Deuda = V_0 \left[1 - \frac{h}{(n-1) \times \phi}\right]$$

$$\boxed{para : h < n}$$

Como ocurre en la mayoría de los sistemas de amortización sobre saldos (no todos), el deudor abona intereses que aplican la tasa pactada al saldo de deuda inmediatamente anterior al del orden de la cuota que cancela:

$$I_1 = V_0 \times i$$
$$I_h = SD_{h-1} \times i$$

$$I_h = \frac{V_0 \times i}{\phi} \times \left[\left(\frac{n - \cancel{1} - h + \cancel{1}}{n-1} - 1 \right) + \frac{1}{\phi} \right]$$

$$I_h = \frac{V_0 \times i}{\phi} \times \left(\frac{n-h}{n-1} + \frac{1}{\phi} \right)$$

Finalmente, aplicando el concepto de progresiones aritméticas, el total de intereses surge de la siguiente expresión:

$$TI^{Aureo} = \frac{V_0 \times i - V_0 \times i \times \left(1 - \frac{1}{\phi} \right)}{2} \times \left(n - \cancel{1} + \cancel{1} \right)$$

$$TI^{Aureo} = V_0 \times i \times \left(\cancel{1} - \cancel{1} - \frac{1}{\phi} \right) \times (n)$$

$$TI^{Aureo} = \frac{V_0 \times i \times n}{2} \times \left(2 - \frac{1}{\phi} \right)$$

A partir del ejercicio modelo, podemos calcular sus variables:

$$t_h = \frac{V_0}{(n-1)\times\phi} \qquad t_h = \frac{4000}{(10-1)\times 1{,}6180334}$$

$$t_h = \$274{,}68$$

$$t_n = V_0 \times \left(1 - \frac{1}{\phi}\right) \qquad t_n = 4000 \times \left(1 - \frac{1}{1{,}6180334}\right)$$

$$t_n = \$1527{,}88$$

$$TI^{Aureo} = \frac{V_0 \times i \times n}{2} \times \left(2 - \frac{1}{\phi}\right)$$

$$TI^{Aureo} = \frac{4000 \times 0{,}02 \times 10}{2} \times \left(2 - \frac{1}{1{,}618034}\right)$$

$$TI^{Aureo} = \$552{,}79$$

Quedando así conformado el cuadro de marcha:

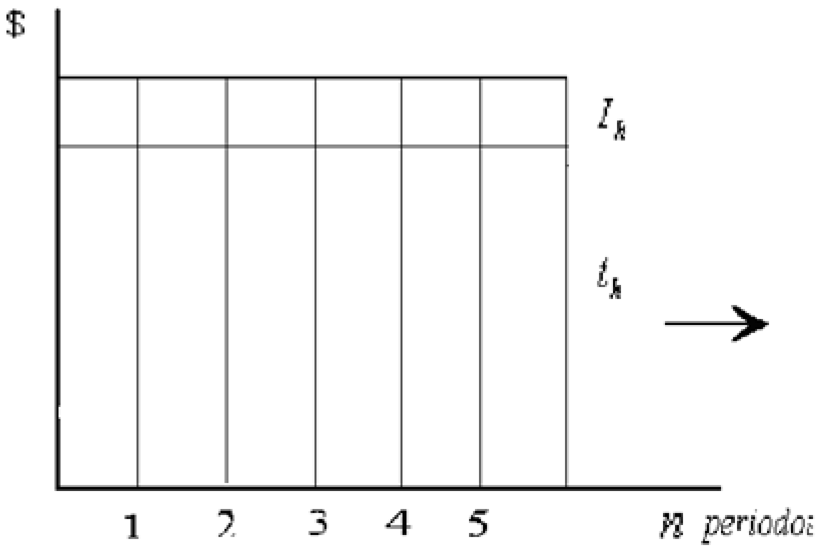
Orden	Vn	Ch	Th	Ih
0	4000,00	---	---	
1	3752,32	354,68	274,68	80,00
2	3450,64	349,19	274,68	74,51
3	3175,96	343,69	274,68	69,01
4	2901,28	338,20	274,68	63,52
5	2626,60	332,71	274,68	58,03
6	2351,92	327,21	274,68	52,53
7	2077,24	321,72	274,68	47,04
8	1802,56	316,22	274,68	41,54
9	1527,88	310,73	274,68	36,05
10	0	1558,44	1527,88	30,56
		4552,79	4000,00	552,79

Una vez estudiados estos sistemas en forma independiente, estamos en condiciones de observar el comportamiento comparativo de sus principales variables, es decir, sus cuotas de servicio C_h, sus cuotas de capital, t_h y sus cuotas de interés I_h, ya sea que en sus respectivas evoluciones presenten decrecimientos $(\downarrow)$, acrecentamientos $(\uparrow)$, permanezcan constantes (K) o bien, resulten nulos $(\emptyset)$ como podemos observar en la siguiente matriz:

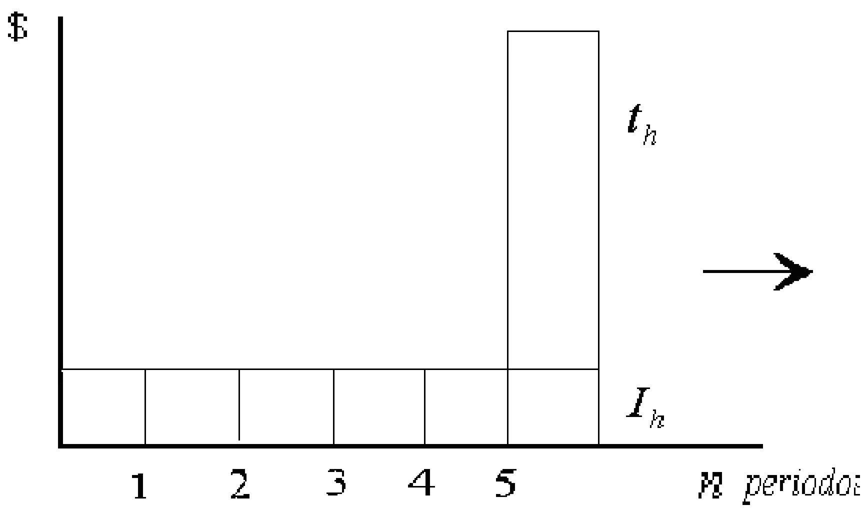
sistema\concepto	Ch	th	Ih
FRANCES	↓	K	↓
FRANCES	K	↑	↓
INT.PROMEDIADOS	K	K	K
PROGRESIVO	↑	↑	↓
AUREO	K	K	↓
AMERICANO	K	O	K
INT.DIRECTOS	K	K	K

Los gráficos que reflejan la evolución de cada sistema, se puede observar a continuación:

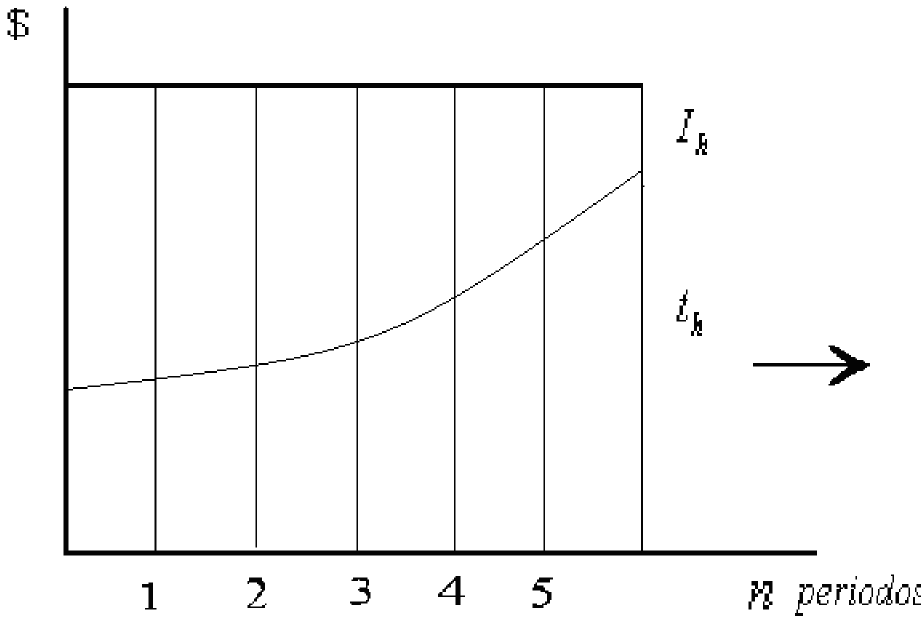
Sistema intereses directos



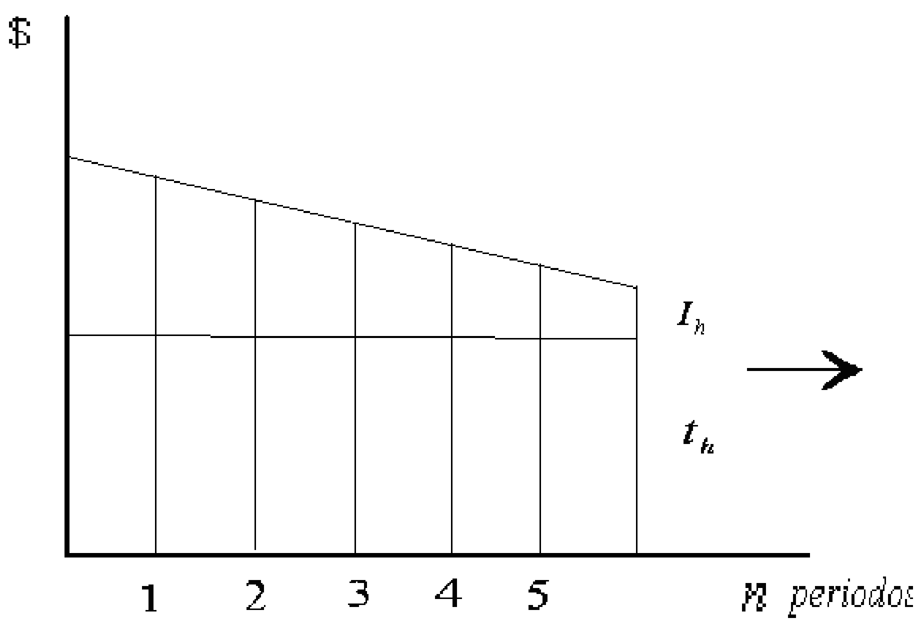
Sistema americano



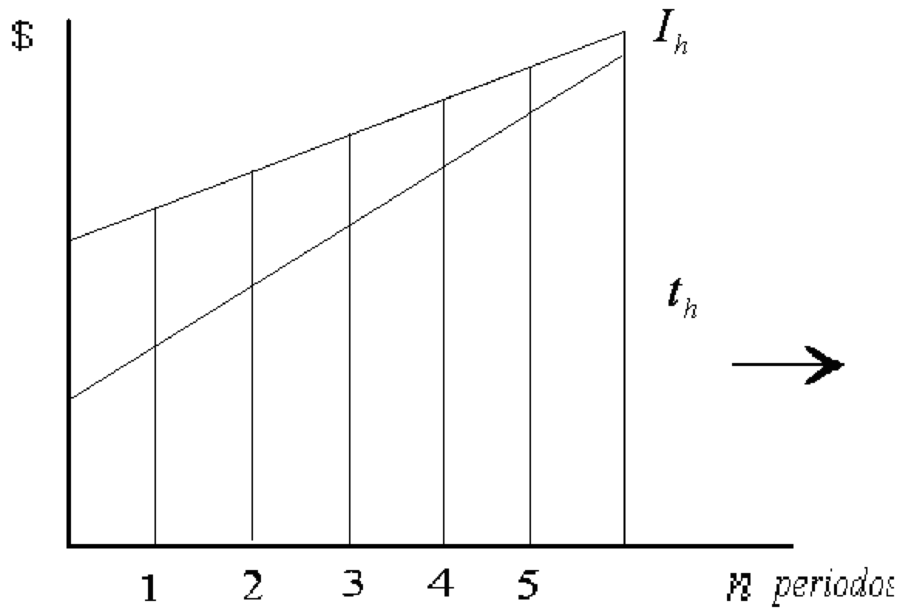
Sistema francés



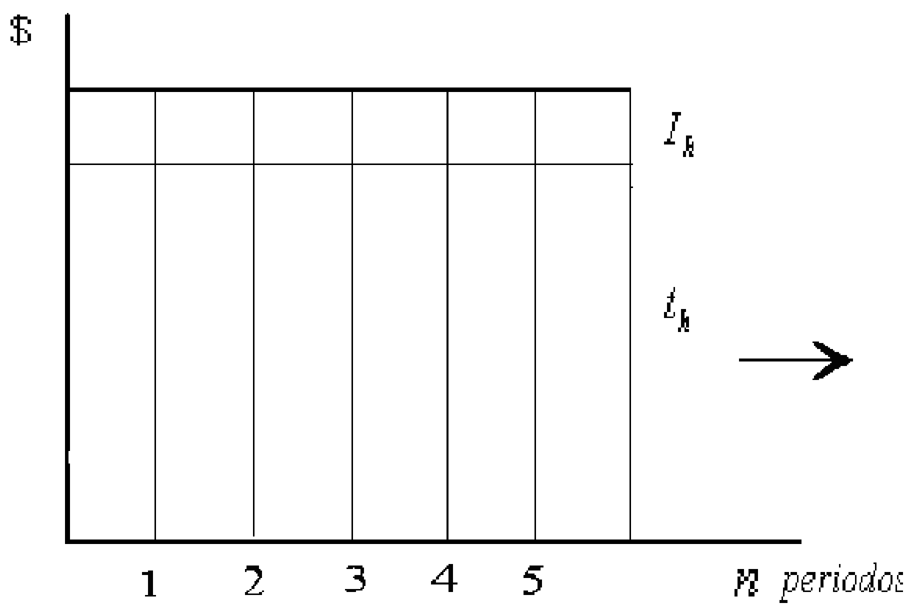
Sistema alemán



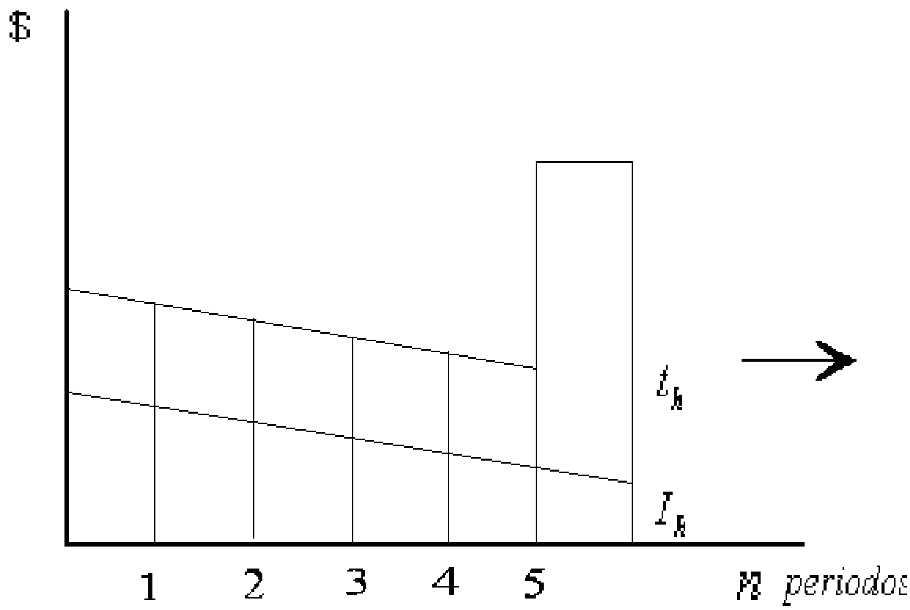
Sistema progresivo



Sistema interés promediado



Sistema áureo



Anexo:

Trabajo presentado en las XXX Jornadas Nacionales de Matemática Financiera (San Miguel de Tucumán, octubre de 2009).

SISTEMA DE AMORTIZACIÓN ÁUREO

BREVE DESCRIPCIÓN

Se trata de un sistema cancelatorio de deudas basado en la tradicional amortización de capital y carga de intereses sobre saldos para ser aplicado a las transacciones financieras, vinculado a la reconocida serie de Fibonacci o serie "áurea" (de allí su denominación).

La abundante bibliografía relacionada a esta famosa serie ha dado cuenta de innumerables aplicaciones en todos los ámbitos científicos, biológicos, arquitectónicos, artísticos, etc., por lo que consideré apropiado rendirle tributo como homenaje en el terreno de la matemática financiera.

El sistema cuenta con todas las variables necesarias para ser comprendido y analizado conceptualmente, con la posibilidad de elaborar un cuadro de marcha particular y reconocer en forma analítica cada una de estas variables mediante el empleo de un conjunto de fórmulas propias.

Esto permite reconocer el valor de cada cuota de capital, interés, y/o servicio (th, Ih y Ch, respectivamente), el total de intereses a pagar y el saldo de deuda, tal como ocurre en otros sistemas de amortización.

Asimismo, reúne todas las características de equilibrio financiero necesarias para transacciones donde ninguna de las partes (deudora o acreedora) se vea beneficiada en detrimento de su contraparte, es decir, como se comentara previamente, constituye un verdadero sistema sobre saldos en los cuales los deudores abonan solo el interés sobre el capital residual, es decir, sobre la deuda original a la que se le han deducido las amortizaciones periódicamente practicadas en orden a un método de cálculo.

VENTAJAS FINANCIERAS DEL SISTEMA

La posibilidad de su utilización como sistema crediticio se fundamenta en la holgura con que un deudor puede afrontar un crédito calculado por este método, sin perjudicar los genuinos intereses del acreedor, por lo que bien podría generar aplicaciones concretas y satisfacer tanto operaciones públicas como privadas.

A grandes rasgos, el deudor abona pequeñas cuotas de capital constante durante los n-1 periodos, cancela solo (en valores aproximados) el 60 % de la deuda y quedar suspendido el pago del 40 % restante para el periodo adicional, donde podría optar por tomar una nueva financiación en similares condiciones por este residuo pendiente, o bien cancelarlo definitivamente.

EJEMPLOS DE APLICACIÓN

<u>Caso A</u>

Existen en el mercado automotor planes ampliamente difundidos de cancelaciones parciales a través de los denominados "planes de ahorro", pero estos posponen la entrega del bien por algún tiempo o demandan una cierta suma de dinero para reunirse con el bien, a través de sorteos o licitaciones.

Si suponemos bajo estas condiciones la adquisición de un vehículo amortizable en cinco años, podemos inferir que conservando su bien desde el inicio de la operación el deudor estaría en condiciones de cancelar la deuda, liquidando su capital sin ningún inconveniente o al entregarlo al acreedor para obtener una nueva unidad (en parte, como ocurre con algunos contratos de *leasing*) al momento de extinguirse el plazo acordado.

Caso B

La adquisición de inmuebles con financiación bien podría ajustarse a las expectativas de este sistema, en tanto se abonan cuotas por un periodo determinado, al permanecer pendiente el saldo final hasta el momento de la firma de la escritura traslativa del dominio, calculado el residual, en relación a la proporción que determina la mecánica del propio sistema.

ANTECEDENTES MATEMÁTICOS: LA SERIE FIBONACCI

Sin entrar en particularidades de esta serie matemática universalmente reconocida, la secuencia:

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,\ldots\ldots\ldots$$

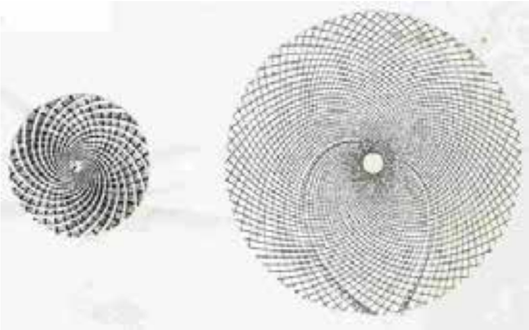
da cuenta de su existencia, al considerar que cada término se nutre de la sumatoria de sus dos valores precedentes inmediatos, así 1(más 0) como primer término da lugar al término de segundo orden, es decir 1, luego 2+1=3, 3+2=5, 5+3=8, etc.

La siguiente característica que deriva de esta serie es la relación que existe al dividir un cierto término por el valor que le precede; esta relación se aproxima a un número que tiende a infinito (tal como ocurre con $\pi = 3{,}141592654\ldots\ldots.$).
Siendo
$1/1 = 1; 2/1 = 0{,}5; 3/2 = 1{,}5; 5/3 = 1{,}\widehat{6}; 8/5 = 1{,}6; 13/8 = 1{,}625; 21/13 = 1{,}6153846; 34/21 = 1{,}6190476\ldots.$

A medida que avanzamos en la serie, dicho número se hace evidente en esta relación. El número en cuestión se denomina $\phi(Phi = 1{,}618033989\ldots)$ reconocido en el mundo de las matemáticas por sus particularidades distintivas.

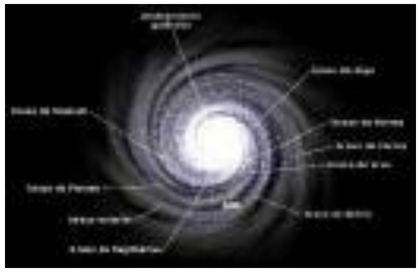
Dicho número que se obtiene de la siguiente expresión: $\phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, tiene algunas cualidades intrigantes, como por ejemplo, al calcular su inversa obtenemos como resultado $\phi - 1$, siendo que $\dfrac{1}{\phi} = \dfrac{2}{\sqrt{5}+1} = \phi - 1 = 0{,}618033989\ldots..$ también, si lo elevamos al cuadrado y le restamos 1, volvemos a obtener el mismo número: $\phi^2 - 1 = \left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 = \phi$

El Triángulo de Pascal contiene esta secuencia y en muchas otras relaciones puede verificarse la serie en el ámbito de las matemáticas.
Esta misma serie se encuentra también presente en muy diversos estados de la naturaleza, por ejemplo, las semillas de margarita (fig. izq.) y las del girasol (fig. der.) indican dos números contiguos Fibonacci (21-34 y 55-89 respectivamente) que permiten representar la conocida **espiral logarítmica** que proviene de esta serie.

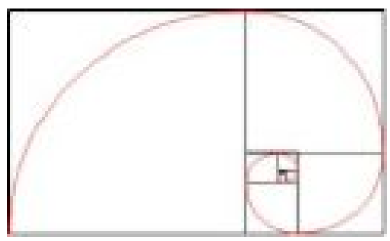


El caparazón del molusco conocido como nautilus, como puede observarse a continuación, mantiene la misma relación.

El escurrimiento del agua en movimiento, como observamos frecuentemente al dejar correr el grifo del lavatorio es un ejemplo cotidiano de dicha representación. Por último, y para no hacer inagotable la lista, la imagen siguiente representa la Vía Láctea que ¿nueva casualidad? responde al patrón de la relación áurea.



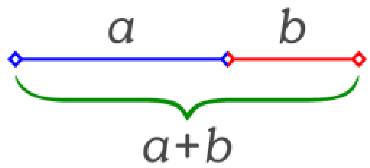
Estas relaciones permiten resolver el problema de establecer qué proporciones son necesarias para elaborar *ad infinitum* rectángulos proporcionados contenidos uno dentro del otro, entre los cuales se verifique que el lado menor del inmediato mayor resulte igual al lado mayor del rectángulo menor (aunque parezca un trabalenguas, vale observar las siguientes imágenes):

Podemos apreciar en la segunda figura que el trazo de ¼ de círculo en cada sector va conformando la espiral aludida, asigna progresivamente 0,61803399… $\left(\frac{1}{\phi}\right)$ al arco mayor y 0,381966… $\left(1-\frac{1}{\phi}\right)$ al arco menor, así quedará desarrollado.

En consecuencia, quedará representado un cuadrado de proporción $\frac{1}{\phi}\times\frac{1}{\phi}$ cada vez que se resuelva un nuevo sector.

En la gráfica siguiente podemos observar las proporciones aludidas, al ser una SECCIÓN ÁUREA la división en dos de un segmento según proporciones dadas por el número áureo. La longitud total ***a+b*** es al segmento más largo ***a*** como ***a*** es al segmento más corto ***b.*** Para $a = \frac{1}{\phi}$ y $b = \frac{\phi - 1}{\phi}$, donde $a + b = 1$



Estas y otras tantas curiosidades, aplicaciones y estados de la naturaleza que reflejan la aparición de esta serie, y en particular este número ϕ, le han valido el nombre de "el número de Dios", "número de oro", "serie dorada" y otras tantas denominaciones de connotaciones divinas.

DESARROLLO DEL SISTEMA ÁUREO

Al haber el lector tomado contacto con los párrafos precedentes, estará en condiciones de estimar los alcances de este sistema de amortización basado en la serie ya descripta donde se resuelve la operación de forma que se cancela atomizadamente parte de la deuda en el tramo comprendido entre las cuotas de orden 1 a $n-1$, para luego liquidarse por completo en el periodo n, como relación=$1-\frac{1}{\phi}$ de la deuda original, de forma de preservar la "armonía dorada".

<u>Sus variables</u>

El deudor que contrata un crédito bajo estas condiciones estaría abonando capital durante los n-1 términos iniciales por un total de $\frac{V_0}{(n-1)\times\phi}$, y debería desembolsar en el periodo n $V_0\times\left(1-\frac{1}{\phi}\right)$ como capital residual.
En todo momento, el acreedor recibe con cada cuota de servicio (esto es $t_h=\frac{V_0}{(n-1)\times\phi}$) los intereses correspondientes al saldo previo de deuda como ocurre en tantos otros sistema sobre saldos.

Como detalle particular, este sistema mantiene el residuo de capital impago ($V_0\times\left(1-\frac{1}{\phi}\right)$) luego de cancelada la cuota n-1, por lo que en todo sistema de estas características deberá cancelarse el saldo en el periodo n, así se verá satisfecha la restitución del capital original hacia el acreedor.
Durante el plazo 1 a $n-1$, el deudor amortizará el capital original como ya fuera expuesto, es decir:

$$t_h = \frac{V_0}{(n-1)\times\phi}$$

Siendo:

$$t_n = V_0 \times \left(1 - \frac{1}{\phi}\right)$$

Para reconocer el saldo de deuda, convenimos que:

$$S - Deuda = V_0 - h \times \frac{V_0}{(n-1)\times\phi}$$

Aquí se pude observar que se deducen de la deuda original las cuotas de capital (t_1 a t_{n-1}), de donde finalmente:

$$S - Deuda = V_0 \left[1 - \frac{h}{(n-1)\times\phi}\right]$$

$$\boxed{para : h < n}$$

Como ocurre en la mayoría de los sistemas de amortización sobre saldos (no todos), el deudor abona intereses aplicando la tasa pactada al saldo de deuda inmediatamente anterior al orden de la cuota que cancela:

$$I_1 = V_0 \times i$$

$$I_h = SD_{h-1} \times i$$

$$I_h = \frac{V_0 \times i}{\phi} \times \left[\left(\frac{n - \cancel{1} - h + \cancel{1}}{n-1} - 1\right) + \frac{1}{\phi}\right]$$

$$I_h = \frac{V_0 \times i}{\phi} \times \left(\frac{n-h}{n-1} + \frac{1}{\phi} \right)$$

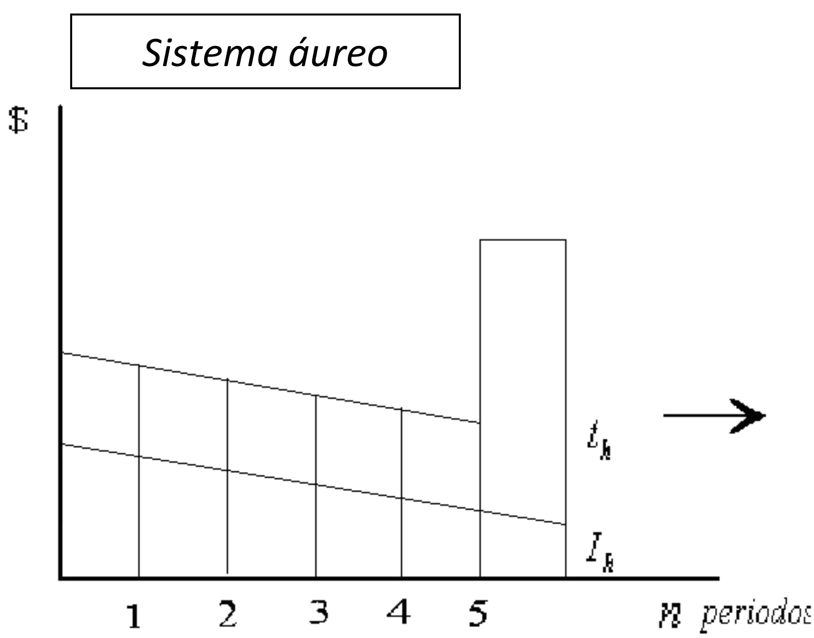
Finalmente, aplicando el concepto de progresiones aritméticas, el total de intereses surge de la siguiente expresión:

$$TI^{Aureo} = \frac{V_0 \times i + V_0 \times i \times \left(1 - \frac{1}{\phi}\right)}{2} \times n$$

$$TI^{Aureo} = \frac{V_0 \times i \times n \times \left(1 + 1 - \frac{1}{\phi}\right)}{2}$$

$$TI^{Aureo} = \frac{V_0 \times i \times n}{2} \times \left(2 - \frac{1}{\phi}\right)$$

Representación gráfica del sistema



CASO DE EJEMPLO

Se desea cancelar una deuda de $3.600 por sistema áureo, valuada al 2 % efectivo mensual, en 18 cuotas mensuales. Confeccionar el cuadro de marcha y resolver analíticamente el interés que se abona en la cuota ocho, el total de intereses y el saldo de deuda inmediatamente después de abonada la cuota de orden 12.

Solución:

Orden	Vni	ch	th	Ih	%	K
0	3600,00				0,02	0,618033989
1	3469,12	202,88	130,88	72,00	0,02	0,618033989
2	3338,24	200,26	130,88	69,38	0,02	0,618033989
3	3207,37	197,64	130,88	66,76	0,02	0,618033989
4	3076,49	195,03	130,88	64,15	0,02	0,618033989
5	2945,61	192,41	130,88	61,53	0,02	0,618033989
6	2814,73	189,79	130,88	58,91	0,02	0,618033989
7	2683,86	187,17	130,88	56,29	0,02	0,618033989
8	2552,98	184,55	130,88	53,68	0,02	0,618033989
9	2422,10	181,94	130,88	51,06	0,02	0,618033989
10	2291,22	179,32	130,88	48,44	0,02	0,618033989
11	2160,34	176,70	130,88	45,82	0,02	0,618033989
12	2029,47	174,08	130,88	43,21	0,02	0,618033989
13	1898,59	171,47	130,88	40,59	0,02	0,618033989
14	1767,71	168,85	130,88	37,97	0,02	0,618033989
15	1636,83	166,23	130,88	35,35	0,02	0,618033989
16	1505,96	163,61	130,88	32,74	0,02	0,618033989
17	1375,08	161,00	130,88	30,12	0,02	0,618033989
18	0,00	1402,58	1375,08	27,50	0,02	0,618033989
		4495,51	3600,00	895,51		

Para calcular la cuota de capital (periodos 1 a 17):

$$t_h = \frac{V_0}{(n-1)\times\phi}$$

$$t_h = \frac{3600}{(18-1)\times 1{,}618033989} \qquad t_h = \$130{,}88$$

Amortización del periodo n:

$$\mathrm{Re}sidual(n) = V_0 \times \left(1 - \frac{1}{\phi}\right)$$

$$\mathrm{Re}sidual(n) = 3600 \times 0{,}381966$$

$$\mathrm{Re}sidual(n) = \$1375{,}08.-$$

Para identificar la cuota de interés de orden ocho:

$$I_h = \frac{V_0 \times i}{\phi} \times \left(\frac{n-h}{n-1} + \frac{1}{\phi}\right)$$

$$I_8 = 3600 \times 0{,}02 \times \left(\frac{18-8}{18-1} + \frac{1}{1{,}618033989}\right)$$

$$I_8 = \$53{,}68$$

Para reconocer el total de intereses:

$$TI^{Aureo} = \frac{V_0 \times i \times n}{2} \times \left(2 - \frac{1}{\phi}\right)$$

$$TI^{Aureo} = \frac{3600 \times 0{,}02 \times 18}{2} \times (2 - 0{,}618033989)$$

$$TI^{Aureo} = \$895{,}51$$

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE SISTEMAS DE AMORTIZACIÓN

- Para cancelar una deuda de $12.000 se pacta abonar seis cuotas mensuales e iguales, al 4 % mensual directo. Calcular el importe de estas.

SOLUCIÓN:

Se trata de un sistema de intereses directos, donde:

$$C_h = t_h + I_h$$
$$C_h = \frac{V_0}{n} + V_0 \times i$$
$$C_h = \frac{12000}{6} + 12000 \times 0{,}04$$
$$C_h = \$2480$$

- Una cierta deuda se pacta cancelar por sistema de intereses directos en ocho cuotas mensuales e iguales de $3.000. Si la tasa de la operación resultó del 2 % mensual, calcular el importe de esa deuda y el total de intereses de la operación.

SOLUCIÓN:

$$C_h = V_0 \times \left(\frac{1}{n} + i \right)$$
$$V_0 = \frac{3000}{\left(\frac{1}{8} + 0{,}02 \right)}$$
$$V_0 = \$20689{,}66$$

$$TI = V_0 \times i \times n$$
$$TI = 20689{,}66 \times 0{,}02 \times 8$$
$$TI = 3310{,}34$$

- Una deuda de \$12.000 será cancelada mediante 48 cuotas iguales y mensuales por sistema cuota de servicio constante. La tasa de la operación se pactó en el 1,5 % efectivo mensual. Calcular el importe de dichas cuotas.

SOLUCIÓN:

$$C = \frac{V_0 \times i}{1-(1+i)^{-n}}$$
$$C = \frac{12000 \times 0{,}015}{1-1{,}015^{-48}}$$
$$C = \$352{,}50$$

- Para cancelar una cierta deuda, un prestamista propone abonar seis pagos iguales y mensuales de \$800, valuando la operatoria al 2,4 % mensual por sistema francés. Calcular el valor de la deuda original y confeccionar el cuadro de marcha.

SOLUCIÓN:

$$V = \frac{800}{0{,}024} \times \left(1-1{,}024^{-6}\right)$$
$$V = \$4421{,}28$$

Periodos	Vn>i	Ch	th	Ih
0	4421,28			
1	3727,39	800,00	693,89	106,11
2	3016,85	800,00	710,54	89,46
3	2289,25	800,00	727,60	72,40
4	1544,19	800,00	745,06	54,94
5	781,26	800,00	762,94	37,06
6	0	800,00	781,25	18,75
		4800,00	4421,27	378,73

- Un prestatario contrae una deuda de $9.000 a cancelarse en cinco pagos mensuales por sistema alemán, valuando la operación al 3 % mensual. Armar el correspondiente cuadro de marcha y definir el costo financiero de la operación.

SOLUCIÓN:

Periodos	Vn>i	Ch	th	Ih
0	9000,00			
1	7200,00	2070,00	1800,00	270,00
2	5400,00	2016,00	1800,00	216,00
3	3600,00	1962,00	1800,00	162,00
4	1800,00	1908,00	1800,00	108,00
5	0,00	1854,00	1800,00	54,00
		0,00	9000,00	810,00

Como puede observarse en el cuadro de marcha, en la última columna se totalizan los intereses abonados en esta ocasión, los que pueden calcularse analíticamente al emplear la fórmula ya explicada:

$$TI_{aleman} = \frac{9000 \times 0{,}03}{2} \times (5+1)$$

$$TI_{aleman} = \$810$$

- Sabiendo que la primera cuota de servicio de un total de diez pagos mensuales por sistema cuota capital constante fue de $1.300, calcular el valor de la deuda original, confeccionar el cuadro de marcha de las últimas cinco cuotas y calcular el total de intereses de la operación, si ella fue valuada al 3 % efectivo mensual.

SOLUCIÓN:

$$1300 = V_0 \times \left(\frac{1}{10} + 0{,}03 \right)$$

$$V_0 = \$10000$$

$$TI_{aleman} = \frac{10000 \times 0{,}03}{2} \times (10+1)$$

$$TI_{aleman} = \$1650$$

Periodos	Vn>i	Ch	th	Ih
5	5000	--	--	--
6	4000	1150	1000	150
7	3000	1120	1000	120
8	2000	1090	1000	90
9	1000	1060	1000	60
10	0	1030	1000	30

- Dada una cierta deuda, a cancelarse en siete cuotas por sistema cuota capital constante (sistema alemán), conociendo que se abonó un total de intereses equivalente al 16 % de la deuda original y la razón de decrecimiento de intereses resultará de $28 en cada ocasión, calcular el importe de dicho préstamo.

SOLUCIÓN:

Siendo:

$$TI = 0{,}16 \times V_0$$

$$\frac{V_0 \times i}{2}(n+1)$$

$$\frac{V_0}{2} \times i \times (7+1) = 0{,}16 \times V_0$$

$$i = 0{,}04$$

Si:

$$I_1 = V_0 \times i$$
$$I_1 = 0{,}04 \times V_0$$

$$I_7 = I_1 - 6 \times r$$
$$I_7 = I_1 - 6 \times 28$$
$$I_7 = I_1 - 168$$

$$TI = (I_1 + I_n) \times \frac{n}{2}$$

$$0{,}16 \times V_0 = (I_1 + I_1 - 168) \times \frac{7}{2}$$
$$0{,}16 \times V_0 = \left[2 \times \left(V_0 \times 0{,}04\right) - 168\right] \times 3{,}5$$

$$0{,}16 \times V_0 = 0{,}28 \times V_0 - 588$$
$$V_0 = \frac{588}{0{,}28 - 0{,}16}$$
$$V_0 = \frac{588}{0{,}12}$$
$$V_0 = 4900$$

- Sobre un préstamo por sistema alemán cancelable en siete cuotas mensuales se reconoce que la cuota de servicio n.º 2 ascendió a \$710 y los intereses a devengar posteriores a la cancelación de la cuota n.º 4 ascienden a \$210. Averiguar la deuda original.

SOLUCIÓN:

$$C_2 = th + 6th \times i$$
$$710 = th(1 + 6i) \quad (*)$$

En cuanto al total de intereses a devengar, desarrollamos la siguiente ecuación:

$$210 = 3th \times i + 2th \times i + th \times i$$

De donde:

$$\frac{210}{6} = th \times i \qquad \therefore th \times i = 35 ....th = \frac{35}{i} \qquad (**)$$

Despejando th de (*)

$$th = \frac{710}{1+6i} (***)$$

Igualando (**) y (***):

$$\frac{710}{1+6i} = \frac{35}{i}$$

$$710i = 35 + 210i$$

$$500i = 35$$

$$i = \frac{35}{500}$$

$$i = 0,07$$

Reemplazando en (*):

$$710 = th(1 + 6 \times 0,07)$$

$$th = \frac{710}{1,42}$$

$$th = 500$$

Siendo:

$$th = 500$$

$$entonces$$

$$V_0 = 7 \times th$$

$$V_0 = 3500$$

- Para cancelar una deuda con siete pagos constantes y mensuales, se conoce que los intereses a devengar luego de abonadas cuatro cuotas ascienden a $210, todo valuado al 7 % efectivo mensual. Calcular el importe de la deuda original.

SOLUCIÓN:

Para la solución, consideramos calcular el saldo de deuda resultante luego de abonar la 4.ª cuota, considerando los intereses a devengar como el total de intereses para ese tramo cancelatorio:

$$TI = n.C - V$$

$$210 = 3.C - V$$

$$C = \frac{V}{3} + 70$$

$$V = \frac{C}{0,07}\left[1 - (1 + 0,07)^{-3}\right]$$

$$V = \left(\frac{V}{3} + 70\right) \times 2,6243$$

$$V = 0,87477V + 182,70$$

$$V = 1467$$

Este último importe obtenido corresponde al saldo de deuda existente, luego de abonada la 4.ª cuota; a partir de este, calculamos la cuota constante que se utilizó en toda la operación:

$$C = \frac{1467 \times 0{,}07}{1 - 1{,}07^{-3}}$$
$$C = 559$$

Conocida la cuota, estamos en condiciones de conocer el valor actual de la deuda original:

$$V_0 = \frac{559}{0{,}07}\left[1 - 1{,}07^{-7}\right]$$
$$V_0 = 3012{,}63$$

Para resolver el mismo ejercicio anterior suponiendo que se trata de un sistema alemán, partimos de la fórmula del total de intereses aplicado a las últimas tres cuotas:

$$TI = \frac{V\,0{,}07}{2}(3+1)$$
$$210 = V \times 0{,}14$$
$$V = 1500$$

Este importe reúne las últimas tres cuotas de amortización (constantes), por lo que resulta simple calcular la deuda original:

$$V_0 = \frac{1500}{3} \times 7$$
$$V_0 = 3500$$

- Para cancelar una cierta deuda por sistema francés en cinco pagos periódicos pactados al 10 % efectivo y periódico, se sabe que el doble de lo amortizado en la cuarta cuota, más el triple de lo amortizado en la segunda, asciende a $683,58. Calcular el valor actual y el importe de sus cuotas de servicio.

SOLUCIÓN:

Siendo:

$$t2 = 1{,}1t1$$

$$t4 = 1{,}1^3 t1$$

$$t4 = 1{,}331t1$$

Para:

$$2t4 + 3t2 = 683{,}58$$

$$2{,}662t1 = 3{,}3t1 = 683{,}58$$

$$t1 = 114{,}66$$

$$t1 = V_0 - t2 - t3 - t4 - t5$$

$$t1 = V_0 - t1(1{,}1 + 1{,}21 + 1{,}331 + 1{,}4641)$$

$$V_0 = 6{,}1051t1$$

$$V_0 = 700$$

$$C = t1 + V_0 \times i$$

$$C = 114{,}66 + 700 \times 0{,}10$$

$$C = 184{,}66$$

- Conociendo que el doble de los intereses cancelados en la tercera cuota más los intereses abonados en la tercera ascienden a $232,84, tratándose de una deuda por sistema francés valuada al 10 % efectivo periódico cancelable en cinco pagos, calcular su valor actual y el importe de sus cuotas.

SOLUCIÓN:

Siendo:

$$2I_2 = V_1 \times 0,20$$
$$I_3 = V_2 \times 0,10$$
$$149,22 = 0,1(2V_1 + V_0)$$
$$2328,42 = 2V_1 + V_2$$
$$2328,42 = 2V_0 - 2t1 + V_0 - 2,1t1$$
$$2328,42 = 3V_0 - 4,1t1$$
$$V_0 = \frac{2328,42}{3} + \frac{4,1}{3}t1$$
$$V_0 = 776,14 + 1,366666t1$$
$$V_0 = \frac{t1 + 0,1V_0}{0,10}\left(1 - 1,10^{-5}\right)$$
$$V_0 = 6,1051t1$$

Despejando t1 e igualando:

$$t1 = \frac{V_0 - 776,14}{1,36666}$$

$$t1 = 0,163797V_0$$

$$V_0 - 776,14 = 1,366666 \times 0,163797V_0$$
$$V_0 = 1000.-$$
$$C = t1 + 0,10V_0$$
$$C = V_0(0,163797 + 0,10)$$
$$C = 1000 \times 0,263797$$
$$C = 263,80$$

- Para cancelar una cierta deuda por sistema alemán en ocho cuotas se conoce que se abonó por todo concepto en la cuarta cuota $254,40, así como la razón de decrecimiento de $8,48. Calcular su importe.

SOLUCIÓN:

$$C_4 = V_0\left(\frac{1}{8}+\frac{5i}{8}\right)$$
$$8\times 254{,}40 = V_0(1+5i)$$
$$V_0 = \frac{2035{,}20}{1+5i}$$

Adicionalmente:

$$C_1 = C_4 + 3r$$
$$C_1 = 254{,}40 + 3\times 8{,}48$$
$$C_1 = 279{,}84$$
$$C_1 = V_0\left(\frac{1}{8}+i\right)$$
$$279{,}84 = V_0(0{,}125+i)$$
$$V_0 = \frac{279{,}84}{0{,}125+i}$$

Igualando:

$$\frac{2035{,}20}{1+5i} = \frac{279{,}84}{0{,}125+i}$$
$$254{,}40 + 2035{,}20i = 279{,}84 + 1399{,}20i$$
$$636i = 25{,}94$$
$$i = 0{,}04$$

Reemplazando:

$$V_0 = \frac{279,84}{0,125 + 0,04}$$
$$V_0 = 1696$$

- Conociendo que una cierta deuda por sistema alemán a cancelarse en 90 cuotas mensuales fue valuada a dos tasas consecutivas, la primera de ellas al 1,5 % mensual y la segunda, vigente luego de abonada la cuota n.º 45, del 2 % efectivo mensual, determinó un saldo de deuda de $15.000, luego de abonada la cuota de orden n.º 60 se desea conocer el total de intereses a cargo del deudor.

SOLUCIÓN:

Conocemos el saldo de deuda de las últimas 30 cuotas, por lo que podemos calcular el valor actual para determinar los intereses abonados:

$$t_h = \frac{V_0}{n}$$
$$t_h = \frac{15000}{30}$$
$$t_h = 500$$
$$90 \times 500 = V_0$$
$$V_0 = 45000$$

Calculamos el total de intereses para toda la operación valuada al 1,5 %, descontamos los intereses devengados posteriores a la cuota 45 a esa tasa para incorporarle los intereses de ese último tramo, valuándolo ahora al 2 %:

$$TI_{90,0,015} - TI_{45,0,015} + TI_{45,0,02} = Total.Intereses.netos$$

$$\frac{45000 \times 0{,}015}{2} \times 91 = 30.712{,}50$$
$$\frac{22500 \times 0{,}015}{2} \times 46 = 7.762{,}50$$
$$\frac{22500 \times 0{,}02}{2} \times 46 = 10.350{,}00$$

Total de intereses netos:

$$30.712{,}50 - 7.762{,}50 + 10.350{,}00 = 33.000.-$$

Se otorga un préstamo a cancelarse en 44 cuotas mensuales de capital constante, valuándolo al 1,5 % efectivo mensual, vigente hasta el momento de cancelar la cuota de orden 23 para luego incrementarse en ½ punto. Conociendo que el total de intereses alcanzó los \$3.000, calcular el importe de la deuda original.

SOLUCIÓN:

Siendo:

$$V_0 = 44th$$

$$V_{23} = 21th$$

$$3000 = \frac{44th \times 0{,}015}{2} \times 45 - \frac{21th \times 22}{2} \times (0{,}015 - 0{,}02)$$

$$3000 = th(14{,}85 + 1{,}155)$$

$$th = \frac{3000}{16{,}005}$$

$$th = 187{,}44$$

$$V_0 = 44 \times 187{,}44$$

$$V_0 = 8.247{,}42$$

Dada una deuda de $24.000 a cancelarse por sistema alemán en 60 cuotas mensuales y vencidas que generó un total de intereses de $24.480, calcular las tasas aplicadas sabiendo que la primera de ellas permaneció vigente hasta el momento de cancelarse la cuota de orden n.º 25 para luego incrementarse en un punto.

SOLUCIÓN:

Siendo:

$$i_1 = x$$

$$t_h = \frac{V_0}{60}$$

$$th = \frac{24000}{60}$$

$$th = 400$$

$$V_{25} = 400 \times 35$$

$$V_0 = 14000$$

$$24480 = \frac{24000.X}{2} \times 61 - \frac{14000X}{2} \times 36 + \frac{14000(X + 0{,}01)}{2} \times 36$$

$$24480 = 732000X - 252000X + 252000X + 2520$$

$$21960 = 732000X$$

$$x = 0{,}03$$

$$i_1 = 0{,}03$$

$$\therefore i_2 = 0{,}04$$

Se pacta cancelar una deuda por $9.000 en nueve cuotas mensuales por sistema progresivo, que se valuará al 3 % efectivo mensual. Una vez cumplido el desembolso de la cuota de orden cuatro, el deudor ofrece un pago extraordinario de $1.000 y entrega dos pagarés del mismo importe a 45 y 90 días de plazo para extinguir dicha obligación. Se desea conocer el importe de los documentos, suponiendo que en ningún caso se modificó la tasa.

SOLUCIÓN:

Calculamos, en primer lugar, los valores de f_1 y t_1:

$$f_1 = \frac{1}{\frac{(1+9)\times 9}{2}}$$

$$f_1 = 0{,}0222222$$

$$t_1 = V_0 \times f_1$$

$$t_{1_1} = 9000 \times 0{,}022222$$

$$t_1 = 200$$

Hemos calculado previamente estos valores para aplicarlos a la fórmula del saldo de deuda:

$$SD = V_0 \times \left[1 - \frac{h^2 + h}{n^2 + n} \right]$$

$$SD = 9000 \times \left[1 - \frac{16 + 4}{81 + 9} \right]$$

$$SD = \$7000$$

Estamos en condiciones de determinar el importe que se cancelará con dos documentos iguales una vez que descontemos el pago extraordinario de $1.000, por lo que el nuevo importe a financiar será de $6.000 (7.000-1.000). Esta financiación por medio de documentos a 45 y 60 días podría calcularse como una renta de dos cuotas iguales, luego de ajustar la tasa mensual a una frecuencia acorde de 45 días:

$$1{,}03^{\frac{45}{30}} - 1 = i_{45} = 0{,}0453358$$

Donde el valor de cada documento será:

$$N = \frac{6000 \times 0{,}0453358}{1 - 1{,}0453358^{-2}}$$

$$N_1 = N_2 = \$3205{,}52$$

Un deudor contrata un crédito de $8.000 por sistema progresivo a cancelarse en 14 cuotas mensuales valuado al 1,5 % mensual. ¿Qué importe podría recibir si deseara abonar la misma cuantía en concepto de intereses, si contratara por sistema alemán y mantuviera las condiciones de tiempo y tasa inalterables?

SOLUCIÓN:

Calculamos el total de intereses para el sistema progresivo:

$$TI = V_0 \times i \times \left(1 + \frac{n-1}{1,5}\right)$$

$$TI = 8000 \times 0,015 \times \left(1 - \frac{n-1}{1,5}\right)$$

$$TI = \$1160$$

Reemplazamos el valor obtenido en la fórmula del total de intereses del sistema alemán para despejar la variable V_0:

$$1160 = \frac{V_0 \times i}{2} \times (n+1)$$

$$1160 = \frac{V_0 \times 0,015}{2} \times 15$$

$$V_{0(aleman)} = \$10.311,11$$

Una cierta deuda contratada por sistema progresivo y valuada al 0,06 efectivo periódico comprometió al deudor a abonar $300 por todo concepto para cancelar la cuota de orden cuatro. Se conoce que la sumatoria de factores de corrección uno y cinco suman 0,1666666. Confeccionar el cuadro de marcha.

SOLUCIÓN:

Siendo $f_1 + f_5 = 0,1\widehat{6}$ $\qquad f_5 = f_1 \times 5 \qquad 6 \times f_1 = 0,1\widehat{6}$

$f_1 = 0,02\widehat{7}$

Sustituyendo: $f_1 = \dfrac{1}{\dfrac{(1+n)\times n}{2}}$

$0{,}02\widehat{7}(n^2+n) = 2 \qquad n^2+n-72=\emptyset$

De donde obtenemos que $n = 8$

Siendo $C_4 = t_4 + I_4$

$$C_h = t_h + \left[\frac{(1+n)\times n}{2} - \frac{h\times(h-1)}{2}\right]\times i \times \frac{t_h}{h}$$

$$300 = t_4 + 30\times 0{,}06\times\frac{t_4}{4}$$

$$t_4 = \$206{,}90$$

$$t_1 = \frac{t_h}{h} \qquad t_1 = \frac{206{,}90}{4}$$

$$t_1 = \$51{,}72$$

Siendo: $V_0 = \dfrac{t_1+t_n}{2}\times n$

y $t_8 = 8\times t_1$

$$V_0 = \frac{51{,}724(1+8)}{2}\times 8$$

$$V_0 = \$1862{,}07$$

Orden	Vni	Ch	th	Ih	factor
0	1862,07				
1	1810,3	163,45	51,724	111,72	*0,0277778*
2	1706,9	212,07	103,45	108,62	*0,0555556*
3	1551,7	257,59	155,17	102,41	*0,0833333*
4	1344,8	**300,00**	206,90	93,10	*0,1111111*
5	1086,2	339,31	258,62	80,69	*0,1388889*
6	775,86	375,52	310,34	65,17	*0,1666667*
7	413,79	408,62	362,07	46,55	*0,1944444*
8	0,00	438,62	413,79	24,83	*0,2222222*
		2495,17	1862,07	633,10	1

Quince días después del vencimiento de la cuota de orden n.º 12, un deudor depositó $4.910,25 para cancelar su deuda contratada por sistema de intereses promediados que fuera pactada a cancelarse en 20 cuotas mensuales, valuado al 3,5 % efvo. mensual. Determinar cuál fue su importe original, el valor de las cuotas de servicio y cuál fue el ahorro de intereses que consiguió por el pago adelantado.

SOLUCIÓN:

Sobre un total de 20 cuotas, luego de canceladas 12 de ellas restan abonarse aún ocho cuotas por tratarse de un sistema de cuotas constantes de capital e interés, la ecuación quedaría representada del siguiente modo:

$$4910{,}50 = \frac{V_0 \times 8}{20} + \frac{I_h}{2}$$

$$4910{,}50 = \frac{2}{5} \times V_0 + \frac{1}{2} \times \frac{V_0 \times 0{,}035}{2 \times 20} \times (20+1)$$

$$V_0 = \$12000.-$$

Dado que se prevé constante el pago de intereses, al cancelarse la deuda a los quince días, el deudor abona el 50 % de los intereses que correspondía pagar con la cuota de orden 13. Para determinar el ahorro de intereses, tomamos en cuenta que sobre un total de 20 pagos constantes de interés previstos canceló 12,5 pagos, por lo que restan pagarse 7,5 pagos de I_h:

$$I_h = \frac{V_0 \times i}{2 \times n} \times (n+1)$$

$$I_h = \frac{12000 \times 0{,}035}{2 \times 20} \times 21$$

$$I_h = 220{,}50$$

$$7{,}5 I_h = 7{,}5 \times 220{,}50$$

$$Ahorro = \$1653{,}75$$

- Un deudor que contrata un préstamo por sistema de intereses promediados conoce que luego de afrontar el pago de la cuota de orden n.º 7 deberá desembolsar $3.859,20 por todo concepto para cancelar las nueve cuotas que aún faltan, según el convenio pactado. De haberlo contratado por sistema alemán, hubiera pagado $12,80 como última cuota de interés. Se desea saber a qué tasa fue contratada la operación.

SOLUCIÓN:

Sabemos que la última cuota del sistema alemán equivale a la razón de evolución de los intereses y asimismo, es el producto de $t_h \times i$:

$$r = t_h \times i$$

$$t_h = \frac{V_0}{n}$$

$$r = \frac{V_0 \times i}{n}$$

$$12{,}80 = \frac{V_0 \times i}{(7+9)}$$

$$V_0 \times i = 204{,}80$$

Dadas las concordancias que presentan ambos sistemas, sabemos que el capital original, la tasa y el total de intereses resultan iguales entre sí, de donde:

$$TI = \frac{V_0 \times i}{2} \times (n+1)$$

$$TI = \frac{204{,}80}{2} \times (16+1)$$

$$TI = 1740{,}80$$

Al referirnos al sistema que pacta el deudor, sabemos que:

$$I_h = \frac{TI}{n}$$

$$I_h = \frac{1740{,}80}{16}$$

$$I_h = 108{,}80$$

Estamos en condiciones de relacionar este importe obtenido con el dato del enunciado referido al conjunto de cuotas de servicio adeudadas:

$$3859{,}20 = \frac{V_0 \times 9}{16} + 9 \times I_h$$

$$3859{,}20 = 0{,}5625 \times V_0 + 9 \times 108{,}80$$

$$V_0 = 5120$$

Este último dato obtenido nos permitirá llegar a la conclusión, sabiendo que:

$$V_0 \times i = 204{,}80$$

$$i = \frac{204{,}80}{5120}$$

$$i = 0{,}04$$

- Un deudor que contrata una deuda a cancelarse en 36 cuotas mensuales y constantes, valuada al 2,2 % efectivo mensual, la cancela desembolsando $9.800,76 por todo concepto ocho días antes del vencimiento de la cuota 21. ¿A qué tasa efectiva mensual se hubiera pactado dicha deuda si se hubiera convenido igual cantidad de desembolsos y frecuencia de los pagos por sistema de intereses promediados, sin alterar el total de intereses a pagar?

SOLUCIÓN:

Debemos resolver la operación inicial para conocer el importe de la deuda original y el total de intereses previstos por el sistema francés:

$$C_h^{frances} = \frac{9800{,}76 \times 0{,}022}{\left(1 - 1{,}022^{-16}\right) \times 1{,}022^{\frac{8}{30}}}$$

$$C_h^{frances} = \$729{,}07$$

$$V_0 = \frac{729{,}07}{0{,}022} \times \left(1 - 1{,}022^{-36}\right)$$

$$V_0 = \$18000.-$$

Siendo:

$$TI^{frances} = n \times C_h - V_0$$
$$TI^{frances} = 36 \times 729{,}07 - 18$$

$$TI^{frances} = \$8246{,}57$$

$$TI^{\text{int.}prom} = \frac{V_0 \times i}{2} \times (n+1)$$
$$TI^{\text{int.}prom} = \frac{18000 \times i}{2} \times (36+1)$$
$$TI^{frances} = TI^{\text{int.}prom}$$
$$8246{,}57 = \frac{18000 \times i}{2} \times 37$$
$$i^{\text{int.}prom} = 0{,}0247$$

Siendo:

$$I_h^{\text{int.}pro} = \frac{TI}{n}$$
$$I_h^{\text{int.}prom} = \frac{8246{,}57}{36}$$
$$I_h^{\text{int.}prom} = 229{,}07$$
$$t_h^{\text{int.}prom} = \frac{V_0}{n}$$

Siendo:

$$t_h^{\text{int.}prom} = 500$$
$$C_h = t_h + I_h$$
$$C_h^{\text{int.}prom} = 500 + 229{,}07$$
$$C_h^{\text{int.}prom} = \$729{,}07$$

Puede observarse que también en el sistema de intereses promediados el total de intereses es $n \times C - V_0$, y siendo que, por ajuste de tasas coinciden valores actuales, total de intereses y cantidad de cuotas, para ambos casos también coincidirá el importe de sus cuotas de servicio.

- ¿Qué tasa efectiva mensual se le cobró a un prestatario que contrató cancelar una cierta deuda en ocho cuotas por sistema de intereses promediados si se conoce que abonó cuotas de interés de $112,50 y al momento de pagar la cuota n.º 6 su costo financiero real fue del 6 % mensual? Adicionalmente, construir el cuadro de marcha.

SOLUCIÓN:

Siendo $i_6 = \frac{I_h}{V_{h-1}}$ $\qquad 0{,}06 = \frac{112{,}50}{V_{6-1}}$

$$V_5 = 1875$$

Sobre un total de ocho cuotas, luego de abonada la quinta adeuda tres cuotas, es así que:

$$t_h = \frac{1875}{3} \qquad t_h = \$625 \qquad \therefore V_0 = 8 \times 625 \qquad V_0 \$5000$$

Siendo:

$$I_h = \frac{V_0 \times i}{2 \times n} \times (n+1) \qquad 112{,}50 = \frac{5000 \times i}{2 \times 8} \times 9$$

Finalmente:

$i_{mensual} = 0{,}04$

Cuadro de marcha para este sistema:

Orden	Vni	Ch	th	Ih	tasa
0	5000,00				
1	4375,00	737,50	625,00	112,50	*0,02250*
2	3750,00	737,50	625,00	112,50	*0,02571*
3	3125,00	737,50	625,00	112,50	*0,03000*
4	2500,00	737,50	625,00	112,50	*0,03600*
5	1875,00	737,50	625,00	112,50	*0,04500*
6	1250,00	737,50	625,00	112,50	***0,06000***
7	625,00	737,50	625,00	112,50	*0,09000*
8	0,00	737,50	625,00	112,50	*0,18000*
		5900,00	5000,00	900,00	0,48921429

- Dada una cierta deuda contratada por sistema progresivo que sufrió un costo total equivalente al 10 %, pactada su devolución en siete cuotas, confeccionar el cuadro de marcha sabiendo que al momento de cancelarse la 4.ta cuota de la serie se habían amortizado $400.

SOLUCIÓN:

$SD = V_0 - 400$ y $S.D = \left[\frac{n^2+n}{2} - \frac{h^2+h}{2}\right] \times t_1$

$$V_0 - 400 = \left[\frac{7^2 + 7}{2} - \frac{4^2 + 4}{2} \right] \times t_1$$

Siendo:

$t_1 = V_0 \times f_1$ y $f_1 = \frac{2}{(1+n) \times n}$

$$f_1 = 0{,}035714285$$

$t_1 = \frac{2 \times V_0}{56}$ $t_1 = \frac{V_0}{28}$

$$V_0 - 400 = \left[\frac{7^2 + 7}{2} - \frac{4^2 + 4}{2} \right] \times t_1$$

$$V_0 - 400 = \frac{18 \times V_0}{28}$$

$$28 \times V_0 - 18 \times V_0 = 11200$$

$$V_0 = \$1120$$

Siendo: $TI^{progresivo} = 0{,}10 \times V_0$ $TI^{progresivo} = \$112$

$$TI^{progresivo} = V_0 \times i \times \left(1 + \frac{n-1}{1{,}5} \right)$$

$112 = 1120 \times i \times \left(1 + \frac{7-1}{1{,}5} \right)$ $i = 0{,}02$

Ya contamos con todos los elementos para elaborar el cuadro de marcha:

Orden	Vni	Ch	th	Ih	tasa
0	1120,00				
1	1080,00	62,40	40,00	22,40	*0,03571*
2	1000,00	101,60	80,00	21,60	*0,07143*
3	880,00	140,00	120,00	20,00	*0,10714*
4	720,00	177,60	160,00	17,60	*0,14286*
5	520,00	214,40	200,00	14,40	*0,17857*
6	280,00	250,40	240,00	10,40	*0,21429*
7	0,00	285,60	280,00	5,60	*0,25000*
		1232,00	1120,00	112,00	

Dado un cierto préstamo a cancelarse en 69 cuotas por sistema áureo, conociendo que el total de intereses resultó el 70 % de la deuda original y la cuota de servicio de orden 21 fue de $990, calcular el importe recibido y confeccionar el cuadro de marcha de las últimas cuatro cuotas del sistema.

SOLUCIÓN:

$$0{,}70 \times V_0 = \frac{V_0 \times i \times n}{2} \times \left(2 - \frac{1}{\phi}\right) \qquad i = 0{,}014682$$

Para:

$$C_h = t_h + I_h$$

Reemplazamos:

$$990 = \frac{V_0}{(n-1)\times\phi} + \frac{V_0 \times i}{\phi} \times \left(\frac{n-h}{n-1} + \frac{1}{\phi}\right)$$

$$990 = V_0 \times \left[\frac{1}{(69-1)\times 1{,}618034} + \frac{0{,}014682}{1{,}618034} \times \left(\frac{69-21}{69-1} + \frac{1}{1{,}618034}\right)\right]$$

$$V_0 = \$34704{,}28$$

Para confeccionar el cuadro de marcha de las últimas cuatro cuotas, necesitamos conocer el saldo de deuda luego de abonada la cuota de orden 65 (faltan cancelarse las cuotas 66, 67, 68 y 69):

$$S - Deuda = V_0 \left[1 - \frac{h}{(n-1) \times \phi} \right]$$

$$S - Deuda = 34704{,}28 \left[1 - \frac{65}{(69-1) \times 1{,}618034} \right]$$

$$S - Deuda \cong \$14202{,}11$$

Cuadro de marcha:

Orden	Vni	Ch	th	Ih
	14201,98	528,56	315,42	213,14
66	13886,56	523,93	315,42	208,51
67	13571,14	519,30	315,42	203,88
68	13255,72	514,67	315,42	199,25
69	0,00	13450,34	13255,72	194,62
		58997,41	34704,28	24293,13