

FUNCIONES BIOMÉTRICAS EN EL CÁLCULO ACTUARIAL

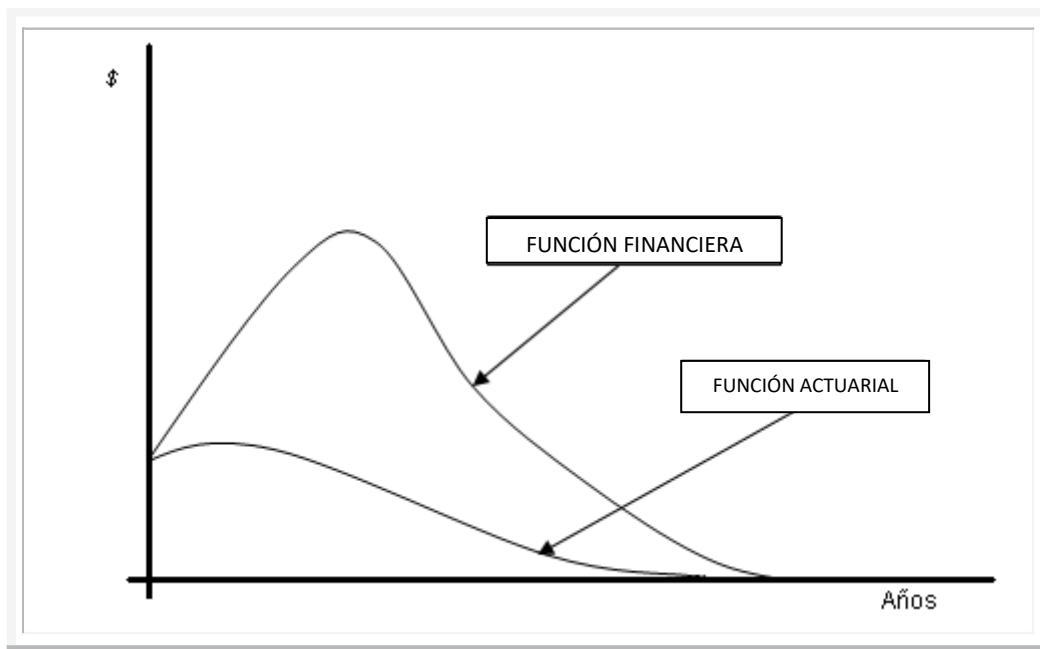
El estudio de los capítulos anteriores nos ha servido de punto de partida para la interpretación de los conceptos que aquí serán desarrollados. Incorporaremos a las *operaciones ciertas* (tanto aquellas que denomináramos simples como las complejas hasta aquí vistas), elementos probabilísticos que determinan ajustes a los cálculos de valores actuales, influidos por las tasas de interés en relación a la aplicación de diversas tablas que operan biométricamente, es decir, sobre los ciclos de vida, longevidad y muerte de hombres y mujeres en función de patrones promediados y actualizados periódicamente.

Debido a los criterios de certeza, la actualización de los flujos de fondos o pagos que resultan equivalentes a un cierto valor presente determinan que en función de una cierta tasa de interés disminuye dicho valor presente, en tanto si la tasa se reduce, inversamente lo incrementa. A nuestros efectos, denominamos a este valor presente como *financiero* (V_0^F).

Por otra parte, denominamos valor presente *actuarial* (V_0^A) a aquella valoración económica que incorpora la **probabilidad** de ocurrencia, es decir, la **posibilidad** de que cada pago se haga efectivo.

Las *probabilidades* que reflejan diversos tipos de tablas biométricas actúan corrigiendo los resultados constantes que devuelven los cálculos a operaciones ciertas, transformándolos según la contingencia observada.

Podemos ejemplificar para un universo reducido de personas el comportamiento de ambas funciones (financiera y actuarial) en tanto se acercan a la edad de 100 años, momento en el que se suspenden los pagos por la inexistencia de supervivientes (tanto en una como en otra función), observando un comportamiento más "suavizado" según se aprecia en la siguiente gráfica:



Es así que en la actividad aseguradora, gracias al empleo de tablas estadísticas específicas de esta naturaleza, podemos valorar las primas de seguro que permiten obtener determinados premios, ya sea que se trate de seguros *sobre la vida* cuando lo producido constituye un beneficio que puede ser otorgado al hallarse con vida el adquirente, o bien *sobre la muerte*, cuando resulte de la contingencia de su defunción.

El cálculo de la prima neta deberá considerar las características particulares de cada riesgo. A diferencia de los modelos matemáticos que describen relaciones inmutables entre las observaciones, en el mundo de los fenómenos socioeconómicos son necesarios métodos que permitan describir relaciones contingentes, es decir, relaciones ciertas en términos de probabilidad.

Consideraciones sobre la valoración de las rentas vitalicias

Los relevamientos estadísticos a partir del análisis de las bases demográficas constituyen un elemento técnico muy importante para la operación de los seguros de rentas vitalicias, ya que la determinación de las primas netas de riesgo y de las reservas correspondientes se produce a partir de ellas. Es por ello que la solvencia y estabilidad financiera de las empresas que operan los seguros de rentas vitalicias dependerá, entre otros aspectos, de la adecuada medición de la mortalidad de sus pensionados.

El principal recurso con el que cuenta una aseguradora para hacer frente a sus obligaciones proviene de la prima que ingresa a la compañía, por lo que será fundamental que la administración establezca los criterios generales para el adecuado cálculo del monto necesario para poder otorgar una determinada pensión.

Los seguros de rentas vitalicias tienen por objeto brindar a los asegurados el pago de una renta mensual hasta su fallecimiento, así como pagar pensiones de sobrevivencia a sus beneficiarios de conformidad con lo que establezcan las leyes de seguridad social correspondientes. Por lo general, los contratos de rentas vitalicias tienen el carácter de irrevocables.

Los planes de rentas vitalicias pueden distinguirse unos de otros considerando los siguientes aspectos:

1. En qué momento se dará inicio al pago de la prestación.
2. En qué momento se establece el fin de la prestación.
3. Si la prestación será constante, variable o indexada.
4. Si ofrece algún tipo de dividendos a los pensionados.

Considerando cuándo comienza el pago de la prestación, un contrato de renta vitalicia puede clasificarse como de renta inmediata o de renta diferida, dependiendo de cuándo se

haya establecido el inicio del pago de la prestación periódica. Tal como estudiamos en el capítulo correspondiente, mediante una renta inmediata los pagos comienzan transcurrido un periodo después de la contratación de la renta, por ejemplo, un mes después. Las rentas diferidas son aquellas bajo las cuales el periodo de pago de la renta comienza en una fecha futura.

Las rentas que se pagan al menos hasta la muerte del pensionado se denominan rentas vitalicias. Sin embargo, dependiendo de las leyes de seguridad social de cada país, la prestación podrá terminar antes de la muerte del asegurado, por ejemplo, en las pensiones de viudez la prestación podrá darse por terminada cuando la viuda vuelva a casarse, en los seguros de orfandad cuando los hijos alcancen la mayoría de edad, etc.

Las rentas vitalicias suelen contratarse a prima única con los fondos que los empleados han acumulado en sus cuentas de ahorro para el retiro (como ocurría hasta la vigencia del sistema de AFJP o jubilaciones privadas en la Argentina, muy difundido en muchos países) o con fondos provenientes de los presupuestos de los gobiernos (a partir de 2009, a cargo de la ANSES).

Lectura e interpretación de las tablas de mortalidad con valores conmutados

Diversas tablas de mortalidad han sido utilizadas por las aseguradoras de riesgo a través del tiempo y en función de necesidades particulares. Las más difundidas han sido las tablas CSO (Commissioners Standard Ordinary Mortality Table) elaboradas en Estados Unidos desde 1941 con sucesivas modificaciones.

El incremento de las expectativas de vida a lo largo del tiempo ha motivado el constante monitoreo y ajuste, pues de su fiabilidad depende en gran medida la capacidad de las compañías aseguradoras de cumplir con las obligaciones contractuales pactadas con sus asegurados satisfaciendo al mismo tiempo su rentabilidad y la propia subsistencia económica del ente.

El constante desarrollo en materia de salud ha permitido extender las expectativas de vida, elementos que son considerados a la hora de formular el desarrollo de estas tablas.

Sin perjuicio del tipo de tabla que se emplee, observamos características comunes en ellas en cuanto al rango de longevidad considerado (inician a la edad cero y llegan a ω como valor máximo de supervivencia considerada, donde $\omega=100$, siendo que más allá no se consideran supervivientes a efectos actuariales).

Asimismo, las tablas desarrolladas CSO tienen incorporados valores de conmutación, como se denomina a sucesivas columnas que relacionan sus datos con variables financieras ciertas calculados a una tasa determinada, por ejemplo, los valores descontados al 4 % anual, indicando en su nomenclatura v^x de donde $v^x = \frac{1}{(1+i)^x}$, variable que permite actualizar el flujo de fondos previsto como renta vitalicia a la tasa pactada.

Estas tablas se dividen en dos grandes grupos en función del sexo, dado que difieren las expectativas de vida entre hombres y mujeres, cuando esto no se encuentra segregado se consideran valores corrientes y un "plus" de longevidad de tres años a favor de las mujeres, es decir, lo que se considera probable para un hombre de 33 años equivale a la probabilidad de una mujer de 30 años.

VARIABLES ESTADÍSTICAS

Las tablas de mortalidad establecen, además del rango de edades discriminadas, las características para hombres y para mujeres y los siguientes elementos:

l_x	Inicial del vocablo ingles <i>living</i> (vivo, superviviente). Esto es la cantidad de personas que, habiendo nacido en un mismo instante, han alcanzado <i>estadísticamente</i> la edad x .
d_x	Inicial del vocablo ingles <i>dying</i> (moribundo, fallecido). Esto es la cantidad de personas fallecidas dentro del año posterior al haber alcanzado la edad x . Siendo: $d_x = l_x - l_{x+1}$
p_x	Indica la probabilidad que tiene una persona de edad x de alcanzar con vida la edad $x+1$. Esto está dado por la relación: $p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$
q_x	Indica la probabilidad de muerte que tiene una persona de edad x de morir durante el transcurso del siguiente año ($x+1$), dado por la relación: $q_x = \frac{d_x}{l_x}$
D_x	Primer valor de conmutación usando la tasa de interés, siendo: $D_x = l_x \times v^x$
N_x	Representa la sumatoria de valores D_x , desde $D_{\omega-x-1}$ hasta D_x
C_x	Considerando el pago del premio a los beneficiarios dentro del año posterior a ocurrido el deceso, tenemos que: $C_x = d_x \times v^{x+1}$
M_x	Representa la sumatoria de valores C_x desde $C_{\omega-x-1}$ hasta C_x

Consideramos que $p_x + q_x = 1$ (certeza)

dado que: $q_x = \frac{d_x}{l_x}$ y $d_x = l_x - l_{x+1}$

$$\therefore q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$$

y siendo: $p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$ $q_x = 1 - p_x$

Desarrollo de la fórmula de una renta vitalicia constante, inmediata y de pagos vencidos

Consideramos un grupo l_x de personas de edad x dispuestos a aportar \$ a_x con el propósito de reunirse con \$1 al término de cada año en la medida de alcanzar su supervivencia, por lo que se reunirá \$ $a_x \times l_x$, siendo este el valor actual del compromiso asumido por los asegurados.

Al final de cada ciclo anual, la compañía aseguradora solo abonaría \$1 a las l_{x+1} personas vivas. El valor actual en ese momento sería $v \times l_{x+1}$, para el segundo, haría lo propio con los l_{x+2} supervivientes desembolsando en consecuencia $v^2 \times l_{x+2}$ y así sucesivamente, hasta los $l_{\omega-x-1}$ sobrevivientes del último año (no habría que pagarle al $l_{\omega-x}$ grupo inexistente, puesto que todos habrían fallecido). Igualando la serie como capitales equivalentes:

$$l_x \times a_x = v \times l_{x+1} + v^2 \times l_{x+2} + v^3 \times l_{x+3} + \dots + v^{\omega-x-1} \times l_{\omega-1}$$

El costo promedio para cada asegurado:

$$a_x = \frac{v \times l_{x+1} + v^2 \times l_{x+2} + v^3 \times l_{x+3} + \dots + v^{\omega-x-1} \times l_{\omega-1}}{l_x}$$

Multiplicando numerador y denominador por v^x :


$$a_x = \frac{v^{x+1} \times l_{x+1} + v^{x+2} \times l_{x+2} + v^{x+3} \times l_{x+3} + \dots + v^{\omega-x+x-1} \times l_{\omega-1}}{v^x \times l_x}$$

$$a_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \dots + D_{\omega-1}}{D_x}$$

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

Basta reemplazar los valores enunciados por los correspondientes valores conmutados.

Ejemplos

 Tras la venta de una casa quinta valuada en \$460.000, su propietario el Sr. Altamira de 61 años de edad decide invertir en una renta vitalicia de pagos anuales y vencidos. ¿Qué importe habrá de recibir anualmente?

SOLUCIÓN:

Siendo $a_{61} = \$460000$ buscamos los valores en tabla de hombres, según la siguiente expresión:

$$460000 = C \times \frac{N_{62}}{D_{61}} \quad \text{donde} \quad 460000 = C \times \frac{3779,65}{7271}$$

$C = \$88491,26$ representa el valor de su renta vitalicia anual.

Con el propósito de obtener una renta vitalicia anual de \$12.000, inmediata y de pagos vencidos, ¿cuál será la prima única que deberá abonar la Sra. Di Pietro de 47 años de edad?

SOLUCIÓN:

$a_{47} = \frac{N_{48}}{D_{47}} \times 12000$ buscamos los respectivos valores en tabla de mujeres:

$$a_{47} = \frac{4525,02}{14784} \times 12000$$

$a_{47} = \$3672,91$ suma periódica a recibir.

Seguros sobre muerte inmediata

Se trata de reconocer las variables que intervienen para su cálculo. Este seguro erróneamente conocido comercialmente como "seguro de vida" (por cuestiones de imagen comercial) permite mediante sus características otorgar una cierta suma de dinero a los beneficiarios para el caso de que se presente dicha contingencia.

Análogamente al desarrollo anterior, consideramos un grupo ℓ_x de personas de edad x dispuestos a aportar $\$ A_x$ a la aseguradora, por lo que se reunirá $\$ A_x \times \ell_x$ siendo este el valor actual del compromiso asumido por los asegurados, también llamado *prima pura*.

Los fallecimientos acaecidos en el primer año, designados como d_x , imponen a la compañía aseguradora abonar $\$1$ a cada beneficiario al término del año, siendo $\$ d_x$ el costo y cuyo valor actualizado a ese momento sería $\$ v \times d_x$; para el segundo, haría lo propio con los d_{x+1} fallecidos, desembolsando en consecuencia $\$ d_{x+1}$ con un valor actualizado de $v^2 \times d_{x+1}$ y así sucesivamente, hasta los $d_{\omega-1}$ fallecidos del último año. Igualando la serie como capitales equivalentes:

$$\ell_x \times A_x = v \times d_{x+1} + v^2 \times d_{x+2} + v^3 \times d_{x+3} + \dots + v^{\omega-x-1} \times d_{\omega-2} + v^{\omega-x} \times d_{\omega-1}$$

Despejando A_x y multiplicando y dividiendo por v^x :

$$A_x = \frac{v^{x+1} \times d_{x+1} + v^{x+2} \times d_{x+2} + v^{x+3} \times d_{x+3} + \dots + v^{\omega-x+x-1} \times d_{\omega-2} + v^{\omega} \times d_{\omega}}{v^x \times \ell_x}$$


Recordando que: $C_x = d_x \times v^{x+1}$ y $D_x = \ell_x \times v^x$

$$A_x = \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \dots + C_{\omega-2} + C_{\omega-1}}{D_x}$$

Reemplazando el numerador por su igualdad:

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

Ejemplos:


-  La Sra. Marcela Chandía de 41 años de edad desea contratar un seguro de vida entera (seguro de muerte) para un capital de \$160.000. Calcular el valor de la prima pura correspondiente según la tabla CSO 80.

SOLUCIÓN:

Verificamos los correspondientes valores en tablas de mujeres:

$$A_{41} = 160000 \times \frac{4898,69}{19071}$$

$A_{41} = \$41098,55$ corresponde al valor de la prima pura.

-  El Sr. Ernesto Conde, abogado de 36 años de edad, desea destinar \$18.000 para contratar un seguro de muerte inmediata. ¿Cuál será el capital a asegurar? Su padre, el Sr. Jaime Conde de 58 años de edad, se interesa en una operación similar, ¿cuál será el capital que él aseguraría a partir de la misma suma invertida por su hijo?

SOLUCIÓN:

$$18000 = C \times \frac{5888,09}{123080}$$

$$C = \$70555,99 \text{ capital de Ernesto}$$

$$18000 = C \times \frac{4248,01}{8553}$$

$$C = \$36241,44 \text{ capital de Jaime}$$