Código	FPI-009
Objeto	Guía de elaboración de Informe de avance y final de proyecto
Usuario	Director de proyecto de investigación
Autor	Secretaría de Ciencia y Tecnología de la UNLaM
Versión	2.1
Vigencia	13/10/2015

Unidad Ejecutora: DIIT

Título del proyecto de investigación: Estudio sobre habilidades matemáticas y digitales en el aprendizaje de la derivada

Código del proyecto: C180

Programa de acreditación: PROINCE

Director del proyecto: Marcela Falsetti

Co-Director del proyecto: Betina Williner

Integrantes del equipo: Roxana Scorzo, Adriana Favieri

Fecha de inicio: 01-01-16

Fecha de finalización: 31-12-17

Informe final

Sumario:

1. **Resumen y palabras clave**

El presente proyecto surgió ante la necesidad de mejorar el aprendizaje del concepto de derivada en carreras de ingeniería de la UNLaM. La derivada es uno de los conceptos fundamentales de la asignatura Análisis matemático. Diversas investigaciones y la propia experiencia dan cuenta que los alumnos no logran una comprensión satisfactoria sobre el mismo.
Establecimos como objetivo principal explorar el desarrollo de habilidades matemáticas y digitales relacionadas con el concepto de derivada cuando los alumnos trabajan con actividades que involucran diferentes registros de representación.
Con base en bibliografía, en investigaciones anteriores y considerando que la derivada se fundamenta en ideas de variación, definimos las habilidades que, consideramos, favorecerían el aprendizaje del concepto. Diseñamos una secuencia de actividades para promover el desarrollo de dichas habilidades. A su vez tuvimos en cuenta que las tareas que formen parte de la misma estuvieran en diferentes registros de representación, ya que su uso favorece la comprensión (Duval, 1998). Realizamos una prueba piloto de la secuencia didáctica en dos cursos de la asignatura, lo que nos permitió realizar ajustes. Luego efectuamos la experiencia propiamente dicha en tres cursos. Analizamos las producciones de los alumnos teniendo en cuenta las habilidades matemáticas definidas. Posteriormente aplicamos un test sobre el concepto de derivada.
Asimismo, hicimos observaciones participantes en el aula sobre las orientaciones brindadas a los alumnos en el momento de la resolución de las actividades. También se realizó una encuesta sobre el uso de los recursos tecnológicos. Las observaciones y la encuesta fueron aplicados para que arrojaran datos para un posterior diseño de un hipermedio.
Presentamos todo el trabajo realizado. El marco teórico de base, las habilidades matemáticas sobre el concepto de derivada que definimos para el estudio, el diseño de la secuencia de actividades, su puesta en marcha y los resultados obtenidos basados en las producciones de los alumnos y en el test final. Por último, proporcionamos las conclusiones a las que arribamos luego del estudio efectuado.
Palabras claves: habilidades matemáticas - derivada de función real de una variable- registros de representación semiótica –

2. Memoria descriptiva

La investigación ha sido finalizada.
No hubo en este proyecto formación de recursos humanos.
La difusión de resultados preliminar fue presentada en el congreso XX EMCI llevado a cabo en Santiago del Estero en mayo de 2017 (las comunicaciones se encuentran en el anexo)

Favieri, A., Williner, B., Scorzo, R. y Falsetti, M (2017). *Justificación teórica del diseño de actividades relacionadas con el concepto de derivada.*

Williner, B., Favieri, A. y Scorzo, R. (2017). *Actividades para promover el desarrollo de habilidades matemáticas en torno al concepto de derivada: diseño y prueba piloto*

Organización del Informe Final

Para la presentación del informe tenemos en cuenta los siguientes puntos:

1. Introducción:
1.1. Selección del Tema
1.2. Definición del Problema
1.3. Justificación del Estudio
1.4. Limitaciones
1.5. Alcances del Trabajo
1.6. Objetivos
1.7. Hipótesis
2. Desarrollo:
2.1. Material y Métodos
2.2. Lugar y Tiempo de la Investigación
2.3. Descripción del Objeto de Estudio
2.4. Descripción de Población y Muestra
2.5. Diseño de la Investigación
2.6. Instrumentos de Recolección y Medición de Datos
2.7. Confiabilidad y Validez de la Medición
2.8. Métodos de Análisis Estadísticos
2.9. Resultados
2.10. Discusión
3. Conclusiones
4. Bibliografía
5. Anexos

1. Introducción

1.1. Selección del tema

Desde el año 2007 trabajamos en proyectos de investigación ligados a diseñar actividades que fomentan el desarrollo de diversas habilidades matemáticas y desde 2010 en el diseño de hipermedios como recursos didácticos. Estos proyectos se implementaron dentro del contexto de la cátedra de Análisis Matemático I de carreras de ingeniería de UNLaM.
Consideramos que un ingeniero debe adquirir conocimiento científico para poder aplicarlo, desarrollar soluciones tecnológicas a las diferentes demandas sociales, y en esto las

habilidades, es decir, las acciones o tareas orientadas hacia el logro de un objetivo, son fundamentales. El desarrollo de habilidades matemáticas ayuda al alumno a no proceder en forma mecánica, memorizando conceptos, definiciones, teoremas y técnicas. Éstas lo auxilian a razonar en Matemática, teniendo la capacidad de adaptarse a distintas situaciones y problemas, tal como lo hará una vez inserto en su vida laboral con otros temas. También tenemos en cuenta que en las últimas décadas la evolución de las computadoras y la posibilidad de acceso a las mismas nos brindan la oportunidadde crear nuestros propios materiales didácticos sobre diversos temas. Estas nuevas tecnologías nos permiten incorporar gráficos, imágenes, sonidos y animaciones, que generalmente, son elementos que motivan el aprendizaje. Dentro de la gama de recursos disponibles trabajamos con recursos hipermediales. Pensamos que éstos se adaptan muy bien al nivel universitario debido a que por sus características fomenta el estudio independiente y autónomo del alumno, ya que es él quien enfrenta la información, la organiza de acuerdo a sus conocimientos previos e intereses. El usuario no maneja el contenido de manera estática, como en los medios tradicionales, sino que también explora e interactúa con el mismo. Además de favorecer la construcción de conocimiento se promueve el desarrollo de habilidades propias de esta era digital como son el manejo de información, la evaluación y el análisis de la misma, la integración a saberes ya adquiridos, entre otras.
Entonces continuamos en una de las líneas de investigación que tiene su encuadre en el aprendizaje de los alumnos de ingeniería en término de habilidades matemáticas cuando trabajan con actividades especialmente diseñadas. En esta oportunidad elegimos, para llevar adelante el estudio, el concepto de derivada. Esta selección está basada en que es uno de los conceptos fundamentales de la materia y, de acuerdo a la evidencia empírica que tenemos de tantos años de docencia, los alumnos no muestran un aprendizaje genuino sobre el mismo. El Cálculo es la matemática de la variación. A través del mismo se puede estudiar cómo y cuánto varía una determinada magnitud, resolver problemas de optimización, aproximar curvas, ajustar modelos. Estas herramientas son fundamentales en las carreras de ingeniería. Si bien en los últimos años la comunidad de Educación Matemática ha aportado avances sobre la enseñanza y el aprendizaje de este concepto, queda por hacer.

1.2. Definición del problema

Los problemas abordados fueron:

a) El conocimiento sobre las habilidades matemáticas y las digitales implicadas en la comprensión del concepto de derivada.
b) Cómo deberían ser las actividades para el aprendizaje en la clase y la dinámica de la misma para favorecer el aprendizaje del concepto de derivada.
c) ¿Cuáles son las intervenciones adecuadas del docente para que los alumnos puedan avanzar en el desarrollo de las actividades y desarrollar las habilidades definidas y que puedan incorporarse a un recurso de estudio autónomo como el hipermedio?

1.3. Justificación del estudio

En la asignatura Análisis Matemático I estamos trabajando con una propuesta metodológica que surge de la adaptación del enfoque de resolución de problemas. Incorporamos una *Unidad Transversal* de resolución de actividades que tiene sus objetivos propios: que el alumno desarrolle habilidades y/o heurísticas para la resolución de dichas actividades, que trabaje en equipo discutiendo diferentes posturas con sus compañeros y que pueda reflexionar sobre su propio proceso de resolución. Dicha unidad

transversal se materializa a través de clases bajo modalidad taller en las cuales los estudiantes trabajan en grupos de dos personas. Las actividades son corregidas por los docentes de cada curso y los resultados son considerados para la acreditación de la materia. Estas actividades son el campo propicio para el desarrollo de habilidades matemáticas vinculadas a los conceptos matemáticos desarrollados en las mismas. A su vez la presentación de los problemas suele incluir diversos registros de representación, algunos gráficos, otros analíticos, verbales o alguna combinación de ellos.
Por otro lado, en las investigaciones anteriores obtuvimos como resultado general que los recursos hipermediales son materiales didácticos que se adaptan muy bien al nivel universitario y que, a través de los mismos, podemos desarrollar tanto habilidades matemáticas como digitales. Entonces, pensamos en diseñar unhipermedio en relación con actividades ligadas al concepto de derivada, que incluya diversos registros de representación, enfocado en el desarrollo de habilidades matemáticas y digitales, para ser utilizado como dispositivo didáctico en la cátedra.
Como paso previo a este diseño llevamos a cabo la investigación que reportamos en este informe, debido a que necesitábamos insumos en cuanto a

- ¿qué habilidades matemáticas son factibles de promover para lograr el aprendizaje del concepto de derivada?
- ¿qué tipo de actividades seleccionar para desarrollar dichas habilidades?
- ¿cómo diseñar las actividades de modo queinvolucren diversos sistemas de representación?
- ¿Los alumnos usan recursos tecnológicos para encarar los problemas propuestos? ¿Cuáles? ¿Cómo? ¿Qué habilidades digitales se observan?
- ¿se logra buenos resultados en el aprendizaje luego de realizar la secuencia de actividades propuesta?

Si bien varias investigaciones dan cuenta de actividades sobre el concepto de derivada que favorecen la comprensión sobre el mismo (Dolores, 2000; García, 2011; Vrancken, 2011), nuestro estudio estuvo ligado al desarrollo de ciertas habilidades y a la elaboración de actividades adecuadas para promoverlas.

1.4. Limitaciones

El principal impedimento fue no disponer de recursos tecnológicos en las aulas para poder observar el desarrollo de habilidades digitales. No pudimos conseguir en la universidad laboratorios de computación debido a que, en los horarios de clase de matemática, estaban ocupados por otras asignaturas. Esto nos condicionó al estudio de las habilidades digitales. En esta oportunidad los alumnos usaron sus celulares para gráficos y cálculos y sólo pudimos realizar una encuesta sobre la utilización de los mismos. Entonces la investigación estuvo acotada a las habilidades matemáticas.
Otro condicionamiento fue el tiempodestinado, en este caso, al desarrollo de la unidad de derivada. Esto es establecido desde la coordinación de la materia de acuerdo a las semanas de clase y a la totalidad de los temas a desarrollar.
También consideramos una limitación el lugar físico para el trabajo de investigación del grupo, el cual estuvo disponible a comienzos del proyecto, pero las computadoras que tenemos asignadas para la investigación no cuentan con la configuración adecuada por lo que no tenemos acceso a Internet, ni a base de datos (por ejemplo bibliotecas digitales, repositorio del Ministerio de Ciencia y Tecnología, entre otros), restringiendo así la lectura de revistas especializadas o trabajos relacionados con la temática de investigación.
Por último, es un obstáculo la escasez de tiempo de investigación para poder completar el análisis de confiablidad y validez de los instrumentos de recolección de datos.

1.5. Alcances del trabajo

Es una investigación en Educación Matemática que pretende mejorar el aprendizaje del concepto de derivadaen carreras de ingeniería haciendo uso de actividades especialmente diseñadas con mira al desarrollo de habilidades para un posterior diseño de un material didáctico.

Consideramos que es un aporte a toda la comunidad educativa de nivel superior y más específicamente a nuestro contexto.

1.6. Objetivos

Los objetivos planteados en el proyecto de investigación eran:

Objetivos generales

- Explorar el desarrollo de habilidades matemáticas ligadas al concepto de derivada en el Cálculo de una variable cuando los alumnos resuelven actividades que favorecen el tratamiento y la articulación de diferentes sistemas de representación.
- Aportar conocimiento sobre los hipermedios como recurso didáctico para la formación matemática de los estudiantes de ingeniería.
- Contribuir al estudio de habilidades matemáticas y digitales vinculadas al concepto de derivada.

Objetivos específicos

- Determinar las habilidades matemáticas ligadas al concepto de derivada que evidencien aprendizaje de este concepto.
- Analizar problemas con uso de diversos sistemas de representación que favorezcan el desarrollo de las habilidades matemáticas definidas en torno al concepto de derivada para conformar un banco de problemas a utilizar en la clase.
- Describir y analizar las producciones de los alumnos en términos de las habilidades digitales y las matemáticas, con especial énfasis en el uso flexible de registros de representación.
- Ampliar marco teórico en relación con desarrollo de hipertextos para la resolución de problemas matemáticos.
- Explorar el uso de recursos tecnológicos y el desarrollo de habilidades digitales cuando los alumnos resuelven las actividades propuestas.
- Analizar las orientaciones brindadas por el profesor a los alumnos para la resolución de las actividades, con el propósito de ver cómo incorporar las mismas a un hipermedio.

Por lo explicado en el apartado 1.4 los redefinimos a:

Objetivos generales

- Explorar el desarrollo de habilidades matemáticas ligadas al concepto de derivada en el Cálculo de una variable cuando los alumnos resuelven actividades que favorecen el tratamiento y la articulación de diferentes sistemas de representación.
- Contribuir al estudio de habilidades matemáticas vinculadas al concepto de derivada.

Objetivos específicos

- Determinar las habilidades matemáticas ligadas al concepto de derivada que evidencien aprendizaje de este concepto.
- Analizar problemas con uso de diversos sistemas de representación que favorezcan el desarrollo de las habilidades matemáticas definidas en torno al concepto de derivada para conformar un banco de problemas a utilizar en la clase.
- Describir y analizar las producciones de los alumnos en términos de las habilidades matemáticas, con especial énfasis en el uso flexible de registros de representación.
- Explorar el uso de recursos tecnológicos cuando los alumnos resuelven las actividades propuestas.
- Analizar las orientaciones brindadas por el profesor a los alumnos para la resolución de las actividades con el propósito de ver cómo incorporar las mismas a un hipermedio.

1.7. Hipótesis

- Hacer hincapié en la variación de los fenómenos y en los cambios del cociente incremental favorece el desarrollo de habilidades vinculadas al aprendizaje del concepto de derivada.
- El uso articulado de diferentes registros de representación que evidencien las nociones de variación favorece el desarrollo de habilidades vinculadas al aprendizaje del concepto de derivada.

2. Desarrollo

2.1. Material y métodos

En primer lugar, indagamos en la bibliografía (Dolores, 2000; García, 2011, Vrancken, Engler y Müller, 2008) sobre actividades que promuevenel aprendizaje del concepto de derivada. Esto nos brindó una base teórica para determinar las habilidades matemáticas que queríamos promover y para la elaboración de nuestras propias actividades.
La investigación fue cualitativa interpretativa con intervención didáctica mediante la puesta en marcha de actividades y de una dinámica especial de la clase. De la población de estudiantes de Análisis Matemático I elegimos para llevar adelante la experiencia las tres comisiones a cargo de los miembros del equipo, todas del turno mañana. Formamos así una muestra intencional.
Dentro de la Unidad Transversal de la asignatura estas comisiones trabajaron con actividades diseñadas para promover las habilidades definidas. Los alumnos trabajaron en equipos de dos personas durante aproximadamente dos horas, bajo modalidad taller, con orientaciones de las docentes (pactadas con anterioridad). Luego tomamos un test final sobre el concepto de derivada.
A su vez durante la experiencia recopilamos las orientaciones brindadas a los alumnos en el momento de resolución de las actividades y efectuamos una encuesta sobre el uso de tecnología en la actividad matemática.

2.2. Lugar y tiempo de investigación

La investigación tuvo una duración de dos años. La indagación bibliográfica, la determinación de las habilidades a promover y el diseño de las actividades la realizamos en espacios de la Universidad. Tanto la experiencia piloto para realizar ajustes como la experiencia propiamente dicha las efectuamos en las aulas designadas a las comisiones de la asignatura con las cuales trabajamos.

2.3. Objeto de estudio

El objeto de estudio es el desarrollo de habilidades matemáticas sobre el concepto de derivada mediante dispositivos didácticos y gestión de clase. Enunciamos y sintetizamos las investigaciones analizadas que contribuyeron tanto al diseño de la situación didáctica como a la elección de las habilidades matemáticas a estudiar en el punto 5.2. Anexo II.
De acuerdo a los autores citados en dicho anexo, las habilidades que definimos como indicadores del aprendizaje del concepto de derivada se basaron en tres nociones fundamentales:

- ✓ Variación
- ✓ Rapidez promedio de variación
- ✓ Rapidez instantánea de variación.

Consideramos las siguientes habilidades como indicadores del aprendizaje del concepto de derivada:

- ✓ *Identificar* variable independiente y dependiente, dominio e imagen en funciones y en diferentes contextos (H1)
- ✓ *Identificar* y *diferenciar* las tres nociones fundamentales definidas anteriormente (H2).
- ✓ *Calcular* razones de cambio media e instantáneas por medios numéricos y analíticos (H3).
- ✓ *Explicar* el significado en diferentes contextos (incluyendo el geométrico) de las tres nociones fundamentales (H4).
- ✓ *Aplicar* el concepto en la solución de problemas (H5).

2.4. Descripción de población y muestra

La población consistió en la totalidadde alumnos de la cátedra Análisis Matemático I del Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas (DIIT) de la UNLaM.
La mayoría de los alumnos tiene entre 18 y 23 años, provienen del partido de La Matanza u otros aledaños (González Catán, Morón, Moreno, etc.) y pertenecen a una clase social de nivel socio-económico medio. Muchos constituyen la primera generación de su familia que transita la vida universitaria.
La muestra estuvo formada por estudiantes de tres comisiones seleccionadas por estar a cargo de cada una de las integrantes del equipo de investigación.

2.5. Diseño de investigación

En la indagación de carácter teórico, la metodología fue de tipo cualitativa ya que estudiamos documentos, bibliografía, artículos específicos y registros de experiencias.
Luego el estudio fue empírico. En el mismo se trabajó con las comisiones de Análisis Matemático I mencionadas anteriormente que realizaron las actividades de la Unidad Transversal mediante las actividades diseñadas para promover el desarrollo de las habilidades matemáticas establecidas.Los datos sobre la actuación de los estudiantes frente a dichas actividades se recogieron guiados por rúbricas.
Los alumnos trabajaron en equipos de dos personas bajo modalidad taller. El total de equipos entre las tres comisiones fue de 89 (178 alumnos).
Tuvimos tres sesiones de trabajo (una para cada actividad) con una duración aproximada de dos horas cada una. Las orientaciones dadas por los docentes en ese momento se hicieron según un guionacordado y predefinido con anterioridad.

Hicimos un análisis preliminar de las habilidades definidas en cada uno de los ítems que conforman la secuencia de actividades. Luego elaboramos rúbricas para valorar las producciones de los alumnos en cuanto al desempeño de dichas habilidades.
También tomamos un test final sobre el concepto de derivada que fue respondido por equipo. Los datos se obtuvieron a través de las correcciones de las producciones escritas de los alumnos y en base a las rúbricas mencionadas anteriormente. Procesamos los datos a la espera de tener elementos para dar respuesta a los objetivos y confirmar o refutar la hipótesis.
Por último, realizamos un resumen sobre las orientaciones realizadas en la experiencia a fin de en una investigación posterior poder elaborar el hipermedio sobre el tema.

2.6. Instrumentos de Recolección y Medición de Datos

2.6.1. Secuencia de actividades

Acorde al objetivo de la investigación "explorar el desarrollo de habilidades matemáticas ligadas al concepto de derivada en el Cálculo de una variable cuando los alumnos resuelven actividades que favorecen el tratamiento y la articulación de diferentes sistemas de representación" elaboramos una secuencia de actividades con el fin de promover las habilidades mencionadas en el punto 2.3. Para esto tuvimos en cuenta las investigaciones reportadas en el Anexo II y las actividades que ya veníamos trabajando en la asignatura en el espacio Unidad Transversal. Elegimos problemas que abarcaronlos siguientes modelos: uno geométrico, otro de caída libre y uno de la presión de un gas a temperatura constante. Por lo explicado en otros apartados consideramos brindar las tareas en diversos sistemas de representación.
En el primer año de la investigación realizamos la prueba piloto en dos comisiones, cuyos resultados fueron reportados en el informe de avance. Esto nos permitió efectuar ajustes de consignas para poder lograr la secuencia de actividades definitiva que mostramos en el punto 5.3. Anexo III.
Para valorar las producciones escritas y por equipo de los alumnos en términos de las habilidades definidas y acorde a la conversión o tratamiento de registros elaboramos tablas que luego volcamos en formularios Google. A continuación, las brindamos, una para cada actividad. Cabe aclarar que en el formulario agregamos la opción "No lo realiza".

2.6.1.1. Actividad 1 de Funciones

Análisis preliminar de habilidades				
Habilidad	**Tarea e ítems**	**Bien**	**Regular**	**Mal**
	Tarea 1) Hallar dominio e imagen	Identifica correctamente Dominio e imagen.	Identifica correctamente dominio o imagen (no los dos)	No identifica ni dominio ni imagen
	Indicar las coordenadas de los puntos P y Q.	Identifica las coordenadas de los puntos dados	Identifica correctamente las coordenadas de un solo punto	No identifica ninguna de las coordenadas de ambos puntos
Identificar	Tarea 2)	Identifica	Identifica	No identifica ni

variable independiente y dependiente, dominio e imagen en funciones y en diferentes contextos (H1)	Indicar dominio e imagen en el contexto del problema.	correctamente dominio e imagen	correctamente dominio o imagen	dominio ni imagen
	¿Cuál es la variable independiente y cuál la dependiente?	Identifica correctamente las dos variables con sus nombres y unidades.	Identifica correctamente una sola de las variables o no da las unidades.	No identifica ninguna de las dos variables. Las confunde o las nombra en forma incorrecta.
	Tarea 3) Indicar dominio e imagen en el contexto del problema.	Identifica correctamente dominio e imagen	Identifica correctamente dominio o imagen	No identifica ni dominio ni imagen
	¿Cuál es la variable independiente? ¿Cuál la dependiente?	Identifica correctamente las dos variables	Identifica correctamente una sola de las variables	No identifica ninguna de las dos variables. (Las confunde o no las marca)
Calcular la variación de cada variable (H3)	Tarea 1) Calcular la variación de ambas variables cuando la función cambia de P hacia Q.	Calcula correctamente las variaciones de ambas variables	Calcula correctamente una sola de las variaciones de las variables	No calcula las variaciones de ambas variables o lo hace en forma incorrecta
	Tarea 2) Calcular la variación Δs para intervalos de 1 segundo	Calcula correctamente las variaciones de ambas variables	Calcula correctamente una sola de las variaciones de las variables	Lo hace en forma incorrecta
	Tarea 3) Calcular los cambios ΔV del volumen para intervalos de tres atmósferas.	Calcula correctamente las variaciones de ambas variables	Calcula correctamente una sola de las variaciones de las variables	Lo hace en forma incorrecta
Calcular razones de cambio promedio por medios numéricos y analíticos (H3)	Tarea 1) Calcular la razón de cambio $\frac{\Delta y}{\Delta x}$	Calcula correctamente el cociente de incrementos	Expresa correctamente el cociente, pero se ven errores de cálculo	No calcula correctamente el cociente de incrementos
	Tarea 2) Calcular el cociente $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ a	Calcula correctamente el cociente de incrementos	Expresa correctamente el cociente, pero se ven	No calcula correctamente el cociente de incrementos

	intervalos de 1 segundo		errores de cálculo	
	Tarea 3) Calcular el cociente $\frac{\Delta V}{\Delta P}$ a intervalos de tres atmósferas.	Calcula correctamente el cociente de incrementos	Expresa correctamente el cociente, pero se ven errores de cálculo	No calcula correctamente el cociente de incrementos
Explicarel significado de razón de cambio promedio en funciones y en diferentes contextos de la razón de cambio promedio (H4)	Tarea 1) Trazar la recta que pasa por dichos puntos y determinar su ecuación. ¿Qué relación existe entre la pendiente de la recta secante y el cociente calculado en el ítem e?	Traza bien la recta y explica correctamente la relación existe entre la pendiente de la recta secante y el cociente previamente calculado	Traza bien la recta o explica correctamente la relación existe entre la pendiente de la recta secante y el cociente previamente calculado	Traza mal la recta y explica incorrectamente la relación existe entre la pendiente de la recta secante y el cociente previamente calculado
	Tarea 2) Explicar con tus palabras qué significado tiene ese cociente en el contexto del problema	Explica correctamente el significado del cociente en el contexto del problema	Explica de manera regular el significado del cociente en el contexto del problema	Explica incorrectamente el significado del cociente en el contexto del problema
	Tarea 3) Explicar con tus palabras qué significado tiene ese cociente bajo el contexto del problema.	Explica correctamente el significado del cociente en el contexto del problema	Explica de manera regular el significado del cociente en el contexto del problema	Explica incorrectamente el significado del cociente en el contexto del problema

Tabla 1. Rúbrica habilidades Actividad 1

Desde este apartado usamos las siguientes siglas:

RG: registro gráfico
RA: registro analítico
RN: registro numérico
RV: registro verbal

Registros de representación ACTIVIDAD 1 DE FUNCIONES	
Tarea 1 Dada en registro gráfico (función continua). ♦Expresar la función mediante una fórmula	Conversión entre registros: ♦RGa RA, (tanto en la función como en las coordenadas de los puntos)
Tarea 2)	

Dada en registro gráfico (conjunto de puntos) ♦Unir los puntos en el gráfico y realizar una tabla de acuerdo a los datos dados en el gráfico.	Conversión entre representaciones: ♦RG a RN, para construir la tabla
Tarea 3) Dada en registro numérico ♦Graficar los puntos de la tabla y unirlos.	Conversión entre representaciones: ♦RN a RG, para realizar el gráfico

Tabla 2. Rúbrica registros de representación Actividad 1

2.6.1.2. Actividad 2 de Límite

Análisis preliminar de habilidades				
Habilidad	**Tarea e ítems**	**Bien**	**Regular**	**Mal**
Calcular razón de cambio promedio (H3)	Tarea 1) Calcular la pendiente de dichas rectas. Recordar $m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x}$	Calcula correctamente la pendiente de las rectas dados	Calcula correctamente alguna de las pendientes de las rectas	Calcula incorrectamente la pendiente de las rectas dados
	Tarea 2) La velocidad media se define como $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. De acuerdo a esta definición ¿cuál es la velocidad media del móvil en cada intervalo de la siguiente tabla?	Calcula correctamente la velocidad media del móvil en cada intervalo	Calcula correctamente algunas velocidades medias del móvil en cada intervalo	Calcula incorrectamente la velocidad media del móvil en cada intervalo
	Tarea 3) Calcular los cambios promedios de volumen respecto a la presión para los siguientes intervalos. Recordar $rcp = \frac{\Delta V}{\Delta P}$	Calcula correctamente los cambios promedios de volumen respecto a la presión en cada intervalo	Calcula correctamente algunos cambios promedios de volumen respecto a la presión en cada intervalo	Calcula incorrectamente los cambios promedios de volumen respecto a la presión en cada intervalo
Explicar el significado de razón de cambio promedio en funciones y en diferentes contextos	Tarea 1) Explicar el significado de los cálculos recién realizados	Explica correctamente el significado de los cálculos recién realizados	Explica de manera regular el significado de los cálculos recién realizados	Explica incorrectamente el significado de los cálculos recién realizados
	Tarea 2) Explicar el significado de los cálculos recién realizados	Explica correctamente el significado de los cálculos	Explica de manera regular el significado de los cálculos	Explica incorrectamente el significado de los cálculos recién

(H4)		recién realizados	recién realizados	realizados
	Tarea 3) Explicar el significado de los cálculos recién realizados y el signo de los mismos.	Explica correctamente el significado de los cálculos recién realizados y qué significa el signo negativo	Explica de manera regular el significado de los cálculos recién realizados u olvida indicar por qué son negativos.	Explica incorrectamente el significado de los cálculos recién realizados y olvida mencionar por qué los cambios son negativos
Calcular razones de cambio instantánea por medios numéricos y analíticos (H3)	Tarea 1) Debido a que la recta tangente es la posición límite de la recta secante, su pendiente será el límite de las pendientes de las rectas secantes, es decir: $m_t = \lim_{x\to 1} m_s = \lim_{x\to 1} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ donde m_s es la pendiente de la recta secante genérica calculada en el punto c). Calcular m_t.	Calcula correctamente la pendiente de la recta tangente	Calcula de manera regular la pendiente de la recta tangente	Calcula incorrectamente la pendiente de la recta tangente
	Tarea 2) Si la velocidad instantánea es $v = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ¿Cuál es la velocidad instantánea en t=1?	Calcula correctamente la velocidad instantánea en t=1 con sus unidades correspondientes	Calcula de manera regular la velocidad instantánea en t=1 u olvida las unidades.	Calcula incorrectamente la velocidad instantánea en t=1
	Tarea 3) Se define como razón de cambio instantánea en un valor P = a, como el límite de las razones de cambio promedio cuando el intervalo tiene longitud tendiendo a cero; es decir, $rci = \lim_{\Delta P\to 0} \frac{\Delta V}{\Delta P}$	Calcula correctamente la razón de cambio instantánea con sus unidades correspondientes	Calcula de manera regular la razón de cambio instantánea u olvida sus unidades.	Calcula incorrectamente la razón de cambio instantánea

Explicar el significado de razón de cambio instantáneo en funciones y en diferentes contextos (H4)	Tarea 1) Explicar el significado del límite recién calculado	Explica correctamente el significado del cálculo recién realizado	Explica de manera regular el significado del cálculo recién realizado	Explica incorrectamente el significado del cálculo recién realizado
	Tarea 2) Explicar el significado del límite recién calculado	Explica correctamente el significado del cálculo recién realizado	Explica de manera regular el significado del cálculo recién realizado	Explica incorrectamente el significado del cálculo recién realizado
	Tarea 3) Explicar el significado del límite recién calculado	Explica correctamente el significado del cálculo recién realizado	Explica de manera regular el significado del cálculo recién realizado	Explica incorrectamente el significado del cálculo recién realizado

Tabla 3. Rúbrica habilidades Actividad 2

Registros de representación ACTIVIDAD 2 DE LÍMITE	
Tarea 1) Dado en registro gráfico ● Trazar las rectas secantes que pasan por Q1P, Q2P, Q3P, Q4P ● Se define recta tangente a una función en un punto como la posición límite de las rectas secantes trazadas desde un punto móvil Q a un punto fijo P de la curva. Teniendo en cuenta esta definición trazar en forma aproximada la recta tangente a la función en el punto P.	Tratamiento en ● RG (gráfico de diferentes rectas) Conversión de ● RV a RG (al identificar lo que es recta tangente y luego graficarla
Tarea 3) Dada en registro numérico ● Para realizar el cálculo de la variación instantánea los alumnos debían obtener la fórmula analítica de la función	Conversión entre representaciones: ● RN a RA (escriben la función que relaciona las variables)

Tabla 4. Rúbrica de registros de representación Actividad 2

2.6.1.3. Actividad 3 de Derivada

Análisis preliminar de habilidades ACTIVIDAD 3 DE DERIVADA				
Habilidad	**Tarea e ítems**	**Bien**	**Regular**	**Mal**
	Tarea 1 a) calcular recta tangente paralela a	Calcula la función derivada de la	Calcula la derivada pero tiene	Calcula mal la derivada.

	la recta y = 8x	función dada en forma correcta	un error mínimo en el cálculo	
Identificar rci en contexto (H2)	Tarea 2 a) Calcular la velocidad en t = 2	Identifica la velocidad como la derivada y deriva bien, reemplazando t por 2 con la unidad correspondiente	Deriva y reemplaza, pero no da unidades. O deriva mal y reemplaza dando unidades	No deriva o deriva mal, reemplaza mal y no da las unidades correspondientes.
Calcular la rci (H3)	Tarea 2 b) Hallar el instante para el cual v(t) = 7,2 m/s	Identifica la velocidad como derivada, deriva bien e iguala v(t) a 7,2, realizando el despeje en forma correcta (con unidades)	Identifica la velocidad como derivada pero se equivoca al derivar o al despejar o no indica unidades.	No identifica la velocidad como la derivada o no hace el ejercicio.
	Tarea 3 b) Calcular el cambio instantáneo por definición y por regla de derivación	Identifica la rci con la derivada de la función y la calcula bien de las dos maneras	Identifica la rci con la derivada pero se equivoca o por definición o por regla de derivación	No identifica la rci como la derivada.
Calcular rcp en registro analítico (H3)	Tarea 3 b) Calcular el valor de P para el cual la rci es igual a la rcp en [2,6]	Calcula bien la rcp en el intervalo dado	Plantea bien la rcp pero hace una cuenta mal.	Plantea mal la rcp
Aplicar el concepto de derivada en diferentes contextos (H5)	Tarea 1 a) Calcular la recta tangente paralela a y = 8x	Una vez que deriva iguala la derivada a 8, realizando el despeje correspondiente	Iguala la derivada a 8 pero no despeja bien.	Iguala la derivada a 8 y no despeja o no iguala la derivada a 8.
	Tarea 3 b) Calcular el valor de P para el cual la rci es igual a la rcp en [2,6]	Iguala la función derivada obtenida a la rcp calculada y despeja P	Iguala la función derivada obtenida a la rcp calculada y no despeja o despeja mal	No iguala la rcp obtenida con la derivada.

Explicar en forma verbal lo que significa la rci o rcp (H4)	Tarea 3. c) Interpretar gráficamente la situación anterior.	Pretendemos que además del gráfico los alumnos expliquen el significado geométrico de los cálculos realizados	Explica en forma regular cada uno de los resultados o explica uno solo.	Explica mal lo obtenido.

Tabla 5. Rúbrica de habilidades Actividad 3

Registros de representación ACTIVIDAD 3 DE DERIVADA	
Tarea 1) Dado en registro analítico ● Graficar la recta o rectas halladas y la función dada.	Conversión ● RA a RG (Gráfico de la situación planteada)
Tarea 2) Dada en registro analítico ● Calcular la función derivada	Tratamiento en: ● RA (función derivada) Conversión de ● RA a RG (gráfico de s(t) y v(t))
Tarea 3) Dada en registro analítico ● Graficar la situación estudiada	Conversión de ● RA a RG cuando grafica la situación planteada en el problema.

Tabla 6. Rúbrica de registros de representación Actividad 3

2.6.2. Ayudas u orientaciones dadas durante la experiencia

Pusimos en consenso las orientaciones a brindar a los alumnos durante el desarrollo de la experiencia. En la primera actividad lo hicimos en la hoja de trabajo, junto a los enunciados de las tareas. Al observar que muchos alumnos no leían las mismas, optamos por escribirlas en el pizarrón y en algunos casos explicarlas en forma verbal.

Detallamos a continuación cada una de ellas
Actividad 1
(Explicitadas en la hoja de actividades)

AYUDAS

- ¿Qué es un cambio en la variable independiente? Es la diferencia entre un estado final y un estado inicial, en símbolos $\Delta x = x_1 - x_0$. Estos cambios pueden ser positivos o negativos. En el caso del tiempo lo simbolizamos $\Delta t = t_1 - t_0$ y si tenemos en cuenta que el tiempo transcurre, este cambio será siempre positivo.
- ¿Qué es un cambio en la variable dependiente? Si la variable x pasa del valor x_0 al valor x_1, la función también cambia, pasando de $f(x_0)$ a $f(x_1)$, con lo cual el cambio para la variable dependiente es $\Delta y = f(x_1) - f(x_0) = y_1 - y_0$
- Si estamos en el contexto del problema de movimiento $\Delta s = s(t_1) - s(t_0)$

Actividad 2
(Explicitados en el pizarrón)

AYUDAS

- Los modelos son los mismos que trabajamos en la ACTIVIDAD 1
- Explicar equivalencia entre $x \to x0$ y $\Delta x \to 0$ para TAREA 1
- Explicar que dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando x.y=k siendo k la constante de proporcionalidad. (TAREA 3)
- Si no ven bien los números del gráfico de la Tarea 3 usen los números de la tabla para hallar la fórmula de la función.

Actividad 3
(Teniendo en cuenta la experiencia piloto, solo hemos orientado en la tarea 3, pero solo en uno de los cursos donde se realizó la experiencia)

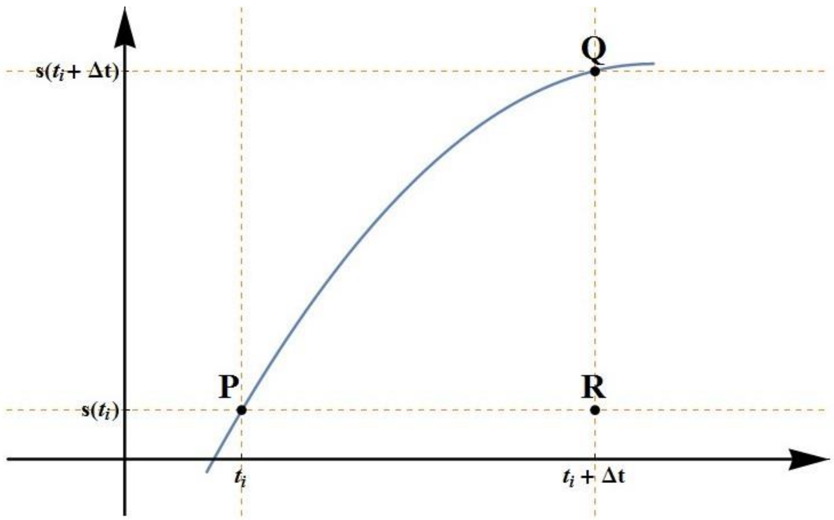
- Solo en la tarea 3 hemos hecho referencia que tengan en cuenta la recta secante trazada por los extremos del intervalo comparada con la recta tangente trazada desde el punto donde se solicita la variación instantánea.

2.6.3. Test final sobre el concepto de derivada

Luego de realizada la experiencia tomamos un test final por equipo.Lo diseñamos a fin de evaluar el aprendizaje del concepto de derivada desde ideas de variación. Cada consigna estuvo presentada en diferentes registros de representación e involucrando los mismos contextos de variación que las actividades.Los alumnos lo contestaron en forma particular manteniendo los equipos de trabajo, luego de la actividad 3y desde un formulario Google. Lo brindamos a continuación:

TEST SOBRE EL CONCEPTO DE DERIVADA

TAREA 1
La siguiente gráfica corresponde a s(t) y representa la variación de la distancia respecto del tiempo de un cuerpo en movimiento. Observar la gráfica y responder las preguntas:



Pregunta 1:¿En qué punto la fórmula $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_i + \Delta t) - s(t_i)}{\Delta t}$ mide la velocidad instantánea?

☐ En P

☐En Q

☐En P y Q

☐En R

Pregunta 2El límite $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$:

☐Se anula

☐ Es un límite infinito

☐ Es cociente de infinitésimos

☐ No se puede calcular

TAREA 2

Sea la función $f : R \to R / f(x) = (x-1)^2$

Pregunta 1: Sean los puntos P(2,1) y Q(3,4) de la función f. El valor ms de la pendiente de la recta secante que une P con Q representa:

☐la razón de cambio instantánea en el intervalo [2,3]

☐ la razón de cambio instantánea en el intervalo [1,4]

☐ la razón de cambio media en el intervalo [2,3]

☐ la razón de cambio media en el intervalo [1,4]

Pregunta 2: ¿En qué punto la función f tiene como tangente a la recta y = -6x+6?

☐En P (-2,9)

☐ En P (-2, 18)

☐ En P (-1,0) y Q (-5,36)

☐ En ningún punto

TAREA 3
La siguiente tabla corresponde a los valores de la variación del volumen de un gas (medido en litros) respecto a la presión (medida en Pascales) en el intervalo [1,10]:

P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V	10	5	$\frac{10}{3}$	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{10}{9}$	1

Pregunta 1: ¿Cuál de las siguientes fórmulas representa la tasa de variación instantánea en un punto?

a) $f'(P)=\frac{10}{P^2}$

b) $f'(P)=-\frac{10}{P^2}$

c) $f'(P)=-\frac{1}{P^2}$

d) $f'(P)=\frac{1}{P^2}$

Pregunta 2: ¿cuál es la variación media del gas si la presión aumenta de 2 a 6 Pascales?

a) $\frac{\Delta V}{\Delta P}=\frac{10\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)}{4} l/P$

b) $\frac{\Delta V}{\Delta P}=\frac{10\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)}{4} P/l$

c) $\frac{\Delta V}{\Delta P}=\frac{10\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)}{4} l/P$

d) $\frac{\Delta V}{\Delta P}=\frac{10\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)}{4} P/l$

2.6.4. Encuesta sobre uso de tecnología

Ya explicamos las limitaciones que tuvimos en la universidad para usar tecnología en el aula. A fin de conocer si los alumnos utilizaron algún dispositivo cuando resolvieron las tareas de matemática y con qué software trabajaron, realizamos una encuesta con formulario Google.

Mostramos las preguntas de la misma:

¿Tenés teléfono celular?

☐ SI

☐ NO

Si la respuesta es SI. ¿Usás alguna aplicación de matemática en la clase?

☐ SI

☐ NO

Si la respuesta es SI ¿Cuál?

……………………………………………………………………………………………………..

¿Por qué elegiste esa aplicación?

……………………………………………………………………………………………………..

¿Tenés notebook o netbook?

☐ SI

☐ NO

Si la respuesta es SI. ¿Usás algún software de matemática en la clase?

☐ SI

☐ NO

Si la respuesta es SI ¿Cuál?

……………………………………………………………………………………………………..

¿Por qué elegiste ese software?

……………………………………………………………………………………………………..

¿Traes la notebook a la facultad?

☐ SI

☐ NO

Si la respuesta es no, por favor decí las razones

……………………………………………………………………………………………………..

2.7. Confiabilidad y validez de la medición

La secuencia de actividades elaborada se basó en tareas de otras investigaciones (ver Anexo II) y en algunas ya usadas en nuestra asignatura. A su vez fue puesta a prueba en el primer año de la investigación con el fin de ajustar consignas y objetivos.
Respecto al test final, algunas de las preguntas fueron extraídas de Dolores (2000) y las otras las pusimos en discusión con el equipo de investigación. Por razones de tiempo no pudimos realizar análisis estadístico para determinar la confiabilidad de dicho test y de la encuesta a los alumnos sobre uso de tecnología en su actividad matemática.

2.8. Métodos de análisis estadísticos

La valoración de las habilidades matemáticas definidas en torno al concepto de derivada la hicimos a través de la corrección de las producciones de los alumnos. Volcamos dichas valoraciones en formularios Google de acuerdo a las tablas presentadas en el apartado 2.6.1. Luego realizamos un análisis estadístico descriptivo con las frecuencias relativas de desempeño para cada habilidad y uso de registros en cada actividad.
De manera similar procedimos con los resultados del test final. En esta oportunidad, al ser una prueba de opción múltiple, efectuamos frecuencias relativas de las diversas posibilidades de respuestas.
Por último, hicimos un análisis similar de la encuesta sobre uso de tecnología en la actividad matemática.

2.9. Resultados

Los resultados de la investigación los dividimos en:

- Marco teórico: fruto de la indagación bibliográfica. El mismo contempló los aspectos:habilidades matemáticas y registros de representación. Exponemos el marco teórico en el Anexo I (punto 5.1.).

Y los obtenidos a través de los instrumentos:

- Secuencia de actividades y análisis preliminar
- Test final sobre el concepto de derivada
- Encuesta a alumnos sobre el uso de tecnología en su actividad matemática.

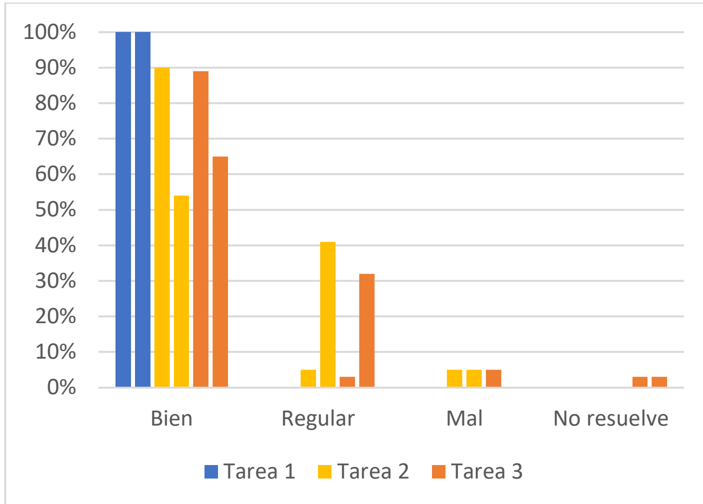
Los niveles de desempeño de las habilidades definidas en nuestro estudio y el uso de registros de representación los valoramos, cuando analizamos las producciones escritas de los alumnos en la secuencia de actividades,de acuerdo con las tablas expuestas en el apartado 2.6.1.
Presentamos los resultados por actividad indicando las frecuencias relativas por desempeño considerando B (bien), R (regular), M (mal) y No (no resuelve) y el gráfico correspondiente. Completamos con una reflexión al respecto en la cual tuvimos en cuenta también las observaciones realizadas por las integrantes del equipo en la puesta en escena y durante las correcciones de las producciones de los alumnos.
Recordamos las habilidades estudiadas:

- Identificar variable independiente y dependiente, dominio e imagen en funciones y en diferentes contextos (H1)
- Identificar y diferenciar las tres nociones fundamentales definidas anteriormente (H2).
- Calcular razones de cambio media e instantáneas por medios numéricos y analíticos (H3).
- Explicar el significado en diferentes contextos (incluyendo el geométrico) de las tres nociones fundamentales (H4).

- Aplicar el concepto en la solución de problemas (H5).

2.9.1. Resultados desempeño de habilidades Actividad 1 de Funciones

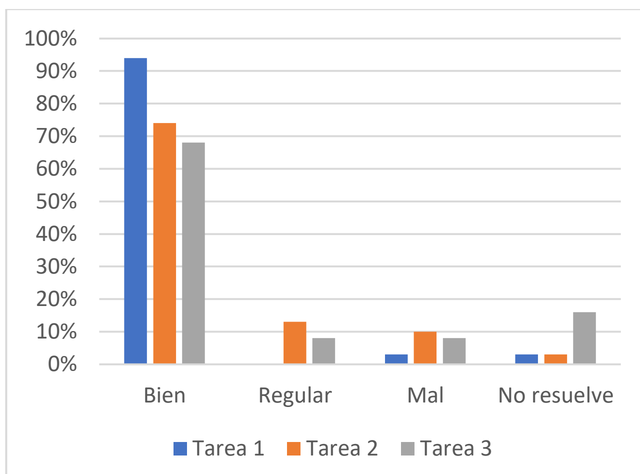
H1	B	R	M	No
Tarea 1	100%			
Tarea 1	100%			
Tarea 2	90%	5%	5%	
Tarea 2	54%	41%	5%	
Tarea 3	89%	3%	5%	3%
Tarea 3	65%	32%		3%



Los alumnos identificaron dominio e imagen de las funciones en los tres contextos. En cuanto a la variable independiente y dependiente en las tareas 2 y 3, encontramos errores en la expresión de la respuesta como, por ejemplo: “la variable dependiente son los metros” o “la variable independiente es t”, sin mencionar qué significaba esa letra ni en qué unidades estaba dada. Estas respuestas las consideramos regular.

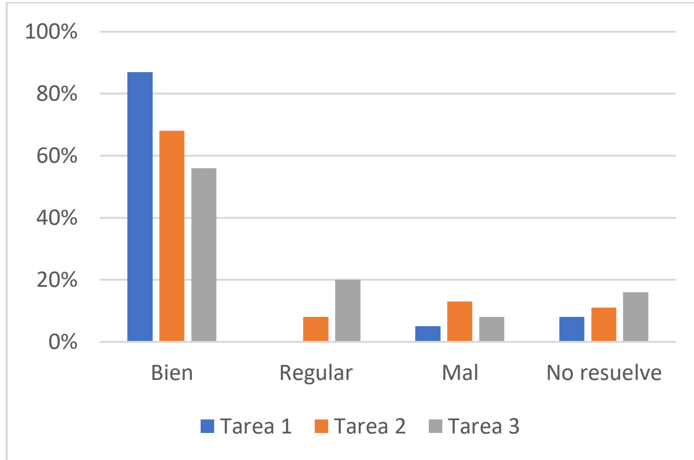
La habilidad H3 que consiste en calcular cambios o razones de cambio, la dividimos en dos partes: una para los cambios de las variables y la otra para el cálculo de las razones de cambio media (en siglas: rcm).

H3	B	R	M	No
Tarea 1	94%		3,%	3%
Tarea 2	74%	13%	10%	3%
Tarea 3	68%	8%	8%	16%



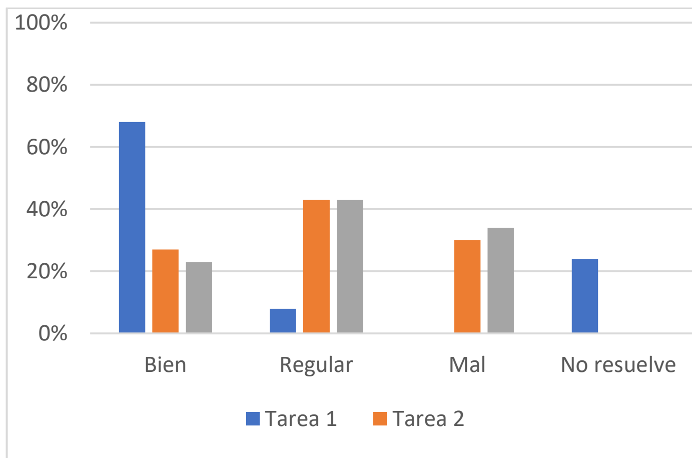
Con más de 65% en los tres casos los alumnos calcularon bien las variaciones de las variables en las tres tareas. Algunos errores fueron no indicar las unidades o no escribir con notación “delta” dichos cambios.

H3 rcp	B	R	M	No
Tarea 1	87%		5%	8%
Tarea 2	58%	18%	13%	11%
Tarea 3	56%	20%	8%	16%



Los alumnos calcularonrcp bien (58% o más), con mayor porcentaje en contexto geométrico. Algunos de los errores fueron no poner las unidades correspondientes, cambiar el nombre de las variables (es decir en vez de Δs poner Δx). En el último problema algunos equipos calcularon al revés las diferencias, lo que produjo resultados positivos en vez de negativos.

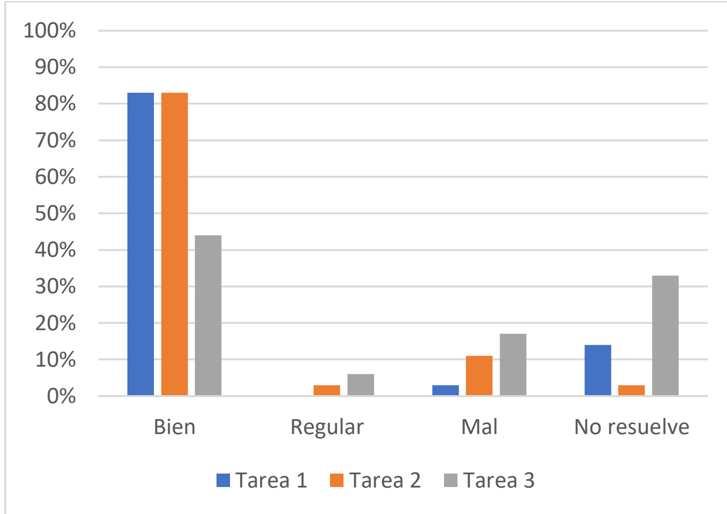
H4 rcp	B	R	M	No
Tarea 1	68%	8%		24%
Tarea 2	27%	43%	30%	
Tarea 3	23%	43%	34%	



La mayoría de los alumnos explicó en forma adecuada el significado de la rcp en contexto geométrico, no así en los otros dos, donde predominó un desempeño regular. Se evidenciaron dificultades en el registro verbal, mostrando una redacción confusa y con escaso manejo del lenguaje coloquial.

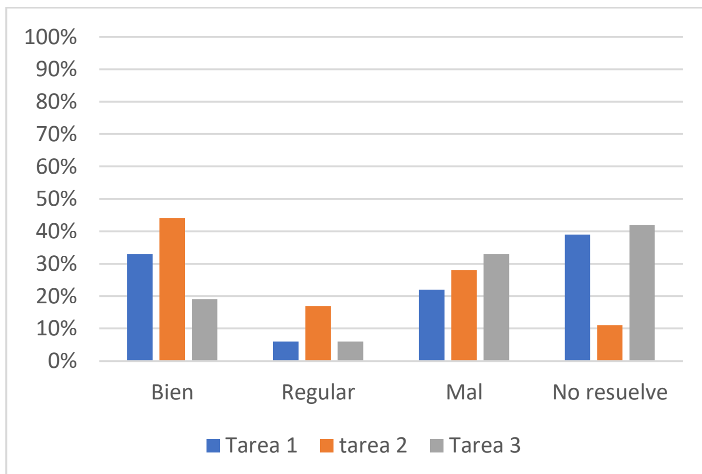
2.9.2. Resultados desempeño de habilidades Actividad 2 de Límite

H3 rcp	B	R	M	No
Tarea 1	83%		3%	14%
Tarea 2	83%	3%	11%	3%
Tarea 3	44%	6%	17%	33%



Calcular rcptuvo buenos niveles de desempeño (83%) en interpretación geométrica y en el contexto físico. En la tareasobre presión de un gas, los niveles no fueron tan buenos, 44% bien y 33% no resolvió la tarea. La mayoría de los alumnos completó la tabla del cálculo de la razón de cambio promedio o media, dejando el resultado sin mostrar la fórmula o los cálculos realizados.

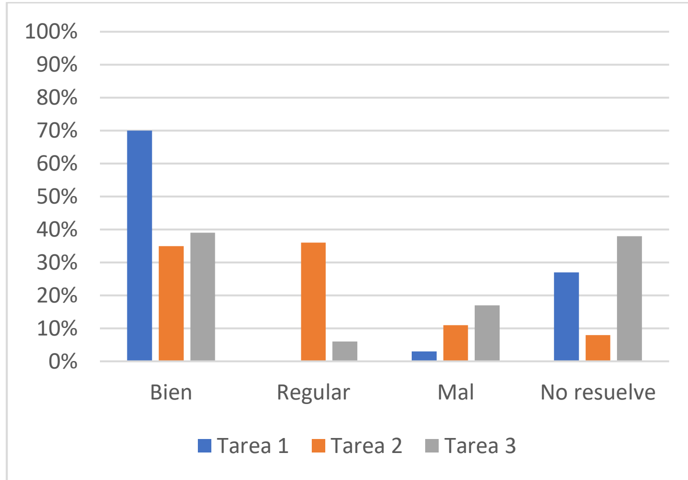
H4 rcp	B	R	M	No
Tarea 1	33%	6%	22%	39%
tarea 2	44%	17%	28%	11%
Tarea 3	19%	6%	33%	42%



La explicación verbal de lo que significaba en cada contexto la rcpno tuvo buen desempeño. Los resultados fueron un poco mejores en el contexto físico (44% bien). En la tarea 3 el 75% de los equipos no expresó el significado de los cálculos realizados o su expresión estaba mal.

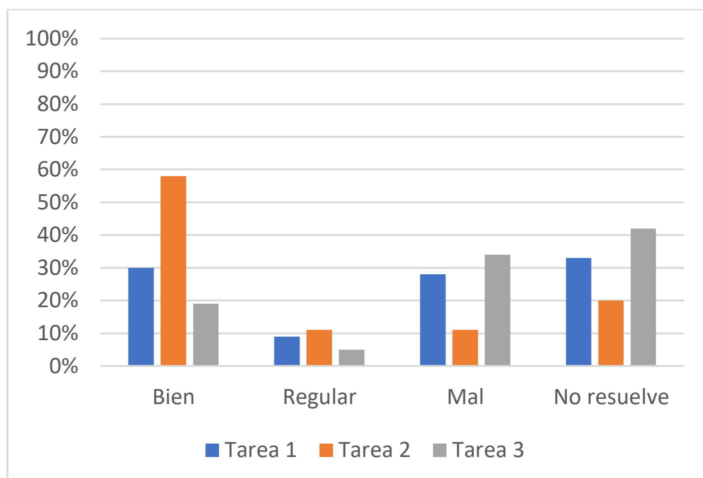
Observamos comportamientos similares al de la actividad 1 respecto a la muy mala redacción y escaso uso de un lenguaje fluido.

H3 rci	B	R	M	No
Tarea 1	70%		3%	27%
Tarea 2	35%	36%	11%	8%
Tarea 3	39%	6%	17%	38%



El cálculo de la razón de cambio instantánea (en siglas: rci)fue bueno en la primera tarea (70%), si bien hubo mucha orientación de los docentes durante la experiencia. En la tarea 2 el error más común fue omitir las unidades de la velocidad instantánea o realizar los cálculos sin escribir que se trataba de un límite, de allí el alto porcentaje de desempeño regular. La tarea 3 fue la que trajo más inconvenientes. Muchos alumnos no la realizaron.

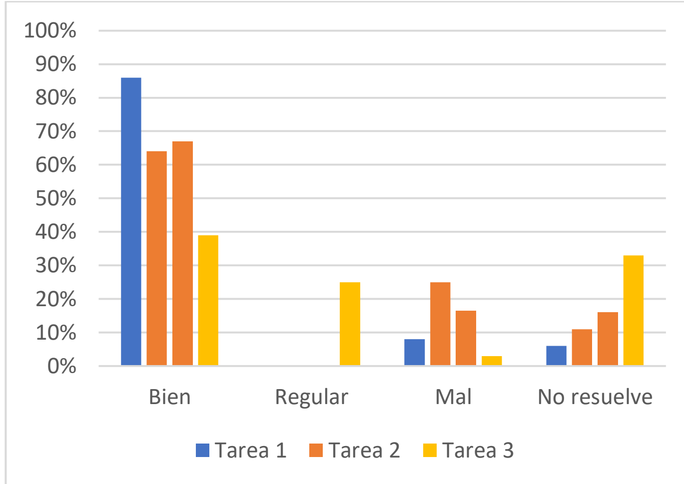
H4 rci	B	R	M	No
Tarea 1	30%	9%	28%	33%
Tarea 2	58%	11%	11%	20%
Tarea 3	19%	5%	34%	42%



La explicación de lo que significa la rci en cada contexto tuvo nivel aceptable en el contexto físico (58%). En las otras dos tareas los alumnos prácticamente no pudieron explicar en forma verbal el significado del cálculo realizado, a pesar de las explicaciones y orientación desde la consigna y en la clase.

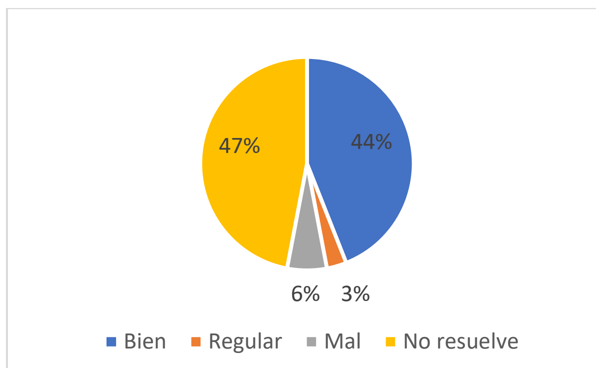
2.9.3. Resultados desempeño de habilidades Actividad 3 de Derivada

H2 y H3 rci	B	R	M	No
Tarea 1	86%		8%	6%
Tarea 2	64%		25%	11%
Tarea 2	67%		17%	16%
Tarea 3	39%	25%	3%	33%



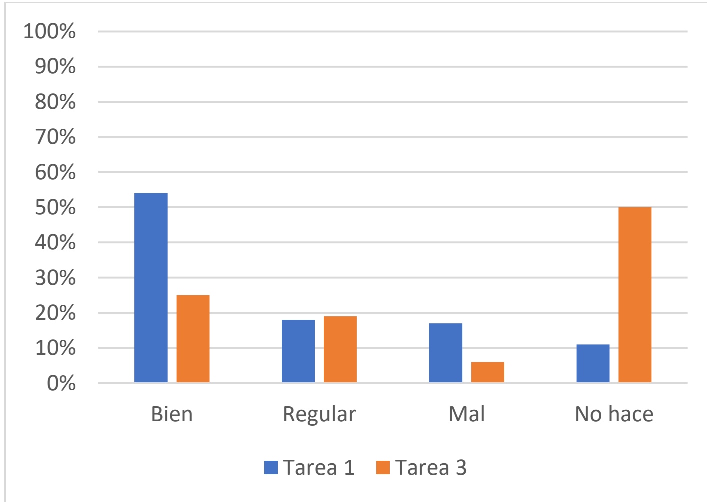
La mayoría de los alumnos cálculo e identificó de rci en contexto geométrico bien (86%), y también en el contexto físico, calculando bien la velocidad instantánea (tanto para calcular la velocidad en el instante t = 2, como para encontrar el instante donde la velocidad es 7,2 m/s). En el caso de la tarea sobre presión, varios equipos no la resolvieron (33%). En esta oportunidad solicitamos el cálculo de rci por regla y por definición. El porcentaje de 25% de desempeño regular fue porque sólo la calcularon por regla de derivación.

H3 rcp	B	R	M	No
Tarea 3	44%	3%	6%	47%



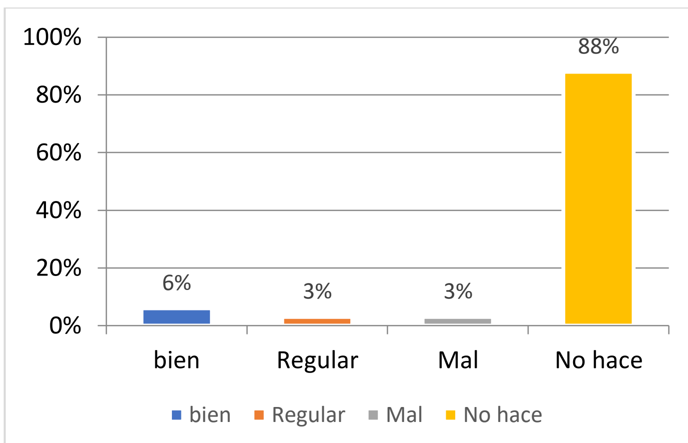
En esta actividad solamente en la tarea 3 los alumnos tenían que calcular la rcp. El 47% no lo realizó y menos de la mitad tuvo un buen desempeño.

H5	B	R	M	No
Tarea 1	54%	18%	17%	11%
Tarea 3	25%	19%	6%	50%



En la tarea 1 más de la mitad de los equipos pudo igualar la función derivada a 8 (pendiente de la otra recta) y calcular los valores correspondientes. En la tarea 3 el 50% no efectuó lo solicitado. Del resto, sólo la mitad logró igualar la derivada al cociente incremental en el intervalo [2,6] y realizar el despeje correspondiente. El 19% de desempeño regular se debió a que plantearon la igualdad, pero despejaron en forma errónea.

H4	B	R	M	No
Tarea 3	6%	3%	3%	88%

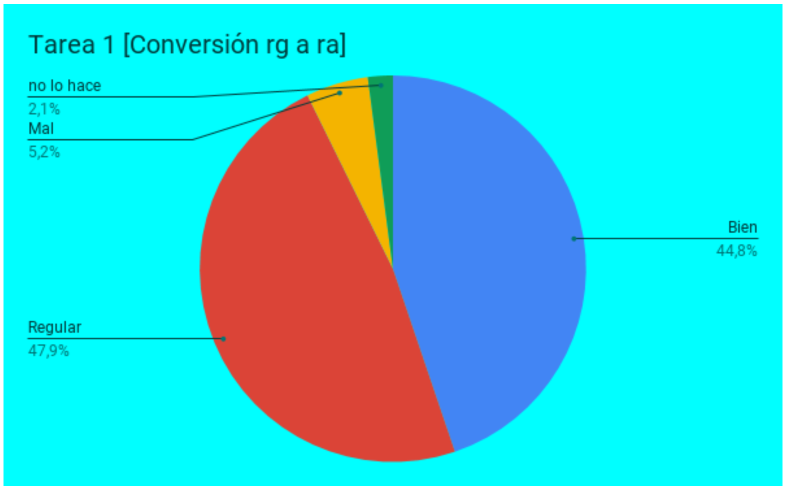


El 88% de los equipos no pudo realizar la tarea encomendada.

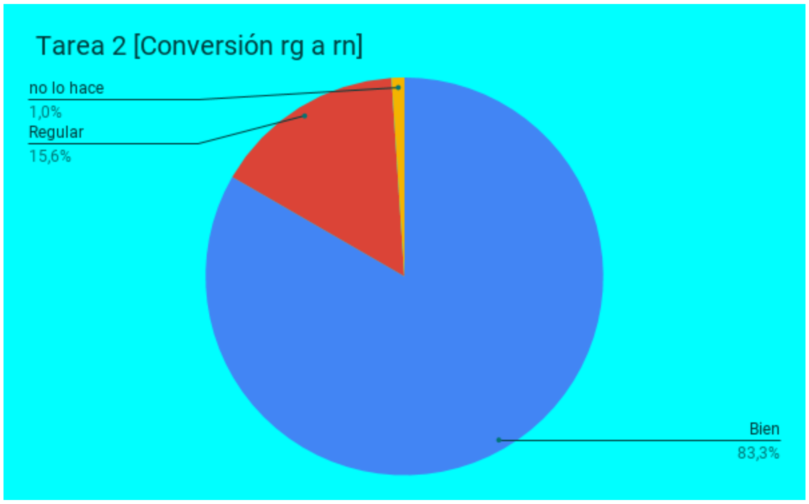
2.9.4. Resultados sobre registros de representación

2.9.4.1 Actividad 1 Funciones

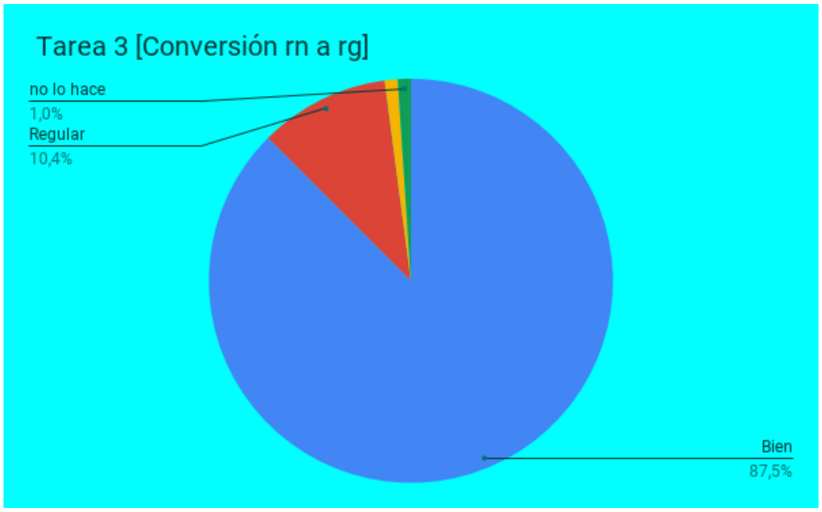
En este caso mostraremos los resultados obtenidos para cada tarea en diferentes gráficos, ya que se trata de conversiones diferentes.



Los alumnos debían expresar la función dada en registro gráfico en registro analítico. La valoración regular delaproximadamente 48%de los alumnos tuvo la justificación en que expresaron dicha función en forma incompleta. Es decir sólo escribían la fórmula y no la terna completa correspondiente a la función cuadrática. Solo un 5% no pudo hallar la expresión analítica de la parábola en forma correcta y un 2% no respondió.



En esta oportunidad se solicitaba armar una tabla con los puntos dados en un gráfico. El 83 % de los estudiantes pudo armar la tabla solicitada en forma correcta a partir de los puntos observados en la gráfica. El 15,6% que respondió en forma regular fue porque al armar la tabla usaron como variables “x” e “y” en lugar de “t” y “s”, por otra parte, olvidaron considerar el par ordenado (0;0).



En la tarea 3 pedimos graficar a partir de los datos de una tabla. El 87,5 % realizó el gráfico en forma correcta y el 10,4% que lo hacen en forma regular fue porque no colocaron nombres a los ejes o bien usaron como variables “x” e “y” y no las del problema en contexto (P para presión y V para volumen).

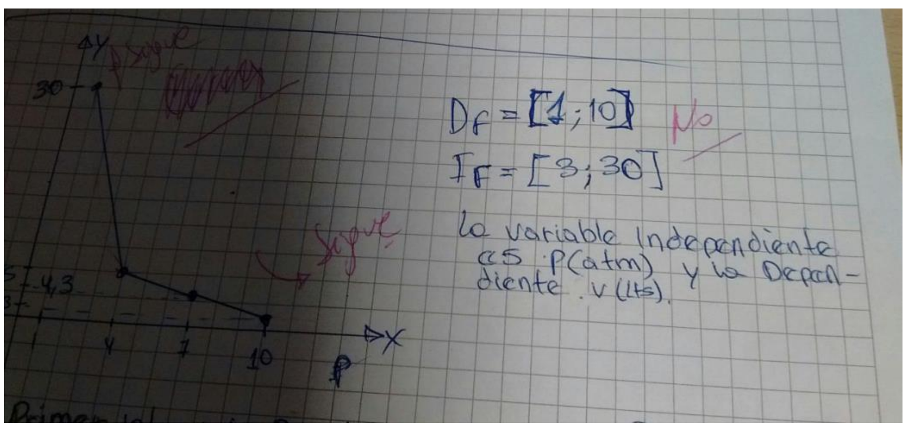


Imagen que muestra la denominación con “x” e “y” que ponen en los ejes cartesianos

2.9.4.2 Actividad 2 Límites

En este caso pedimos trazar en el gráfico dado las rectas secantes y una “posible” recta tangente, luego de brindar la definición de la misma. En general obtuvimos altos porcentajes de bien (casi un 85%) y los que se desempeñaron en forma regular (8,7%) fue por no trazar todas las rectas secantes solicitadas o bien por no usar diferentes colores para identificarlas (ver imagen debajo que ejemplifica esto). Solo un 5% no hace lo solicitado y 1%lo hace mal.

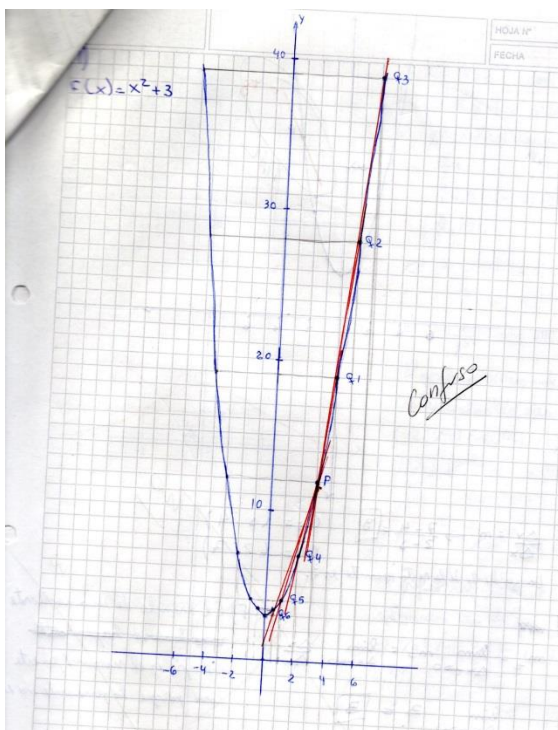
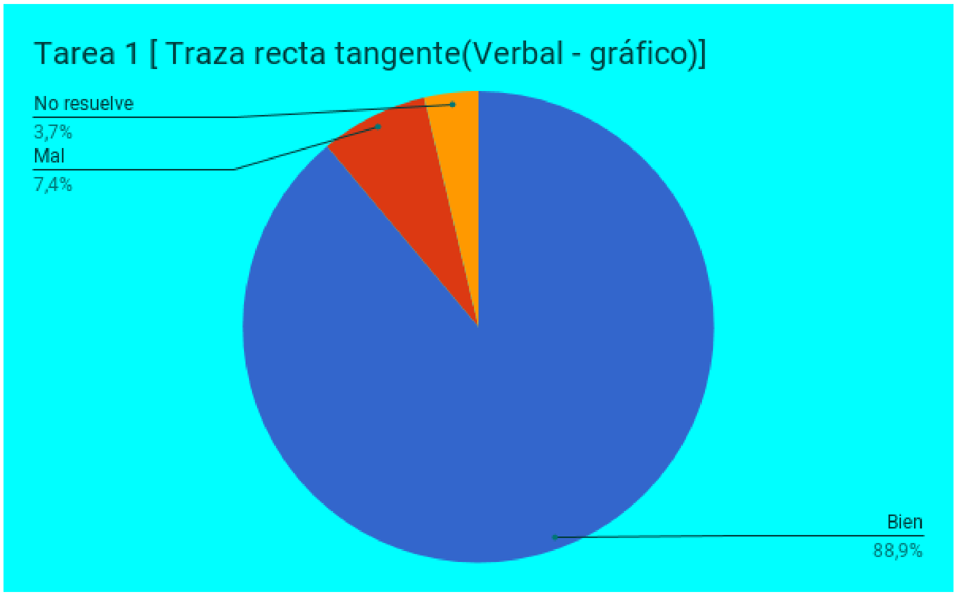


Imagen que muestra poca precisión o demarcación de las diferentes rectas secantes solicitadas



En este caso si hay conversión ya que explicamos en forma verbal que se entiendo por recta tangente y deben trazarla, es decir convertir lo expresado en lenguaje verbal al gráfico. Un alto porcentaje, casi un 99% traza bien la recta tangente algunos pocos no lo hicieron o trazaron rectas que no correspondían (ver imagen de una producción que ejemplifica esto).

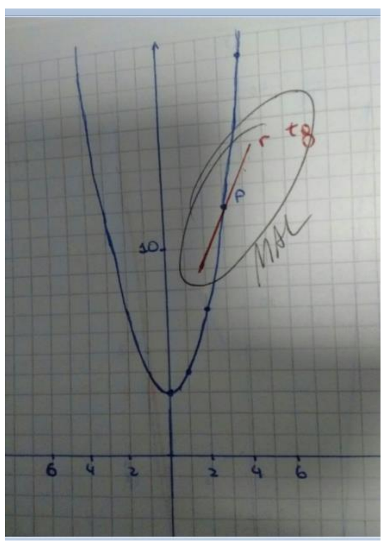
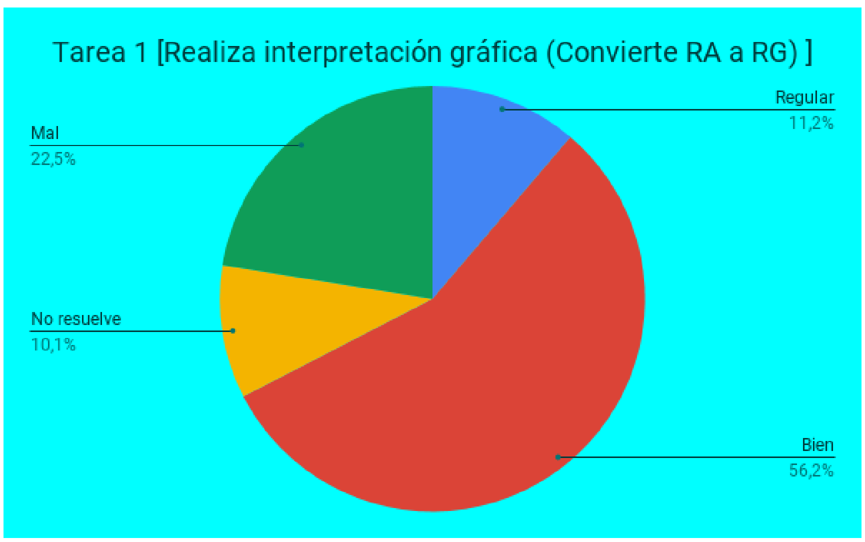


Imagen que muestra que interpretaron como recta tangente

En este caso nos parece importante el análisis de la conversión del registro ya que no lo solicitamos como en los otros casos en los enunciados, sino que el alumno tuvo que encontrar la fórmula para poder calcular las variaciones solicitadas.

2.9.4.3 Actividad 3 Derivadas



En esta oportunidad, si bien se le solicitó que graficaran la situación, se evaluó con qué grado de detalle lo realizaron. Un 56% lo hizo en forma completa es decir, graficaron correctamente la función polinómica, y las dos rectas involucradas en la situación a resolver que debían ser paralelas. En muchos casos de los considerados regular algunos de estos aspectos no fueron representados ofueron graficados en forma incorrecta (ver imagen siguiente que ejemplifica este aspecto)

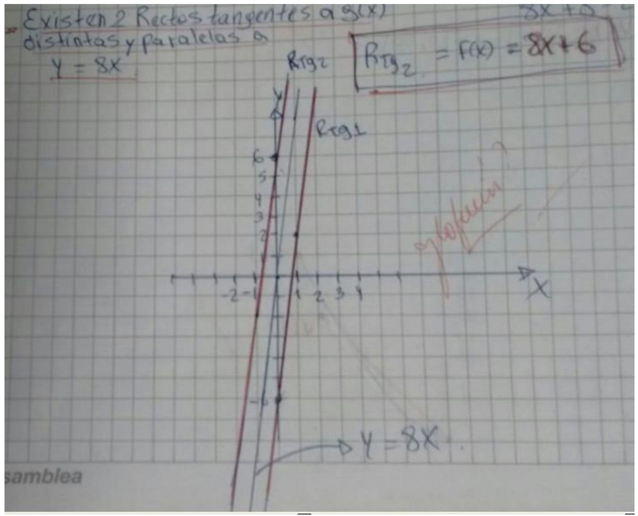
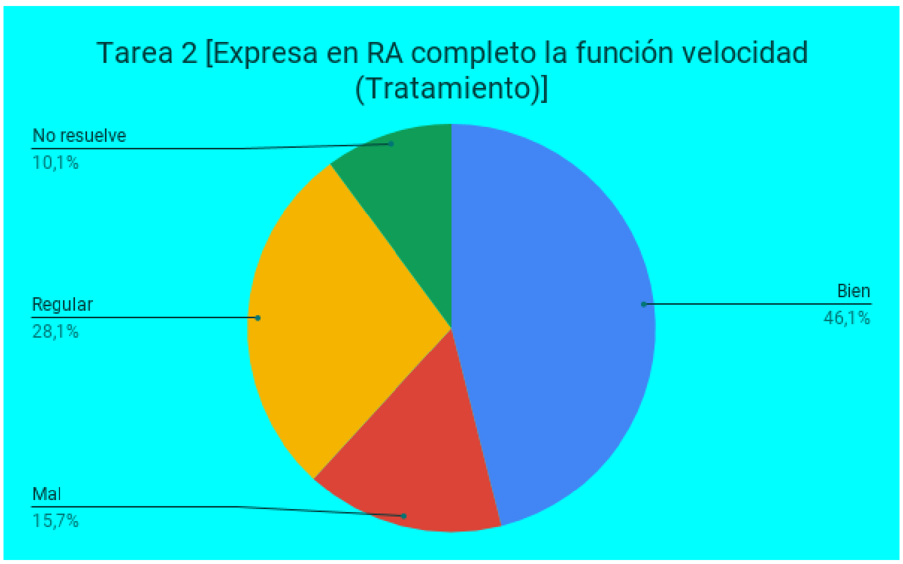
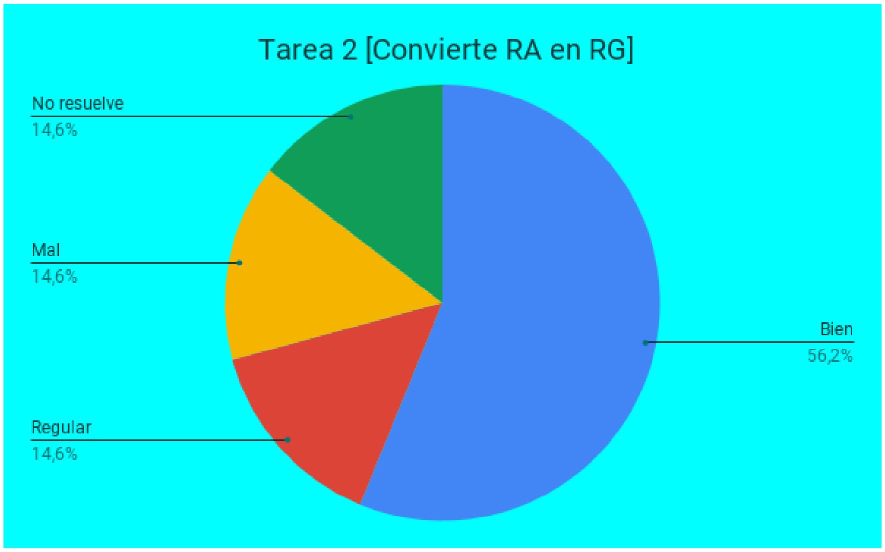


Imagen que denota la falta de representación de la función polinómica



En esta oportunidad analizamos el proceso de “tratamiento” que realiza el estudiante, al expresar la función velocidad en forma completa, es decir no realiza conversión entre registros diferentes, sino que debe elaborar una conclusión en el mismo registro analítico que viene trabajando. En general los que respondieron regular (28%) fue porque al escribir la función velocidad, no tuvieron en cuenta el dominio en el contexto del problema. Los que respondieron mal (15%), fue porque no pudieron encontrar la fórmula o bien dejaban expresado el límite del cociente incremental y no concluían su cálculo.



En este caso se solicitó expresamente la conversión de registros, un 56% lo hace en forma correcta, los que contestan en forma Regular (casi un 15%) fue porque al graficar o bien no tuvieron en cuenta el dominio y la imagen en el contexto del problema, no le asignaron nombres a los ejes o no usaron las variables del problema sino que recurrieron a “x” e “y” (ver imagen debajo que ejemplifica este aspecto) En general los que no resolvierono graficaron mal se corresponden con aquellos estudiantes que no lograron obtener la función velocidad antes solicitada.

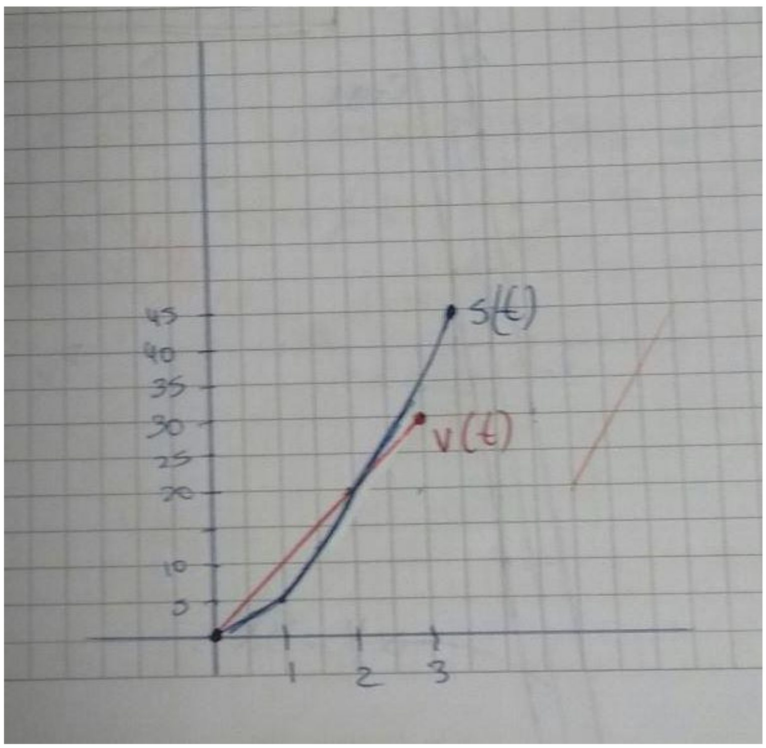
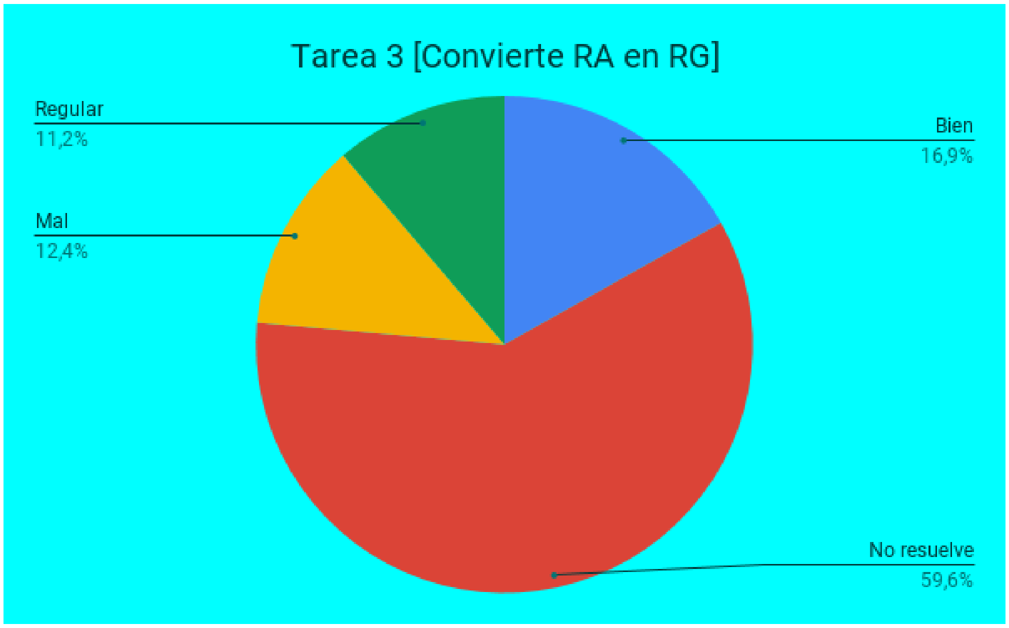


Imagen que muestra la falta de denominación a las variables en los ejes cartesianos



Casi una 60% de los alumnos no realizó el gráfico.
El 17% que consideramos bien al menos logró graficar la función y ambas rectas (secante y tangente) aunque sin explicaciones que vinculen sus pendientes. Dentro del 11% que consideramos regular realizaron gráficos poco precisos, por ejemplo las rectas no resultaron paralelas (ver imagen a continuación).

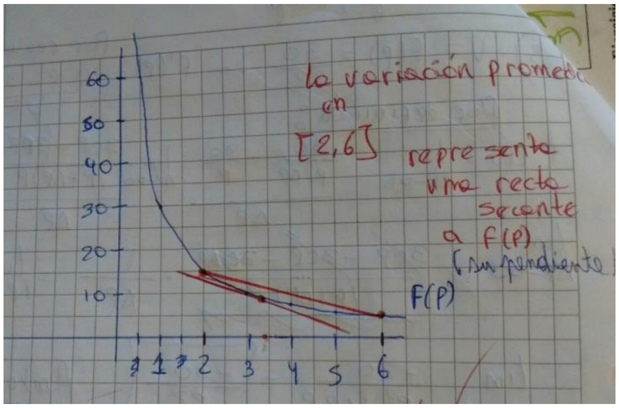


Imagen donde se observa que las rectas no son paralelas

2.9.5. Resultados test final

El objetivo del test era valorar el aprendizaje del concepto de derivada luego de aplicar la secuencia de actividades enfocadas al desarrollo de las habilidades matemáticas ligadas al concepto. De esta manera mostramos los resultados de acuerdo a las respuestas correctas o no en cada uno de los ítems. Haremos referencia a las consignas dadas en el punto 2.6.2. Destacamos en rojo la respuesta correcta.

Consigna	Respuesta correcta	Resultados obtenidos
TAREA 1 (dada en registro gráfico)		

<table>
<tr><td>¿En qué punto la fórmula $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_i + \Delta t) - s(t_i)}{\Delta t}$ mide la velocidad instantánea?</td><td>En P</td><td><table><tr><td>En P</td><td>58%</td></tr><tr><td>En Q</td><td>3%</td></tr><tr><td>En P y Q</td><td>22%</td></tr><tr><td>En R</td><td>17%</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>El límite $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$:
Se anula
Es un límite infinito
Es cociente de infinitésimos
No se puede calcular</td><td>Es cociente de infinitésimos</td><td><table><tr><td>Cociente de infinitésimos</td><td>67%</td></tr><tr><td>se anula</td><td>6%</td></tr><tr><td>no se puede calcular</td><td>8%</td></tr><tr><td>es un límite infinito</td><td>19%</td></tr></table></td></tr>
<tr><td colspan="3">TAREA 2 (dada en registro analítico)</td></tr>
<tr><td>Sean los puntos P(2,1) y Q(3,4) de la función f. El valor ms de la pendiente de la recta secante que une P con Q representa:

la rci en [2,3]
la rci en [1,4]
la rcp en [2,3]
la rcp en [1,4]</td><td>Razón de cambio media en [2,3]</td><td><table><tr><td>Rcp en [2,3]</td><td>78%</td></tr><tr><td>Rci en [2,3]</td><td>17%</td></tr><tr><td>Rci en [1,4]</td><td>5%</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>¿En qué punto la función f tiene como tangente a la recta y = -6x+6?
En P (-2,9)
En P (-2, 18)
En P (-1,0) y Q (-5,36)
En ningún punto</td><td>En ningún punto</td><td><table><tr><td>en P (1,0) y Q (-5,36)</td><td>44%</td></tr><tr><td>En P(-2,18)</td><td>6%</td></tr><tr><td>En P(-2,9)</td><td>14%</td></tr><tr><td>En ningún punto</td><td>36%</td></tr></table></td></tr>
<tr><td colspan="3">TAREA 3 (dada en registro numérico)</td></tr>
<tr><td>¿Cuál de las siguientes fórmulas representa la tasa de variación instantánea en un punto?
a) $f'(P) = \frac{10}{P^2}$
b) $f'(P) = -\frac{10}{P^2}$
c) $f'(P) = -\frac{1}{P^2}$
d) $f'(P) = \frac{1}{P^2}$</td><td>Opción b)</td><td><table><tr><td>Opción a</td><td>39%</td></tr><tr><td>Opción b</td><td>58%</td></tr><tr><td>Opción d</td><td>3%</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>¿Cuál es la variación media del gas si la presión aumenta de 2 a 6 Pascales?</td><td>Opción c)</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
a) $\frac{\Delta V}{\Delta P}=\frac{10\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)}{4}l/P$
b) $\frac{\Delta V}{\Delta P}=\frac{10\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)}{4}P/l$
c) $\frac{\Delta V}{\Delta P}=\frac{10\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)}{4}l/P$
d) $\frac{\Delta V}{\Delta P}=\frac{10\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)}{4}P/l$
</td>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>opción a</td><td>17%</td></tr>
<tr><td>opción b</td><td>14%</td></tr>
<tr><td>opción c</td><td>64%</td></tr>
<tr><td>Opción d</td><td>5%</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

2.9.6. Resultados encuesta sobre uso de tecnología en la actividad matemática

Contestaron la encuesta 151 alumnos a través de un formulario Google.
El 100% de los alumnos contestó tener teléfono celular y el 56% usa alguna aplicación de matemática para realizar su tarea en clase o en forma particular.
En cuanto a las aplicaciones que utilizan los alumnos tenemos:

- Geogebra
- Mathematics
- Grapher
- Desmos
- WolframAlpha
- Symbolab
- MalMath
- Calculator
- Photomath

Sobre las respuestas de la elección escribimos algunas:

- Geogebra: porque lo usaron en la escuela, porque fue recomendada por un docente, porque le resulta fácil su uso, porque lo ayuda a graficar y controlar lo que hizo solo, porque es gratuita.
- Mathematics: recomendada por un conocido o compañero, les resulta de fácil uso, la consideran completa para graficar y realizar otras acciones, es una de las más completas, porque fue la primera que encontré en el PlayStore.
- Grapher/ Desmos: porque son muy buenos graficadores, me permiten controlar si hago los gráficos bien.
- WolframAlpha: fue seleccionada porque es la recomendada por la profesora de lacátedra. A su vez los alumnos tienen que hacer un trabajo práctico con el software WolframMathematica, y esta aplicación es más rápida que en la computadora el Mathematica.
- Symbolab: porque muestra paso a paso la solución, porque es completa e incluye graficador.

- MalMath: porque permite graficar varias funciones en un mismo par de ejes, porque provee buena información gráfica.
- Photomath: forma rápida de verificar si los resultados son correctos, me ayuda a plantear el problema, es fácil de usar.

El 61% de los alumnos tiene computadora personal. De los que tienen, el 90% no usa software de matemática en clase porque no la lleva a la universidad. El 10% que usa se divide entre Wolfram (versión online o el software) y el Geogebra.
Respecto a las razones de por qué no llevan la notebook a la universidad, la más indicada es la falta de seguridad en el transporte público y en la calle cuando se trasladan. También algunos indican que no les resulta cómodo trasportarla por el peso de la máquina. Otros estudiantes manifiestan que no le encuentran utilidad llevarla a clase. Otros indican que los bancos en las aulas son pequeños para poder poner la computadora y que no hay enchufes para proveer energía. Algunos reconocen que otros miembros de la familia la necesitan y por lo tanto ellos no la pueden usar.

2.10. Discusión

Con las actividades diseñadas nos propusimos poner al alumno en camino a la construcción del concepto de derivada a fin de que paso a paso logre el aprendizaje del mismo. Cada actividad favorecía el desempeño de las habilidades matemáticas que consideremos son necesarias desarrollar para poder lograr el aprendizaje.
Las tareas fueron muy guiadas por diversas razones. En primera instancia porque la construcción del concepto no es simple. Si un alumno solo conoce las funciones y el concepto de límite es muy poco probable que por sí solo al preguntarle por la velocidad de un objeto conociendo su espacio recorrido realice el límite de la velocidad media. En la historia de la matemática se necesitaron siglos para que la derivada se defina tal cual la conocemos en nuestros días. Debemos guiarlos a través de las tareas y de las orientaciones en clase.
Otra razón es el nivel de conocimientos que tienen los alumnos con los que trabajamos. En general son ingresantes o transitaron solamente un cuatrimestre en la universidad. Sus conocimientos previos y destrezas matemáticas son pobres, así como también el lenguaje que emplean y la manera en que presentan sus producciones.
A pesar de estos inconvenientes y gracias al trabajo arduo en el aula, las orientaciones dadas durante la resolución de las actividades y la devolución luego de las mismas, dieron sus frutos. Observamosque, si las “ayudas” lasescribíamos al final de la hoja entregada a los estudiantes con las consignas de las tareas, no las leían, teniendo que remarcarles que por favor lo hagan. De allí que algunas orientaciones se explicitaron en el pizarrón y quedaron escritas durante todo el desarrollo de la actividad.
El nivel de desempeño de las habilidades como H3y H4 (calcular la razón de cambio media e instantánea y explicar dichos cálculos en forma verbal) tuvieron mejor nivel de desempeño en el contexto físico. Quizás porque es el más cercano o familiar para los estudiantes.
Respecto al contexto geométrico, desde la experiencia y los resultados de varias investigaciones, sabemos que interpretar la derivada de una función en un punto como pendiente de la recta tangente conlleva serias dificultades. En nuestro caso y favorecidos por una consigna guiada paso a paso, logramos desempeños aceptables.

El contexto de la presión de un gas fue aquel en el que el desempeño de habilidades tuvo niveles más bajos. Quizás porque la función era la más complicada (a pesar de ser muy sencilla), por no conocer el fenómeno físico.
Consideramos que para los alumnos no resultó simple “transferir” el mismo concepto como, por ejemplo, la razón de cambio media, en tres contextos distintos. A su vez tuvieron dificultades para explicar el significado de lo que estaban realizando.
A pesar de los problemas expuestos el test final tuvo buenos resultados. Tengamos en cuenta que fue un test de opción múltiple, en el cual no había posibilidades de respuestas abiertas ni de expresar alguna explicación. Las respuestas correctas tuvieron frecuencias relativas mayores aproximadamente al 60% de los equipos salvo en una. Nos referimos al ítem en el cual preguntamos en qué punto de la curva dada la recta tangente era $y = 6x+6$. La respuesta correcta era en “ningún punto” y obtuvo el 36%.

3. Conclusiones

Pensamos que todo el trabajo realizado nos permitió dar respuesta a los objetivos planteados y a las preguntas de investigación.
La indagación bibliográfica y nuestras investigaciones previas sobre habilidades matemáticas nos permitieron establecer qué habilidades sobre el concepto de derivada eran factibles de ser desarrolladas para favorecer el aprendizaje del mismo. Diseñamos una secuencia de actividades pensando en las habilidades establecidas y en los registros de representación. Pudimos valorar el nivel de desempeño de los alumnos sobre dichas habilidades en las producciones que realizaron a lo largo de la experiencia. Entonces pudimos lograr los dos objetivos generales del proyecto:

Explorar el desarrollo de habilidades matemáticas ligadas al concepto de derivada en el Cálculo de una variable cuando los alumnos resuelven actividades que favorecen el tratamiento y la articulación de diferentes sistemas de representación.

Contribuir al estudio de habilidades matemáticas vinculadas al concepto de derivada.

Con esto dimos respuesta al objetivo específico:

Determinar las habilidades matemáticas ligadas al concepto de derivada que evidencien aprendizaje de este concepto.

En cuanto a:

Analizar problemas con uso de diversos sistemas de representación que favorezcan el desarrollo de las habilidades matemáticas definidas en torno al concepto de derivada para conformar un banco de problemas a utilizar en la clase.

Consideramos, además de lo expuesto en apartados anteriores, que la secuencia de los tres grupos de tareas para el desarrollo de habilidades matemáticas para favorecer la comprensión del concepto de derivada fue adecuada y factible de replicarse en el aula universitaria. Por supuesto que esto da lugar también a cualquier mejora.

En cuanto a:

Describir y analizar las producciones de los alumnos en términos de las habilidades matemáticas, con especial énfasis en el uso flexible de registros de representación.

En la sección 2.9 dimos cuenta de todos los resultados obtenidos y las reflexiones a las que arribamos.

Respecto a:
Explorar el uso de recursos tecnológicos cuando los alumnos resuelven las actividades propuestas.

Explicamos que una de las limitaciones en el desarrollo de la investigación fue el uso de tecnología. A pesar de esto, mediante una encuesta, pudimos recabar datos. Más de la mitad de los alumnos usa el celular con alguna aplicación matemática que lo ayuda, sobre todo, en realizar o verificar gráficos. Entonces, en proyectos futuros, una posibilidad de incorporar recursos tecnológicos puede ser a través del dispositivo móvil.
Por último:

Analizar las orientaciones brindadas por el profesor a los alumnos para la resolución de las actividades, con el propósito de ver cómo incorporar las mismas a un hipermedio.

Las ayudas u orientaciones dadas fueron adecuadas. El inconveniente en general radica en que los alumnos no las leen si éstas están en la hoja de trabajo o no prestan demasiada atención cuando el profesor las da durante la jornada. Esto quizás sucede porque están muy concentrados tratando de resolver las actividades.
De todas formas, serán tenidas en cuenta para un futuro hipermedio sobre el tema.

4. Bibliografía

Delgado Rubí, J. (1998). Las habilidades generales matemáticas y la estructuración del conocimiento. En R. M. Farfán (Ed.), *Actas de la Undécima ReuniònLationamericana de Matemática Educativa* (págs. 88-91). México: Grupo Editorial Iberoamérica, S. A. de C. V.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica. Traducción de: Registres de représentationsémiotique et functionnementcognitif de la pensée. Annales de Didactique et de SciencesCognitives. Vol. 5 (1993).

Falsetti, M. F., Favieri, A., Scorzo, R. y Williner, B. (2009). Estudio sobre habilidades matemáticas para el Cálculo Diferencial en estudiantes de Ingeniería. *10mo Simposio de Educación Matemática.* Chivilcoy: Edumat.

Godino, J. D. (2002a). Competencia y comprensión matemática: ¿qué son y cómo se consiguen? *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 29*, 9-19.

Hernández Fernández H, Delgado Rubí J.R., Fernández de Alaíza B, Valverde Ramírez L, Rodríguez Hung T. (1998). *Cuestiones de didáctica de la Matemática.*Rosaio: Serie Educación. Homo Sapiens Ediciones.

Nickerson, R., Perkins, D. y Smith, E. (1987). Enseñar a pensar. Aspectos de la aptitud intelectual. Barcelona: Paidós. Ministerio de Educación y Ciencia.

Polya, G. (1998). *¿Cómo plantear y resolver problemas?* (22da. ed.). México: Editorial Trillas.

Prieto, F.; Vicente, S. (2006). Análisis de registros semióticos en actividades de ingresantes a la facultad de ingeniería. *I REPEM. Memorias,* pp. 203-212.

Rojas, P. (2012) Sistemas de representación y aprendizaje de las matemáticas. Revista digital Matemática, Educación e Internet. Recuperado el 10 de marzo de 2013 de http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/.

Sánchez, M (2002). La investigación sobre el desarrollo y la enseñanza de las habilidades del pensamiento. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 4(1).* Recuperado el 4 de diciembre de 2009 de http://redie.ens.uabc.mx/vol14no1/contenido-amestoy.html

Skills, P. f. (2009). *Partnership for 21st Century Skills.*Recuperado el 10 de febrero de 2011, de Partnershipfor 21st Century Skills: http://p21.org/documents/p21-stateimp_professional_development.pdf

Zabala, A. (2007). Los enfoques didácticos. En C. Coll, E. Martín, T. Mauri, M. Miras, J. Onrubia, I. Solé y A. Zabala, (Eds), *El constructivismo en el aula* (18va. ed, pp.125-161). Barcelona: Editorial GRAÓ.

5. Anexos a la organización del informe

5.1. Anexo I

El marco teórico está integrado por los siguientes temas:

- Habilidades matemáticas y digitales
- Sistemas de representación

5.1.1. Habilidades matemáticas

En este trabajo de investigación es fundamental especificar qué entendemos por habilidad matemática. Varios autores, Hernández (1998), Delgado Rubí (1998, p.70) aludiendo a Talízina (1984), Zabala (2007), Sánchez (2002), Godino (2002), Nickerson, Perkins y Smith (1987) hablan de "procedimientos" (habilidades) como los modos de actuación, de un "saber hacer", de contenidos procedimentales, de competencia, pensamiento hábil. Nosotros discernimos entre procedimiento y habilidad vinculados con la Matemática. Por una parte, el procedimiento es la acción o tarea que debemos realizar para lograr un objetivo o fin en el cual la Matemática está involucrada. En tanto que una habilidad matemática es la facultad personal de efectuar el procedimiento eficientemente, es decir, la capacidad de realizar acciones correctamente en relación al logro del objetivo planteado. En general, una habilidad nos permite realizar adecuadamente otras actividades jerárquica y/o lógicamente asociadas.

En el año de 1956, Benjamín Bloom, desarrolló su taxonomía de Objetivos Educativos, que sostiene que el proceso de aprendizaje está relacionado con tres dominios psicológicos, el dominio cognitivo para procesar información, conocimiento y habilidades mentales, el dominio afectivo relacionado con las actitudes y sentimientos y el dominio Psicomotor, vinculado a las habilidades manipulativas, manuales o físicas. Bloom es conocido por la llamada Taxonomía de Bloom, que categoriza y ordena habilidades de pensamiento y el proceso del aprendizaje. Parte de Habilidades de Pensamiento de Orden Inferior y va hacia Habilidades de Pensamiento de Orden Superior; que van desde conocimiento, comprensión, aplicación, análisis, síntesis y evaluación. (Churches, 2009)

En los años 90, Lorin Anderson, revisó la Taxonomía de Bloom y publicó, en el año 2001, la Taxonomía Revisada de Bloom, que como novedad incorpora el uso de verbos en lugar de sustantivos para cada categoría y el cambio de la secuencia de éstas dentro de la taxonomía. Éstas incluyen recordar, comprender, aplicar, analizar, evaluar y crear. Profundizando un poco más este orden de las habilidades de pensamiento podemos enumerarlas de la siguiente manera:

- *Recordar*– Reconocer, listar, describir, identificar, recuperar, denominar, localizar, encontrar.
- *Entender* – Interpretar, resumir, inferir, parafrasear, clasificar, comparar, explicar, ejemplificar.
- *Aplicar* – Implementar, desempeñar, usar, ejecutar.
- Analizar – Comparar, organizar, reconstruir, atribuir, delinear, encontrar, estructurar, integrar.
- *Evaluar* – Revisar, formular hipótesis, criticar, experimentar, juzgar, probar, detectar, monitorear.
- *Crear* – Diseñar, construir, planear, producir, idear, trazar, elaborar. (Churches, 2009)

Por otro lado El Consorcio de Habilidades Indispensables para el Siglo XXI, respalda la integración de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) dentro del proceso de enseñanza /aprendizaje. Define el alfabetismo en TIC como el uso de herramientas del Siglo XXI en la aplicación de las habilidades de aprendizaje y han desarrollado los llamados Mapas de Alfabetismo en TIC. (Eduteka, 2007).

El Consorcio recomienda un modelo educativo para el aprendizaje en el Siglo XXI, que incluyen *Materias básicas, Habilidades de aprendizaje, Herramientas, Contexto, Contenido y Evaluación.*

Las habilidades antes mencionadas comprenden tres categorías amplias con sus respectivas subcategorías:

- *Habilidades de información y comunicación*
    - Información y alfabetismo en medios (Acceder y manejar información. Integrar y generar información. Evaluar y analizar información)
    - Habilidades de comunicación (Entender, manejar y crear comunicaciones efectivas: Orales, Escritas y Multimediales)
- *Habilidades de pensamiento y de solución de problemas*
    - Pensamiento crítico y pensamiento sistémico (Uso de habilidades de razonamiento lógico. Adquisición de habilidad numérica. Competencia en el uso de varias estrategias para solución de problemas.)
    - Identificación, formulación y solución de problemas (Habilidad para identificar, analizar y resolver problemas)
    - Creatividad y curiosidad intelectual (Desarrollar y comunicar ideas a otros)
- *Destrezas interpersonales y de autonomía*
    - Habilidades interpersonales y de colaboración (Trabajar bien en grupo. Ejercitar el respeto por opiniones diferentes.)
    - Autonomía o autodirección (Monitorear la comprensión y el aprendizaje propios.)
    - Responsabilidad y capacidad de adaptación (Ejercitar la responsabilidad personal y la flexibilidad en varios contextos. Establecer y alcanzar estándares y metas elevados, tanto para sí mismo como para otros.)
    - Responsabilidad social (Actuar responsablemente pensando en los intereses de una comunidad más amplia. Demostrar comportamiento ético en contextos personales, en el sitio de trabajo y en la comunidad.) (Eduteka, 2007)

Delgado Rubí, Hernández, Valverde y Rodríguez, profundizaron el estudio de habilidades matemáticas y las han clasificado según su función. (Hernández Fernández H, Delgado Rubí J.R., Fernández de Alaíza B, Valverde Ramírez L, Rodríguez Hung T, 1998). Esta clasificación resume las habilidades matemáticas en habilidades conceptuales, traductoras, operativas, heurísticas y meta-cognitivas. Profundizando cada una de ellas:

- *Habilidades conceptuales*: aquellas que operan directamente con los conceptos (Identificar, Fundamentar, Comparar, Demostrar)
- *Habilidades traductoras*: aquellas que permiten pasar de un dominio a otro del conocimiento (Interpretar, Modelar, Recodificar)
- *Habilidades operativas*: funcionan generalmente como auxiliares de otras más complejas y están relacionadas con la ejecución en el plano material o verbal (Graficar, Algoritmizar, Aproximar, Optimizar, Calcular)
- *Habilidades heurísticas*: aquellas que emplean recursos heurísticos y que están presentes en un pensamiento reflexivo, estructurado y creativo (Resolver, Analizar, Explorar)
- *Habilidades meta-cognitivas*: las que son necesarias para la adquisición, empleo y control del conocimiento y demás habilidades cognitivas (Planificar, Predecir, Verificar, Comprobar, Controlar)

Además, es importante destacar que la importancia del estudio de las habilidades en relación con el contenido de la asignatura; lo que provee una mejor información sobre el desarrollo de la misma y los aprendizajes de los conceptos**.** (Falsetti, Favieri, Scorzo y Williner, 2009)

5.1.2. Registros de representación

En Matemática el sujeto no entra en contacto directo con el objeto en estudio sino con una representación particular de ese objeto matemático (Rojas, 2012). Existen tres polos que no deben confundirse:

- El objeto representado.
- El contenido de una representación, es decir lo que una representación particular presenta del objeto.
- La forma de representación, llamada registro o sistema de representación (Duval, 1998).

Así la comprensión emerge en los sujetos mediante la coordinación de al menos dos registros de representación (Duval, 1998). Es imprescindible comprender los sistemas de representación porque los objetos matemáticos están dispuestos en una variedad de registros, porque sólo podemos acceder a los objetos matemáticos a través de las vías de representación y porque la representación de un objeto nos muestra ciertas características del mismo y no otras (Rojas, 2012). De esta forma cuantos más sistemas podamos coordinar mejor conoceremos el objeto en cuestión.
Los que involucramos en este trabajo son:

- Registro verbal: El lenguaje coloquial es el utilizado para representar situaciones que pueden ser modeladas en cualquiera de los otros registros.
- Registro analítico: Se expresa analíticamente un concepto recurriendo a notaciones matemáticas adecuadas utilizando símbolos acordados.
- Registro gráfico: Es la representación en el plano cartesiano o eje real o espacio de acuerdo a qué objeto se está tratando.
- Registro numérico: cuando los datos están dados, por ejemplo, a través de tablas (Prieto y Vicente, 2006).

5.2. Anexo II

Investigaciones que tomamos como base para definir las habilidades matemáticas objeto de estudio y para elaborar las actividades:

Dolores, C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. En R. Cantoral (Ed), *El futuro del Cálculo Infinitesimal, ICME 8*, 155-181. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

En este artículo se exponen los aspectos más importantes de un proyecto de investigación sobre la enseñanza de la derivada a nivel preunivesitario. El problema que motiva esta investigación radica en que, con los cursos tradicionales de Cálculo cantidades significativas de estudiantes no logran comprender sus conceptos básicos, en especial el concepto de derivada. El proyecto tiene como objetivo elaborar una propuesta didáctica que contribuya a la comprensión del concepto de derivada a través de la formación de ideas variacionales, particularmente a través de la noción de rapidez de la variación.
Para explorar algunas ideas y habilidades que poseen los estudiantes sobre el concepto de derivada se toma un cuestionario a 112 estudiantes de tipo opción múltiple. Algunos resultados obtenidos fueron los siguientes: el 31% de los estudiantes identifica el

concepto de velocidad media de un cuerpo que se mueve en un determinado intervalo y sólo el 8% responde correctamente cuando se pide la velocidad instantánea de ese cuerpo. Cuando se brinda el gráfico de una función y su recta tangente en un punto, sólo el 16% de los alumnos responde correctamente al valor de la derivada de la función en ese punto.
El autor considera las siguientes habilidades como indicativos de la comprensión del concepto de derivada: *identificar* ejemplos de su medio circundante con el concepto de derivada; *conocer y utilizar* correctamente la simbología; *conocer* las propiedades invariantes del concepto; *reconocer* el concepto en diversos contextos; *darejemplos* y *contraejemplos* y *fundamentar* por qué estos pertenecen o no a la extensión del concepto; *distinguir* entre razones de cambio promedio e instantáneas; *calcular* razones de cambio instantáneas por medios numéricos y algebraicos; *utilizar* definiciones equivalentes sobre el concepto; *aplicar* el concepto en la solución de problemas.
La propuesta de enseñanza se basa en tres nociones físicas: la *variación*, la *rapidez promedio* de la variación y la *rapidez instantánea* de la variación. En la primera fase se parte de la modelación de problemas sencillos de la física de donde se abstraen las nociones de *variable* y *función,* de éstas se estudian sus propiedades básicas y se resuelven problemas. En la segunda fase la formación del concepto se inicia a través la *rapidez de la variación,* particularmente de la velocidad y aceleración promedio. Después se arriba a la rapidez instantánea mediante un acercamiento intuitivo al límite y mediante la utilización de los infinitesimales. En la tercera fase se amplía la extensión del concepto a funciones que no necesariamente dependen del tiempo introduciendo la definición de *derivada*, se introduce la noción de función derivada, se deducen (por medio de los diferenciales) y utilizan las fórmulas y reglas básicas de derivación, pero sobre todo esta etapa se resuelven problemas para fijar el concepto.
No se brindan resultados porque el artículo da cuenta de la propuesta, no de su puesta en marcha.

García, S. (2011). *Una situación de aprendizaje para contribuir a la mejora de la comprensión del concepto de derivada*. Tesis de maestría no publicada, Universidad autónoma de Guerrero, Unidad Académica de Matemáticas, Centro de Investigación en Matemática Educativa, México.

La autora plantea como objetivo general contribuir a la mejora de la comprensión del concepto de derivada en estudiantes que inician sus estudios en la Licenciatura en Matemática. El manejo algorítmico y algebraico por parte de los estudiantes y la escasa comprensión de los conceptos principales del cálculo, motivan la investigación.
Toma una prueba diagnóstica a estudiantes de la licenciatura en la que pregunta qué es la derivada y sólo el 15% da una respuesta “conceptual”, los demás la identifican con la fórmula. La razón por la que se aboga a la comprensión del concepto derivada es debido a que se cree que comprender un concepto es fundamental para poder aplicar lo aprendido de forma segura al mismo tiempo que es esencial para poder comunicarlo.
La situación de aprendizaje diseñada se centra en el Pensamiento y lenguaje variacional y en una experiencia realizada por Dolores (2000). Para el diseño de la misma se adoptaron los fundamentos lógicos de la elaboración y formación de conceptos tal y como lo propone la Metodología de la Enseñanza de la Matemática (Jungk, 1986, citado en García, 2011) y teoría de registros de representación de Duval.
La situación de aprendizaje diseñada tiene en cuenta los siguientes momentos:
Consideraciones y ejercicios preparatorios: En esta parte se comienza por los ejercicios preparatorios antes de la introducción del concepto, se espera que mediante ellos los estudiantes se familiaricen con fenómenos y formas de trabajo correspondientes para más

tarde poder relacionar inmediatamente con el concepto las ideas adquiridas sobre el contenido.

Formación del concepto: Esta fase comprende la parte del proceso que conduce desde la creación del nivel de partida, la motivación y la orientación hacia el objetivo, y que pasa por la separación de las características comunes y no comunes, hasta llegar a la definición o la explicación del concepto. Esta fase está estrechamente relacionada con el objetivo de capacitar a los alumnos para definir el concepto.

Asimilación del concepto o fijación del concepto, se refiere a la etapa en la que deben de desarrollarse las ejercitaciones, profundizaciones, sistematizaciones y aplicaciones, y los repasos del concepto; ante todo a través de acciones mentales y prácticas dirigidas a ese objetivo. Para llevar a cabo esta fase, la Metodología de la Enseñanza de la Matemática propone sean realizadas las siguientes actividades:

1. Poder indicar ejemplos para el concepto tratado,
2. Conocer y utilizar correctamente la denominación del concepto,
3. Poder nombrar propiedades del concepto,
4. Indicar contraejemplos,
5. Señalar casos especiales,
6. Señalar casos límite,
7. Conocer relaciones con los demás conceptos,
8. Conocer varias definiciones del concepto.
9. Conocer una sucesión de indicaciones para reconocer un representante de un concepto dado.
10. Uso y aplicación del concepto

La experiencia se realizó en un grupo de la licenciatura en Matemática, 23 estudiantes (ya habían estudiado funciones, límite y continuidad), 6 sesiones de trabajo de 50 minutos cada una. El trabajo se efectuó en equipos con posterior discusión de todo el grupo junto al docente.

Como primera medida se tomó un pretest con 22 reactivos que contemplan las 10 actividades que se quieren desarrollar para valorar la comprensión. Luego se puso en escena la situación de aprendizaje diseñada. Por último, se tomó el test final. Los resultados se analizan por estudiante (uno por uno), dando gráficos de respuestas correctas e incorrectas en el pretest y en el postest y luego se estudian las 10 actividades en el pretest y en el postest, alumno por alumno. De esta manera se determinan diversos niveles de comprensión.

Como conclusión principal la autora señala que la situación de aprendizaje diseñada logra la mejora de la comprensión del concepto de derivada, pero no en su totalidad. Los estudiantes que lograron mejorar su comprensión y se ubicaron en las categorías débil y aceptable fueron aquellos que estuvieron en todas las clases que duró el desarrollo de la situación de aprendizaje y en ellas intervenían constantemente, que discutían con sus compañeros, que entregaron todas las tareas que se les dejaron realizar; estos fueron algunos de los factores que se cree influyeron en sus resultados. Por otro lado, quienes no mejoraron y se quedaron en la categoría muy deficiente, fueron quienes entre otras cosas, no asistieron a todas las clases, que no entregaron tareas y que casi no participaban en el grupo.

Concluye que la introducción a la derivada por la vía variacional y usando diversos sistemas de representación ayuda al estudiante en la comprensión del concepto derivada pero que un factor fundamental en este proceso es la actitud del alumno.

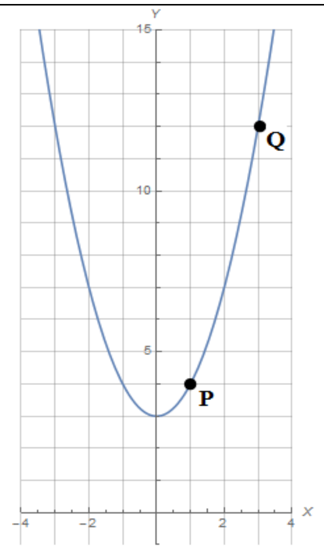
Vrancken, S., Engler, A., Müller, D. (2008). Una propuesta para la introducción del concepto de derivada desde la variación. Análisis de los resultados*. Premisa 10* (38), 36-46.

En este trabajo se presentan algunas actividades de una secuencia didáctica que se diseña con el propósito de facilitar la construcción del concepto de derivada. Las autoras asumen que el tratamiento y la conversión entre los diferentes registros en que este concepto puede ser presentado (numérico, coloquial, geométrico, algebraico) y el desarrollo de ideas variacionales, como la noción de razón de cambio, pueden contribuir a este propósito. También analizan los errores y las dificultades que presentaron los alumnos en la resolución de las actividades como una manera de explorar sus concepciones sobre el concepto de velocidad promedio e instantánea, así como los problemas en el tratamiento de las funciones y la conversión entre distintos registros.
En el artículo se presentan todas las actividades en diferentes registros y se analizan los resultados obtenidos. Como reflexión final exponen que la formación de las nociones de variable, función y derivada se basan en el entendimiento de los procesos de cambio, fundamentales para el desarrollo de un pensamiento y lenguaje variacional. Un escaso desarrollo de las mismas impide lograr profundidad en las concepciones relativas al cálculo. Destacan que este desarrollo no se logra de manera instantánea, es necesaria una preparación adecuada.
Del análisis de las respuestas surgieron las dificultades que tienen los alumnos sobre el concepto de función y sobre la manera correcta de relacionar los diferentes registros. Para las autoras es necesario promover tareas que conecten los distintos sistemas de representación ya que permiten acercar al alumno al concepto desde diferentes perspectivas, favoreciendo la visualización de las ideas, lo que los llevará a la aprehensión de los distintos conceptos.

5.3. Anexo III

ACTIVIDAD 1

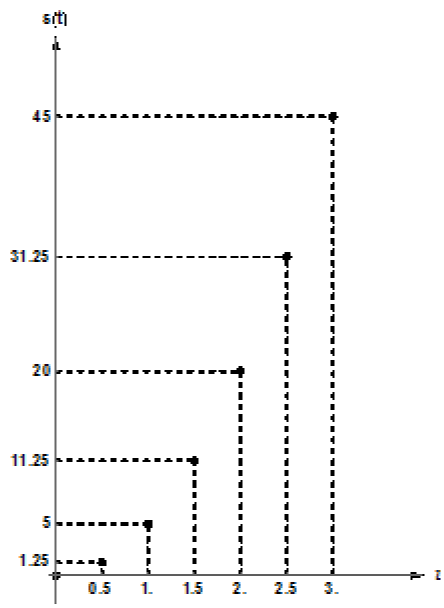
TAREA 1: La siguiente gráfica corresponde a una función f: $\Re \to \Re$



a) Hallar dominio e imagen
b) Indicar las coordenadas de los puntos P y Q.
c) Expresar la función en registro analítico.
d) Calcular la variación de ambas variables cuando la función cambia de P hacia Q.
e) Calcular la razón de cambio
f) Trazar la recta que pasa por dichos puntos y determinar su ecuación.
   ¿Qué relación existe entre la pendiente de la recta secante y el cociente calculado en el ítem e?

TAREA 2

El siguiente gráfico de puntos representa la posición de un móvil a lo largo del intervalo de tiempo [0,3], en donde t se mide en segundos y s(t) en metros.



a) Indicar dominio e imagen en el contexto del problema.
b) ¿Cuál es la variable independiente y cuál la dependiente?
c) Unir los puntos en el gráfico y realizar una tabla de acuerdo a los datos dados en el gráfico.
d) Calcular la variación Δs para intervalos de 1 segundo
e) Calcular el cociente $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ a intervalos de 1 segundo
f) Explicar con tus palabras qué significado tiene ese cociente en el contexto del problema

TAREA 3

Con el objetivo de analizar la variación del volumen de cierto gas al variar su presión se realiza con dicho gas y, a temperatura constante, una experiencia en la que se obtiene la siguiente tabla de valores.

P(atm)	1	4	7	10
V(lts)	30.00	7.45	4.3	3.00

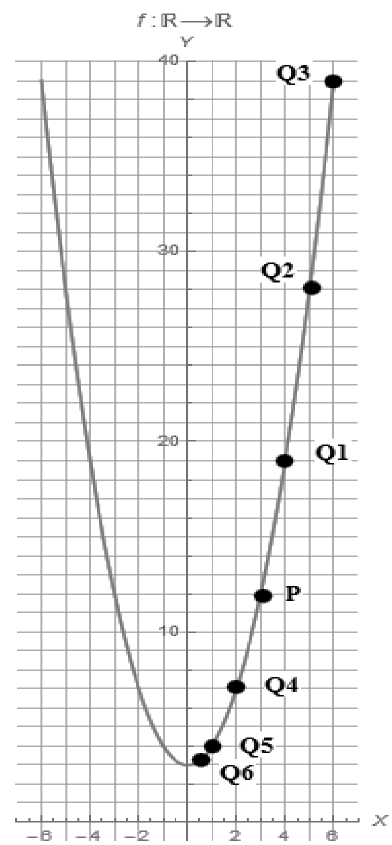
a) Indicar dominio e imagen en el contexto del problema.
b) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Cuál la dependiente?
c) Graficar los puntos de la tabla y unirlos.
d) Calcular los cambios ΔV del volumen para intervalos de tres atmósferas.
e) Calcular el cociente $\frac{\Delta V}{\Delta P}$ a intervalos de tres atmósferas.
f) Explicar con tus palabras qué significado tiene ese cociente bajo el contexto del problema.

ACTIVIDAD 2

TAREA 1

a) Trazar las rectas secantes que pasan por Q1P, Q2P, Q3P, Q4P, Q5P y Q6P.
b) Se define recta tangente a una función en un punto como la posición límite de las rectas secantes trazadas desde un punto móvil Q a un punto fijo P de la curva. Teniendo en cuenta esta definición trazar en forma aproximada la recta tangente a la función en el punto P.
c) Calcular la pendiente de las rectas secantes del ítem a).
d) Calcular la pendiente de una recta secante cualquiera que pasa por P (3,12) y Q (x, f(x))
e) Explicar el significado de los cálculos recién realizados
f) Debido a que la recta tangente es la posición límite de la recta secante, su pendiente será el límite de las pendientes de las rectas secantes, es decir: $m_t = \lim_{x\to 3} m_s = \lim_{x\to 3}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

donde m_s es la pendiente de la recta secante genérica calculada en el punto d). Calcular m_t.
g) Explicar el significado del límite recién calculado



TAREA 2

La ecuación de la posición de un móvil está dada por la ecuación $s(t) = 5\,t^2$, en donde t se mide en segundos y s(t) en metros.

a) La velocidad media se define como $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. De acuerdo a esta definición ¿cuál es la velocidad media del móvil en cada intervalo de la siguiente tabla?

	Intervalo [1, t]				tendencia		Intervalo [t,1]		
	[1,1.5]	[1,1.01]	[1,1.001]	→		←	[0.999,1]	[0.99,1]	[0.5,1]
v_m									

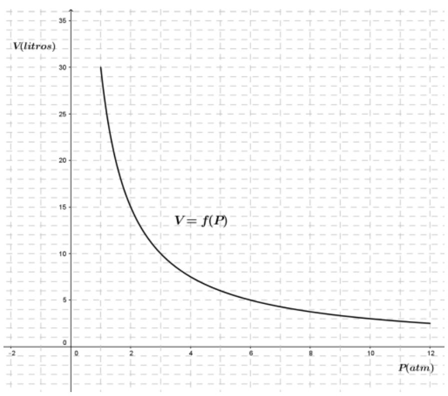
b) Explicar el significado de los cálculos recién realizados.

c) Si la velocidad instantánea es $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ¿Cuál es la velocidad instantánea en t=1?

d) Explicar el significado del límite recién calculado.

TAREA 3

A temperatura constante el volumen (V, en litros) de un gas es inversamente proporcional a la presión de ese gas (P, en atmósferas). En una experiencia se obtuvieron los datos que se graficaron de la siguiente manera:



a) Calcular los cambios promedios de volumen respecto a la presión para los siguientes intervalos. Recordar $rcp = \frac{\Delta V}{\Delta P}$

Intervalo [6, P]					tendencia	Intervalo [P,6]			
	[5.7,6]	[5.8,6]	[5.9,6]	→		←	[6,6.1]	[6,6.2]	[6,6.3]
rcp									

b) ¿Qué indica el signo de cada cambio promedio?

c) Explicar el significado de los cálculos recién realizados

d) Se define como razón de cambio instantánea en un valor P = a, como el límite de las razones de cambio promedio cuando el intervalo tiene longitud tendiendo a cero; es decir, $rci = \lim_{\Delta P \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta P}$. Calcular la rci para P = 6.

e) Explicar el significado del límite recién calculado

<u>ACTIVIDAD 3</u>

TAREA 1

Dada la función $g : \Re \to \Re \, / \, g(x) = 3x^3 - x$.

a) Determinar si existe una única recta tangente a dicha función que sea paralela a la recta y=8x y hallar las ecuaciones.
b) Graficar la situación resuelta en el ítem a)

TAREA 2

La siguiente fórmula relaciona el espacio recorrido s(t) (en metros) recorrido por un móvil y el tiempo t (en segundos):
$s(t):[0,3]\rightarrow[0,45]/\,s(t)=5t^{2}$. Responder:

a) ¿Cuál es la velocidad del móvil a los 2 segundos?
b) ¿Cuándo la velocidad es de 7,2 m/s?
c) Escribir la fórmula de la velocidad del móvil para todo instante t, indicando dominio e imagen.
d) Graficar s(t) y v(t)

TAREA 3

La siguiente fórmula relaciona el volumen V (en litros) de un cierto gas, a temperatura constante, en función de la presión P (en atmósferas): $f:[1;12]\rightarrow[2,5;\,30]/\,V=f(P)=\dfrac{30}{P}$

a) Calcular el cambio instantáneo o tasa de variación instantánea del volumen respecto a la presión para cualquier valor de P mediante la definición y luego utilizando reglas de derivación, comparar los resultados.
b) Hallar el valor de P para el cual la razón de cambio instantánea es igual a la razón de cambio promedio en el intervalo [2,6].
c) Interpretar gráficamente la situación anterior

Anexo III:Certificados de participación a eventos

EMCI 2017

Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías

UNSE Universidad Nacional de Santiago del Estero

XX ENCUENTRO NACIONAL Y XII INTERNACIONAL DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN CARRERAS DE INGENIERÍA

Se certifica que **Betina Williner**, Documento N°16817828; **Adriana Engler**, Documento N°14455438, han participado del Encuentro en carácter de **Autores** del trabajo: *"Revisando los Conceptos de Máximo y Mínimo de una Función. Análisis Histórico-Epistemológico"*.

Santiago del Estero, del 17 al 19 de Mayo de 2017

EMCI 2017

Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías

UNSE Universidad Nacional de Santiago del Estero

XX ENCUENTRO NACIONAL Y XII INTERNACIONAL DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN CARRERAS DE INGENIERÍA

Se certifica que **Betina Williner**, Documento N°16817828 ha participado del Encuentro en carácter de **Expositor** del trabajo: *"Revisando los Conceptos de Máximo y Mínimo de una Función. Análisis Histórico-Epistemológico"*

Santiago del Estero, del 17 al 19 de Mayo de 2017

Comisión Organizadora Local
EMCI - 2017

Ing. Hector Paz
Decano
FCEyT - UNSE

xto o enviar un documento para firmar

EMCI 2017 | Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías | UNSE Universidad Nacional de Santiago del Estero

XX ENCUENTRO NACIONAL Y XII INTERNACIONAL DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN CARRERAS DE INGENIERÍA

Se certifica que **Adriana Favieri**, Documento N°14866802; **Betina Williner**, Documento N°16817828; **Roxana Scorzo**, Documento N°16878115; **Marcela Falsetti**, Documento N°18078122, han participado del Encuentro en carácter de **Autores** del trabajo: *"Justificación Teórica del Diseño de Actividades Relacionadas con el Concepto de Derivada"*.

Santiago del Estero, del 17 al 19 de Mayo de 2017

Lic. Non Chewin de Auat
Comisión Organizadora Local
EMCI - 2017

Ing. Hector Paz
Decano
FCEyT - UNSE

EMCI 2017 | Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías | UNSE Universidad Nacional de Santiago del Estero

XX ENCUENTRO NACIONAL Y XII INTERNACIONAL DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN CARRERAS DE INGENIERÍA

Se certifica que **Betina Williner**, Documento N°16817828; **Roxana Scorzo**, Documento N°16878115; **Adriana Favieri**, Documento N°14866802, han participado del Encuentro en carácter de **Autores** del trabajo: *"Actividades para Promover el Desarrollo de Habilidades Matemáticas en Torno al Concepto de Derivada: Diseño y Prueba Piloto"*.

Santiago del Estero, del 17 al 19 de Mayo de 2017

Lic. Non Chewin de Auat
Comisión Organizadora Local
EMCI - 2017

Ing. Hector Paz
Decano
FCEyT - UNSE

EMCI 2017

Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías

UNSE
Universidad Nacional de Santiago del Estero

XX ENCUENTRO NACIONAL Y XII INTERNACIONAL DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN CARRERAS DE INGENIERÍA

Se certifica que **Betina Williner**, Documento N°16817828 ha participado del Encuentro en carácter de **Expositor** del trabajo: *"Actividades para Promover el Desarrollo de Habilidades Matemáticas en Torno al Concepto de Derivada: Diseño y Prueba Piloto"*.

Santiago del Estero, del 17 al 19 de Mayo de 2017

Lic. Nori Cheein de Auat
Comisión Organizadora Local
EMCI - 2017

Ing. Hector Paz
Decano
FCEyT - UNSE

EMCI 2017

Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías

UNSE
Universidad Nacional de Santiago del Estero

XX ENCUENTRO NACIONAL Y XII INTERNACIONAL DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN CARRERAS DE INGENIERÍA

Se certifica que **Betina Williner**, Documento N°16817828, ha **Dictado el Taller**: *"Herramientas de Google Drive para el Diseño de Evaluaciones"* de 4 (cuatro) horas de duración, en el marco del Encuentro.

Santiago del Estero, del 17 al 19 de Mayo de 2017

Lic. Nori Cheein de Auat
Comisión Organizadora Local
EMCI - 2017

Ing. Hector Paz
Decano
FCEyT - UNSE

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LUJÁN
Departamento de Ciencias Básicas
ORGANIZAN:

Curso de Posgrado.
Ciclo: "PERSPECTIVAS MATEMÁTICAS Y DIDÁCTICAS PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA SUPERIOR".

Curso 3: "SOBRE EL CONCEPTO DE DERIVADA: CUESTIONES MATEMÁTICAS Y DIDÁCTICAS."

Aprobado por Disp. CD-CB Nº 219/14

PROFESOR: ***Mg. Betina Williner.***

OBJETIVOS:
Para el concepto de Derivada en una variable se espera que el asistente:
- Conozca algunas de las principales ideas que fueron conformando lo que actualmente conocemos como Derivada.
- Realice un análisis sobre el tratamiento del tema en los programas y en la bibliografía que usa en el aula.
- Reflexione sobre los diferentes enfoques de enseñanza de la Derivada.
- Conozca aportes de la Educación Matemática a la enseñanza de estos contenidos a nivel superior.
- Identifique elementos metodológicos, de investigaciones educativas, a partir de la lectura de papers.

PROGRAMA SINTÉTICO:
El curso promueve la reflexión matemática sobre el concepto de derivada desde el enfoque variacional. Se pretende analizar diversas investigaciones en Educación Matemática a nivel superior sobre dicho tema con el objetivo que el asistente reflexione sobre los aportes del campo e identifique elementos metodologicos que se necesitan para abordar investigaciones educativas.

REQUISITOS DEL CURSO:

TÍTULO REQUERIDO: Título de grado en áreas afines a la Matemática (incluye la posibilidad de graduados de Instituciones de nivel Terciario en carreras de un mínimo de 4 años)
OTROS REQUISITOS: preferentemente docentes de nivel superior

LUGAR DE REALIZACIÓN: Sede Central-UNLu Luján

PERÍODO DE DESARROLLO: Martes 8, miércoles 9 y viernes 11 de agosto de 2017, horario de 9 a 14 horas.

CIERRE DE INSCRIPCIÓN: viernes 4 de agosto de 2017 (límite máximo de inscriptos 30)

ARANCEL: sin arancel

INFORMES E INSCRIPCIÓN

Departamento de Ciencias Básicas
Tec. Ana María Belmonte
TEL: 02323-423979/ 423171 Int. 1390
E-mail: anabelm@unlu.edu.ar
Horario de atención de lunes a viernes de 9:00 a 15:00 hs.

SE OTORGAN CERTIFICADOS DE ASISTENCIA Y APROBACIÓN

"2017 – Año del 45º Aniversario de la Creación de la Universidad Nacional de Luján"

Universidad Nacional de Luján
Departamento de
Ciencias Básicas

LUJÁN, 11 DE AGOSTO DE 2017

VISTO: La solicitud de designación de la Mag. Betina Susana Williner como Profesora Extraordinaria Visitante presentada por la docente Lucia Elena Milicic para participar del dictado del Curso de Posgrado "Sobre el Concepto de Derivada: Cuestiones Matemáticas y Didácticas"; y

CONSIDERANDO:

Que resulta necesario reconocer la labor académica a desarrollar por la Mag. Betina Susana Williner.

Que el Consejo Directivo Departamental de Ciencias Básicas en su sesión ordinaria del día 10 de agosto de 2017 trató y aprobó dicha solicitud.

Por ello,

EL CONSEJO DIRECTIVO DEPARTAMENTAL
DE CIENCIAS BÁSICAS
D I S P O N E :

ARTICULO 1°.- PROPONER al Honorable Consejo Superior la designación de la Mag. Betina Susana Williner (D.N.I.N° 16.817.828) como Profesora Extraordinaria Visitante para integrar el equipo docente del Curso de Posgrado "Sobre el Concepto de Derivada: Cuestiones Matemáticas y Didácticas", aprobado por Disposición CDD-CB: 221-14.-

ARTICULO 2°.- ELEVAR la presente actuación a consideración del Honorable Consejo Superior.-

ARTICULO 3°.- Regístrese. Comuníquese y archívese.-

DISPOSICIÓN DISPCD-CBLUJ:0000335-17

Departamento de Ciencias Básicas

Departamento de Ciencias Básicas

Universidad Nacional
de La Matanza

DIIT

ANÁLISIS MATEMÁTICO DESDE UN ENFOQUE CONSTRUCTIVO

San Justo, 17 de Mayo de 2017

Se certifica que,

Betina Williner

DNI: 16.817.828,

aprobó el curso (modalidad semipresencial): *"Análisis Matemático desde un Enfoque Constructivo"*, dictado por la Prof. Marcela Reale, con una duración total de 25 hs.

Mg. Domingo Donadello
Secretario Académico

Mg. Osvaldo Spositto
Decano

Universidad Nacional de La Matanza

DIIT Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas

Herramientas Google para Diseño de Evaluaciones

San Justo, 1 de Diciembre de 2017

Se certifica que

Betina Williner

DNI: 16.817.828

ha participado en el dictado del taller para capacitación docente *"Herramientas Google para Diseño de Evaluaciones"*, realizado el 30 de noviembre de 2017 en esta Casa de Altos Estudios.

Mg. Gabriel Blanco
Vicedecano

Mg. Osvaldo Spositto
Decano

Universidad Nacional de La Matanza

DIIT Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas

Mejora de las Estrategias Pedagógicas

San Justo, 15 de diciembre de 2017

Se certifica que

Betina Williner

DNI: 16.817.828

participó como expositora del *"1er. Encuentro del Programa MEP -Mejora de las Estrategias Pedagógicas-"* (Resolución de Rectorado Nº 294), dictado por la Dra. Bettina Donadello en esta Casa de Altos Estudios.

Dra. Bettina Donadello
Directora Programa MEP

Dr. Daniel Giulianelli
Secretario de Investigaciones

Anexo IV: comunicaciones

Participación en Congresos

Congreso EMCI (17 al 19 de mayo de 2017)

Comunicación

Revisando los conceptos de máximo y mínimo de una función. Análisis histórico-epistemológico

Betina Williner[1], Adriana Engler[2]
[1]Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas, Universidad Nacional de La Matanza
Florencio Varela 1903, San Justo, Provincia de Buenos Aires, Argentina
bwilliner@unlam.edu.ar
[2]Facultad de Ciencias Agrarias, Universidad Nacional del Litoral
Kreder 2805, Esperanza, Provincia de Santa Fe, Argentina
aengler@fca.unl.edu.ar

Resumen. El presente artículo tiene como propósito mostrar un análisis histórico-epistemológico de los conceptos de máximos y mínimos involucrados en la resolución de los problemas de optimización. Este estudio forma parte de una tesis de doctorado cuyo objetivo es explorar la comprensión de dichos conceptos cuando alumnos de primer año de ingeniería trabajan con actividades que involucran ideas variacionales y diversos sistemas de representación. La tesis se enmarca en el enfoque del Pensamiento y Lenguaje variacional que considera que el estudio de la construcción del conocimiento matemático debe abordarse en forma holística involucrando las dimensiones histórico-epistemológica, didáctica, cognitiva y socio-cultural. La dimensión presentada es fuente para el diseño de situaciones, problemas y actividades para los alumnos y ayuda a entender las dificultades que tienen los mismos en su aprendizaje.

Palabras Clave: extremos de una función-análisis histórico-epistemológico

1 Introducción

El presente estudio forma parte de una tesis de doctorado cuyo objetivo general es explorar la comprensión de los conceptos involucrados en los problemas de optimización cuando los alumnos de primer año de ingeniería de la Universidad Nacional de La Matanza (UNLaM) interactúan con actividades basadas en ideas de variación y en el uso de diversos sistemas de representación.
La resolución de problemas, en particular los de optimización, es de vital importancia en la formación de ingenieros. En efecto, estos profesionales pueden enfrentarse a tareas como maximizar el nivel de producción de una fábrica con una cantidad de recursos disponibles o, minimizar los costos ante un nivel de producción dado o ante una construcción determinada, entre otros.
Diversas investigaciones ([1-4]) y la propia experiencia en la cátedra de Análisis Matemático I del Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas de la UNLaM, dan cuenta de las dificultades que tienen los alumnos cuando afrontan este tipo de problemas. En los exámenes parciales la mayoría de los estudiantes no los resuelve. Si son parte de actividades en clase, muchos alumnos tienen inconvenientes para plantear la función a optimizar de acuerdo a las condiciones dadas. O, si logran hacerlo, luego no verifican si la solución hallada es óptima.
Pensamos que una base sólida en los conceptos que involucran los problemas de optimización (intervalos de crecimiento, decrecimiento, extremos relativos) puede favorecer la resolución de los mismos. De allí que comenzamos esta investigación en el marco del Pensamiento y Lenguaje variacional. Uno de los propósitos de este enfoque es el estudio de la construcción de conocimiento matemático sobre ideas variacionales cuando los alumnos hacen matemática en el aula. Dicho estudio se cimienta sobre una aproximación holística que integra las cuatro componentes fundamentales de la construcción del conocimiento: su naturaleza epistemológica, el plano didáctico y cognitivo y su dimensión sociocultural [5].
En esta oportunidad abordamos una de esas componentes: la histórico-epistemológica.
Un análisis de este tipo nos permite percibir la vida del matemático en una determinada época, con las concepciones y formas de pensamiento vigente en ese momento. A su vez nos señala en qué tipo de problemas se trabajaba y con qué instrumentos se contaba para llegar a un modo de solución. De esta manera podemos recuperar ciertas visiones de los conceptos matemáticos y contar con elementos que nos ayuden a diseñar actividades para el aula con una visión global. La información sobre el desarrollo del conocimiento matemático en una cultura, el saber cómo fue el camino que el mismo transitó de cambios y surgimiento nos

proporciona elementos para su enseñanza. Un acercamiento a las producciones originales sobre los conceptos de extremos de una función nos posibilita entender su evolución, así como también la problemática que dio lugar a la emergencia de dicho conocimiento.
Sierpinska (citado en [6]) señala que el uso del análisis epistemológico de un determinado objeto matemático ayuda a estudiar la comprensión lograda por parte del estudiante. En efecto, conociendo las dificultades en la evolución de dicho concepto históricamente se puede hacer un paralelo con las dificultades a las que se puede enfrentar un alumno en el aprendizaje del mismo.
En base a lo expuesto decidimos organizar este artículo presentando algunos problemas de optimización destacados en la historia de la matemática, los primeros métodos para calcular máximos y mínimos y su evolución. Luego reflexionamos sobre el aporte de este estudio al proceso de enseñanza y aprendizaje de los mismos.
Debido a la dificultad de acceder a las fuentes originales nos respaldamos en otras fuentes (libros, documentos, tesis, artículos en revistas) cuyos autores han realizado estudios profundos de este tipo.

2 Algunos ejemplos de los primeros problemas de optimización

Los matemáticos están y han estado siempre ocupados con cuestiones de máximos y mínimos. Los problemas de optimización fueron y son parte fundamental de la matemática y ya estaban presentes en los tratados de los griegos de la antigüedad.
Cantor (citado en [7]) establece como primer ejemplo del cálculo de un máximo en la historia de la matemática al brindado por Euclides en el libro VI, propiedad 27 y lo enuncia como: “$x(x - a)$ tiene su máximo en $x = a/2$” (p. 15).
[4] y [7] mencionan como otro ejemplo dentro en esta línea el quinto libro de cónicas de Apolonio de Perga (262 aC-180 aC) en el cual se dedica a estudiar segmentos de longitud máxima y longitud mínima trazados respecto a una cónica. En él Apolonio, 18 siglos antes de la invención del cálculo, introduce nociones tales como normal a una curva, evoluta, centro de curvatura y logra obtener estos elementos para las cónicas de la manera más rigurosa.
Según Boyer [8] los teoremas de Apolonio sobre máximos y mínimos son en realidad teoremas sobre tangentes y normales a las secciones cónicas. Para este autor fue la matemática pura de Apolonio la que hizo posible el surgimiento de los *Principia* de Newton.
Dorrie [9] señala como primer problema de optimización propiamente dicho encontrado en la historia de la matemática al denominado problema de Regiomontanus, planteado en 1471 por el matemático Müller. Se trata de hallar la posición en una recta desde la que se divisa un segmento perpendicular con el mayor ángulo posible.
Pastore [10] enuncia el problema de la siguiente manera:
Suponga una estatua de altura h sobre un pedestal de altura p. Un hombre de altura m ($m < p$) ve el pie hasta la parte superior de la imagen en un ángulo que varía según la distancia d entre el hombre y la base del pedestal. Determinar la distancia d para que el ángulo de visión sea el mayor posible (p. 153)
Y presenta la siguiente imagen:

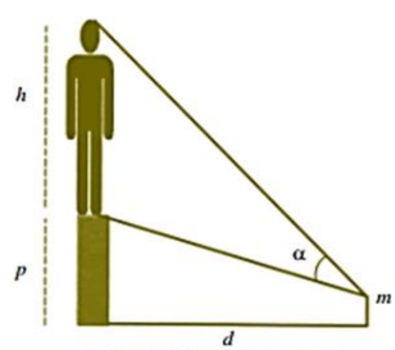


Fig.1. Problema de Regiomontanus, extraída de [10] p. 153.

Por cuestiones de extensión del artículo no presentamos las soluciones a estos problemas, pero sí indicamos que todas se basan en construcciones geométricas.
Como reflexión para la enseñanza, podemos decir que, si bien los ejemplos corresponden a distintas épocas (los primeros a la matemática griega y el segundo a la edad media), la visualización y el registro gráfico fueron herramientas muy importantes en la resolución. Los procedimientos usados eran una combinación entre construcciones geométricas y argumentaciones y lenguajes propios de la geometría sintética [11]. A su vez, como indica Vrancken [12], uno de los principales obstáculos al que se enfrentaban los matemáticos era el escaso desarrollo del simbolismo y también el hecho que las expresiones algebraicas no existían, a excepción de los interesantes intentos de Diofanto. Esta falta de simbología impedía encontrar métodos de solución más generales, por lo que se dedicaban a resolver múltiples casos particulares.
Los ejemplos brindados evidencian que los problemas y teoría de máximos y mínimos fueron conocidos mucho antes del descubrimiento del cálculo diferencial y que el intento por desarrollar esta teoría ejerció una influencia notable sobre el descubrimiento del mismo.

3 El método de máximos y mínimos de Fermat

Pierre De Fermat (1601-1665) no fue un matemático de profesión, pero sus contribuciones al cálculo (cálculo de máximos y mínimos, el trazado de tangentes y algunos procesos de integración) ocupan un lugar significativo en el desarrollo conceptual de esta rama [13].
En 1629 Fermat había desarrollado su geometría analítica y poco tiempo después hizo uno de sus descubrimientos más importantes: el primer método general para la determinación de máximos y mínimos de funciones algebraicas que es descripto sin demostración en la memoria *Methodus ad disquirendammaximan et miniman et de tangentibuslinearumcurvarum*, que data del año 1637 [14]
Boyer [8] desarrolla el método de obtención de máximos y mínimos de Fermat para curvas polinómicas, adaptándolo a la notación actual. Primero compara el valor de f(x) en un cierto punto con el valor de f (x + E) en un punto próximo. Luego el autor aclara que, si bien en general estos valores son distintos, en una “cumbre” o en el fondo de un “valle” de una curva “lisa” la diferencia será casi imperceptible. Por lo tanto, para hallar los valores que serán máximos o mínimos, Fermat iguala f(x) con f(x + E). A esto lo llama “adigualdad”. Boyer entiende la "adigualdad" como una pseudo-igualdad que llega a ser igualdad cuando E se hace cero, e introduce el vocablo inglés pseudo-equality para traducir el término latino adaequalitas, que es el usado por Fermat en su texto.
Cuanto más pequeño sea el intervalo E entre los dos puntos, más cerca estará esa pseudo-igualdad de ser una verdadera ecuación, así pues, Fermat luego de dividir todo por E hace E = 0. El resultado le permite calcular las abscisas de los puntos máximos y mínimos de la función polinómica.
Cantoral y Farfán [13] analizan con una perspectiva de notación y conceptos actuales el procedimiento de Fermat: si x es un punto máximo (o mínimo) entonces cuando ε se hace infinitamente pequeño los valores de la función en x y x + ε serán muy próximos:

$$\varepsilon \approx 0 \Rightarrow f(x+\varepsilon) \approx f(x) \Rightarrow f(x+\varepsilon) - f(x) \approx 0 \Rightarrow \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} \approx 0 \quad \textbf{(1)}$$

Siguiendo la notación moderna y teniendo en cuenta la noción de límite, tendríamos que f’(x)=0.
Fermat escogió, para ilustrar su método, el problema de dividir un segmento dado en dos partes de tal manera que el producto de las longitudes de éstas sea un máximo (equivalente al planteado por Euclides en el libro VI, proposición 27 que mencionamos en el apartado 1). Observemos que estamos frente a un problema de optimización que se encuentra usualmente en los libros de textos actuales. La resolución se desarrolla en [13-14-15]. Seguiremos este último haciendo hincapié en las etapas expuestas por Fermat.
Gráficamente el segmento de longitud B se divide por un punto P:

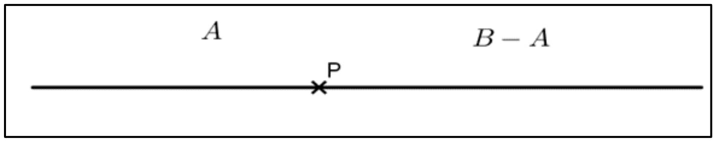


Fig. 2. Gráfico del problema anterior

Dando lugar a dos segmentos: uno de longitud A y el otro (B − A). El problema equivale a considerar máxima el área del rectángulo:

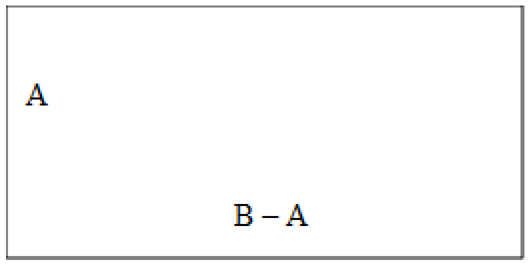


Fig. 3. Figura equivalente al problema anterior.

Resolviéndolo de acuerdo al método de Fermat, tenemos que, siendo A la incógnita y la función a optimizar A (B − A) = AB − A^2, la adigualdad quedaría

$$(A+E)B-(A+E)^2 \approx AB-A^2 \quad \textbf{(2)}$$

$$AB+EB-A^2-2AB-E^2 \approx AB-A^2 \quad \textbf{(3)}$$

Se eliminan los términos comunes y se obtiene:

$$EB-2AE-E^2 \approx 0 \quad \textbf{(4)}$$

Se dividen los términos por E:

$$B-2A-E \approx 0 \quad \textbf{(5)}$$

Se ignoran los términos que contienen E y las cantidades restantes se hacen iguales para llegar a la expresión

$$B-2A=0 \quad \textbf{(6)}$$

La resolución de esta última ecuación dará la cantidad de A para la cual A (B − A) es máximo. En este caso, se obtiene: A = B/2.

Es decir, la figura es un cuadrado de lado B/2.

El método introducido por Fermat es más sencillo de aplicar a diversas situaciones que las soluciones geométricas a problemas de máximos y mínimos específicos gracias al desarrollo del método de coordenadas propuesto por él y Descarte. Este último permitió expresar propiedades y formas de los objetos geométricos a través de relaciones numéricas y fue de gran importancia a la hora de traducir cualquier problema geométrico a uno algebraico equivalente, abriendo un amplio espectro de posibilidades en soluciones más genéricas.

Fermat no realizó demostración de su método. A su vez si consideramos, como diversos autores, que es equivalente a encontrar puntos de derivada cero, nos estaría brindando una condición necesaria pero no suficiente para hallar extremos. Tampoco nos indica si el valor hallado es un máximo o un mínimo.

4 Los aportes del cálculo diferencial de Newton y Leibniz

Los métodos de análisis promovidos por los precursores de Newton y Leibniz fueron desarrollados con el objetivo de resolver una serie de problemas bien definidos, tales como la construcción de la tangente a una curva, la obtención de máximos y mínimos y el cálculo de cuadraturas. Gracias a la geometría analítica de Descartes y Fermat, mediante la cual cualquier problema de geometría plana podía traducirse a un problema algebraico equivalente, resultaba posible tratar las cuestiones no como problemas específicos de cada curva, sino mediante un método aplicable a una cierta clase de curvas [14].

Se considera tanto a Newton (1643-1727) como a Leibniz (1646-1716) los fundadores del Análisis infinitesimal moderno, como cuerpo de conceptos y resultados aplicables con cierta generalidad a resolver determinados problemas, a finales del siglo XVII [16]. La notación y técnicas que utilizaron les permitieron no sólo emplear una herramienta más eficaz que la geométrica sino también dar respuesta a problemas de la geometría y la física mediante el mismo método general.

Leibniz no publicó trabajos sobre la nueva materia. Muchos de sus descubrimientos los conocemos a través de cartas que enviaba a otros matemáticos y gracias a pequeños artículos, por ejemplo, el *Nova methodus pro maximis&minimis* la primera publicación oficial sobre cálculo, donde definía las diferencias y las reglas de diferenciación de las operaciones elementales y las aplicaba a problemas de tangentes y puntos críticos. Es un texto corto y difícil de comprender. En particular se encuentra allí la condición para máximos y mínimos y para puntos de inflexión [14].

Hanckok [7] indica que Leibniz es el primero en establecer una distinción entre máximo y mínimo.

Para Newton las fluentes son las cantidades generadas por movimientos continuos y las fluxiones serán las velocidades de dichos movimientos, que serían respectivamente las funciones y sus derivadas. Apoyándose en estas ideas determina máximos y mínimos de variables que crecen o decrecen continuamente, diciendo que un valor extremo lo alcanzará cuando su velocidad de variación (fluxión) sea nula. Así para determinar el valor extremo de una fluente, se calcula su fluxión y se iguala a cero [13].

5 El tratamiento de los extremos en el *Analyse*de L'Hopital

En 1696 L'Hopital publica de forma anónima el libro *Analyse des infinimentpetitspuorl'intelligence des lignescourbes*(Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas) [17]. Este libro es considerado por muchos como el primer libro de cálculo diferencial escrito con fines didácticos.

González [16] manifiesta que la estructura de la obra es la heredada de los matemáticos griegos: a partir de definiciones en las que se establece el significado de los conceptos "primarios" que luego van a aparecer a lo largo del texto, se suceden las diferentes proposiciones que caracterizan las propiedades, estructura, reglas de cálculo en los que están involucrados dichos conceptos.

Hacemos hincapié en el capítulo III de la obra que trata sobre el cálculo de máximos y mínimos, basándonos en el desarrollo que hacen [16] y [17]. El capítulo mencionado se denomina *Uso del cálculo de las diferencias para encontrar las ordenadas mayores y las menores, a lo que se reducen los problemas de máximos y mínimos* y en él se pueden distinguir tres aproximaciones distintas como acercamiento al significado de extremos de una curva.

La primera es una definición que se ofrece de puntos máximos y mínimos como descripción del comportamiento de la curva en un entorno de esos puntos. La notación es geométrica y hace referencia a la concepción de curva como traza. L'Hopital indica:

> Sea MDM una línea curva cuyas ordenadas PM, ED y PM sean paralelas entre sí, tal que al incrementarse continuamente la abscisa AP; la ordenada PM crece también hasta un cierto punto E después del cual disminuye…Supuesto eso: la línea ED será denominada la mayor o la menor ordenada. (L'Hospital, 1696, citado en [17], p. 131).

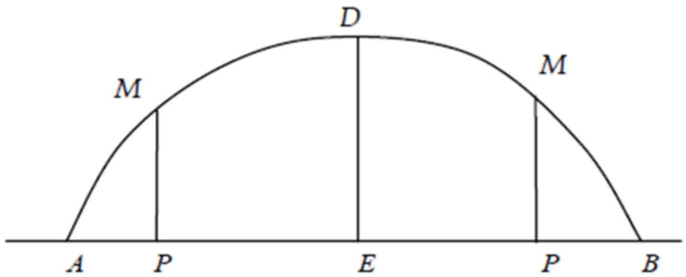


Fig. 4. Figura dada por L´Hopital sobre mayor ordenada. Extraída de [17], p.131.

Esta definición está fundamentada en la noción de tamaño, basándose en determinar dentro de un conjunto de ordenadas, cuál es la ordenada más grande o más pequeña. Implica un acto visual para el individuo y tiene un carácter geométrico dinámico fundamentado en la descripción del comportamiento de la curva en un entorno del punto.

La segunda y tercera aproximación están ligadas al cálculo de máximos y mínimos: una a partir de las diferencias y la otra sobre el concepto de recta tangente.

La segunda argumentación se justifica a través del signo de las diferencias infinitamente pequeñas:

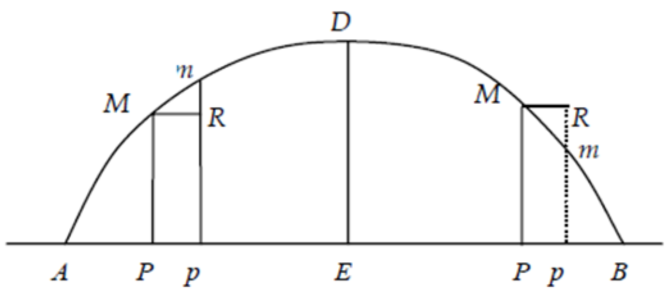


Fig. 5. Figura dada por L´Hopital para ilustrar las diferencias. Extraída de [17], p. 131

En palabras de L'Hopital (1696, citado [17], p. 131): "Si al crecer AP, PM también crece es evidente que su diferencia Rm será positiva con relación a la de AP, y que, por lo contario, cuando PM disminuya al crecer la abscisa AP; su diferencia será negativa".

Luego finaliza indicando que una diferencia no puede convertirse en positiva a negativa sin pasar antes por cero o por infinito. De esta manera el punto máximo será aquel en el cual las diferencias cambian de signo.

La tercera caracterización se fundamenta en observar la posición relativa que toman la subtangente y la tangente a medida que se consideran distintos puntos sobre la curva. El máximo se alcanza en el momento que la tangente se vuelve horizontal y paralela a la subtangente. En forma análoga sucede con el mínimo.

La explicación que da L'Hopital es la siguiente: supóngase una tangente en el punto M y su respectiva subtangente PT.

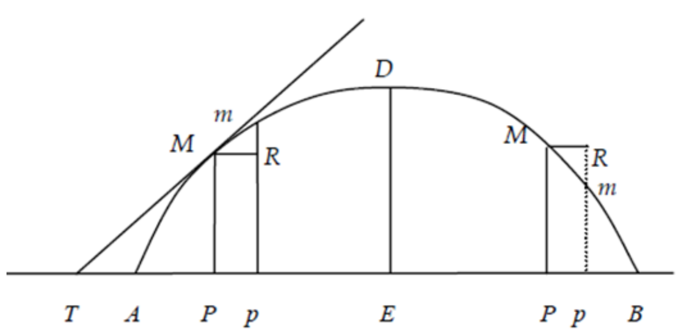


Fig. 6. Figura dada por L'Hopital para ilustrar la recta tangente. Extraída de [17], p. 132.

La subtangente PT crece (hacia la izquierda) a medida que M y P se acercan a los puntos D y E. Es evidente que cuando se construya la tangente en el punto D, la subtangente se vuelve infinita, de esta forma, cuando AP rebasa a AE, la subtangente PT se vuelve negativa de positiva que era, o el contrario. Cabe aclarar que L´Hopital también considera puntos de tangente vertical en sus ilustraciones.
Castañeda [17] indica que estos tres acercamientos que realiza L'Hopital intentan clarificar lo concerniente a la obtención de máximos y mínimos. El primero y el tercero se basan en argumentos geométricos, el segundo en las propiedades de los infinitesimales. Según Blanco [18] en los ejemplos que brinda L'Hopital ya se presupone si se busca un máximo o un mínimo, sin dar ninguna indicación sobre si es de un tipo o de otro. En ningún momento se establece un método para saber si el punto hallado es máximo o mínimo como lo hacemos actualmente por ejemplo, con el método de la derivada segunda.

6 Los aportes de MacLaurin

Según [7] es MacLaurin el primero en establecer un método correcto para distinguir entre máximo y mínimo. En el Tratado de fluxiones (1742) MacLaurin desarrolla criterios para encontrar máximos y mínimos a través de la serie de Taylor. Seguiremos el método tomando como base lo establecido en [13] usando la notación que conocemos actualmente (la cual es diferente de la utilizada por Maclaurin):

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \ldots \textbf{(7)}$$

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + .. \textbf{(8)}$$

Si $f'(a) = 0$ tenemos

$$f(a+h) - f(a) = \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \ldots \textbf{(9)}$$

Si $f''(a) > 0$ estamos en presencia de un mínimo. Si $f''(a) < 0$ la curva presenta un máximo en ese punto.
Con estos acercamientos se trabajó todo el siglo XVIII, en el que al final del mismo se intensificó el trabajo con series de potencias.

7 Síntesis y reflexión final

Considerando lo expuesto podemos dar cuenta que los problemas de máximos y mínimos conviven con los matemáticos desde hace siglos.
Los primeros ejemplos mostrados se abordan desde una perspectiva geométrica que era justamente la que prevalecía en la época. Los procedimientos usados son una combinación entre construcciones geométricas y argumentaciones y lenguajes propios de la geometría. Uno de los principales obstáculos al que se enfrentaban los matemáticos fue el escaso desarrollo del simbolismo y también el hecho que las expresiones algebraicas no existían. Esta falta de simbología impedía encontrar métodos de solución más generales, por lo que se dedicaban a resolver múltiples casos particulares.
La introducción de la representación analítica que realizaron Descartes y Fermat facilitó, por parte de este último, la creación de un método más general para determinar máximos y mínimos, pero el que tenía sus falencias. Por ejemplo, Fermat no pensaba en funciones sino en cantidades y no tenía clara la noción de variable independiente como la concebimos hoy en día. [15] expresan que el método es puramente algebraico y no supone inicialmente ningún concepto de límite ya que para Fermat la variable E no tiende a cero. De todas formas, los trabajos de Newton y Leibniz tienen en Fermat un valioso antecedente.
Newton calcula un extremo igualando a cero la fluxión y Leibniz hace lo mismo con el diferencial. En los dos casos son condiciones necesarias, pero no suficientes.
Luego analizamos el tratamiento de los extremos en el primer texto didáctico referido al cálculo, donde se brindan definiciones de los mismos y métodos para calcularlos. El libro posee una concepción geométrica-

dinámica del cálculo diferencial ya que la proposiciones y demostraciones se llevan a cabo en un lenguaje puramente geométrico. Debido a que en esa época no existía un lenguaje funcional, ni siquiera la noción de función, todo el estudio se basa en el análisis de curvas cuyas representaciones más utilizadas son las gráficas. Las curvas estudiadas son las clásicas como el Folium de Descartes o la parábola semicúbica de Neile. Respecto a los puntos críticos, estos se clasifican atendiendo a este carácter geométrico, siendo el criterio la posición de la tangente: horizontal o vertical. La condición suficiente de estudiar el cambio de signo de las diferencias no está explícita como en el estudio del signo de la derivada segunda que realiza MacLaurin para determinar si el punto crítico hallado es máximo o mínimo.

El análisis mostrado nos brinda elementos para reflexionar acerca de la enseñanza y el aprendizaje de este tema.

Los problemas de optimización no son fáciles de resolver y, si bien gracias a la invención del cálculo podemos contar con un método genérico, no debemos olvidar que pueden existir diversas formas de resolución. La visualización y el registro gráfico logran ser un primer acercamiento a la comprensión de lo que estamos buscando y a una solución más intuitiva. El registro analítico nos permite formalizar lo anterior. Desde el diseño de actividades para el aula podemos elaborar consignas que inviten al alumno a trabajar en forma gráfica, luego a tratar con casos particulares y, cuando se haya comprendido lo que intenta el problema resolver, pasar a un registro analítico y usar herramientas para resolverlo.

El primer texto didáctico sobre temas del cálculo aborda los extremos desde un punto de vista gráfico como la mayor o menor ordenada, desde el cálculo de las diferencias y desde la recta tangente. Si queremos que los estudiantes construyan por sí solos la manera de calcular máximos y mínimos, las actividades elaboradas pueden partir considerando sólo los signos de los cambios de la variable dependiente al pasar por un extremo y luego adentrarnos en el concepto de derivada.

La condición necesaria de extremo que usamos hoy en día se usó como única condición para hallarlos durante mucho tiempo, e inclusive no se hacía distinción entre máximo y mínimo porque era el mismo problema el que lo determinaba. Esto nos ayuda a entender las dificultades en el aprendizaje. Ante un problema de optimización o el cálculo de extremos son varios los alumnos que sólo calculan puntos de derivada cero (inclusive olvidan la no existencia de derivada) y luego no usan ningún método para establecer si estos puntos son realmente extremos de la función y de qué tipo.

Por último, enfatizamos la importancia de realizar un análisis histórico-epistemológico sobre un determinado concepto matemático. Este nos sirve como inspiración en el diseño de situaciones, problemas o actividades para plantear a los alumnos y como ayuda para poder comprender las dificultades de su aprendizaje.

Referencias

1. Baccelli, S.; Anchorena, S.; Moler, E.; Aznar, M. Análisis exploratorio de las dificultades de alumnado de Ingeniería en la resolución de problemas de optimización. *Números,* Vol. 84, pp. 99-113. (2013).

2. Cuesta, A. *El concepto de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad Autónoma de Barcelona. (2007).

3. Guzmán, I.; Ortega, L.; Tapia, X.; Rodríguez, N.; Pérez, L. La apropiación de los criterios de optimización en Cálculo Diferencial de estudiantes de Carreras no matemáticas.*Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics),* Vol. 20, No. 1, pp. 209-223. (2010).

4. Malaspina, U. *Intuición y rigor en la resolución de problemas de optimización. Un análisis desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática.* Tesis de doctorado no publicada, Pontificia Universidad Católica de Perú. (2008).

5. Cantoral, R.; Farfán, M. R. Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*, Vol. 42, pp. 353-372. (1998).

6. Meel, D. Modelos y teoría de comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* Vol. 6, No. 3, pp. 221-278. (2003).

7. Hancock, H. *Theory of maxima and minima*. Dover Publications, Inc. (1960).

8. Boyer, C. *Historia de la matemática* (4ta. Edición). Versión española de Mariano Martínez Pérez. Alianza Editorial. (1996).

9Dorrie, H. *100 Great Problems of Elementary Mathematics. Their history and solution.* Dover Publication Inc. (1965).
10. Pastore, J. Trigonometria e umantigo problema de otimização. http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/mod3_pdf/trigonometria-e-otimizacao.pdf. Accedido el 24 de mayo de 2016.
11. Pino, L., Godino, J., Font, V. Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educación Matemática. Pesquisa,* Vol. 13, No. 1, pp. 141-178. (2011).
12. Vrancken, S. *La construcción de la derivada desde la variación y el cambio articulando distintos sistemas*. Tesis de maestría no publicada, Universidad Nacional del Litoral. (2011).
13. Cantoral, R.; Farfán, M. *Historia de la matemática.* ITESM. (1999).
14. Collete, J. *Historia de las matemáticas II* (7ma. Edición). Siglo XXI Editores. (2013).
15. de la Torre, A., Suescún, C. y Alarcón, S. El método de máximos y mínimos de Fermat. *Revista Lasallista de investigación,* Vol. 2, No. 2, pp. 31-37. (2005).
16. González, M. Historia de la enseñanza del cálculo a través de los libros.*Educação Matemática Pesquisa,* Vol. 13, No. 3, pp. 415-437. (2011).
17. Castañeda, A. *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión.* Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. (2004).
18. Blanco, M. Análisis de la discusión L'Hopital-Bernoulli. *Cronos,* Vol. 4, No. 1-2, pp. 81-113. (2001).

Comunicación

Comunicación

Justificación teórica del diseño de actividades relacionadas con el concepto de derivada

Favieri Adriana[1,] Betina Williner[1], Scorzo Roxana[1], Falsetti Marcela[1]
[1]Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional de La Matanza
Florencio Varela 1903, San Justo, Provincia de Buenos Aires, Argentina
{afavieri .bwilliner, rscorzo.mfalsetti}@unlam.edu.ar

Resumen. En la asignatura Análisis Matemático I del Departamento de Ingeniería e Investigaciones tecnológicas de la Universidad Nacional de La Matanza diseñamos una serie de actividades relacionadas con el concepto de derivada para poner en juego diversos registros de representación y fomentar el desarrollo de ciertas habilidades matemáticas. En este trabajo mostramos la justificación teórica de dicho diseño que orientó tanto la presentación de los registros de representación adecuados como la determinación de las habilidades matemáticas a desarrollar. Mostramos también la relación entre los ítems de las tareas y las habilidades. Concluimos el artículocon consideraciones sobre lo realizado y reflexiones sobre las ventajas de diseñar de acuerdo a aportes teóricos.

Palabras Clave: registros de representación, habilidades matemáticas, diseño de actividades, derivadas.

1. Introducción

En la asignatura Análisis Matemático I del Departamento de Ingeniería e Investigaciones tecnológicas (DIIT) de la Universidad Nacional de La Matanza (UNLaM) nos interesa analizar el desarrollo de habilidades matemáticas vinculadas al concepto de derivada cuando los alumnos trabajan con actividades dadas en diversos registros de representación. Entre las acciones que llevamos a cabo se encuentra el diseño de actividades con el fin de lograr en el estudiante un buen desempeño. Luego de una búsqueda bibliográfica sobre las habilidades matemáticas y las diferentes representaciones semióticas de los objetos matemáticos decidimos qué clase de actividades podrían ser adecuadas para tal fin. Decidimos realizar la experiencia a través de tres actividades, una de funciones, otra de límite y la tercera sobre derivada exclusivamente; las dos primeras actividades fueron preparatorias e introductorias al concepto de derivada. Resolvimos también utilizar variedad de registros de representación, y concentrarnos en dos modelos de funciones: la función cuadrática y la proporción inversa entre dos variables. Los modelos cuadráticos elegidos representan el origen del concepto de derivada: uno geométrico sobre recta tangente y el otro sobre velocidad de un cuerpo en movimiento. El otro modelo representa una situación simple de Física en la cual se quiere estudiar un fenómeno de variación. El diseño de estas actividades lo realizamos de acuerdo a los aportes teóricos sobre registros de representación y sobre habilidades matemáticas. En este artículo, presentamos los fundamentos teóricos que orientaron el diseño en relación con los registros de representación y con las habilidades matemáticas y realizamos la explicación detallada de la actividad correspondiente a funciones, exhibiendo las justificaciones para las actividades que, por un lado, ponen en juego los registros de representación elegidos y, por otro, pretenden que se desarrollen las habilidades matemáticas elegidas. Mostramos también la estrecha relación entre los temas de los ítems de cada tarea con los registros y con las habilidades Concluimos el trabajo con consideraciones sobre las ventajas de diseñar actividades de acuerdo a la teoría.

2. Marco teórico

2.1. Registros de representación

En Matemática el sujeto no entra en contacto directo con el objeto de estudio sino con una representación particular de ese objeto matemático [1]. Existen tres polos que no deben confundirse:

- El objeto representado.
- El contenido de una representación, es decir lo que una representación particular presenta del objeto.
- La forma de representación, llamada registro o sistema de representación [2].

La comprensión emerge en los sujetos mediante la coordinación de al menos dos registros de representación [2]. Es imprescindible comprender los sistemas de representación por varias razones: los objetos matemáticos están expresados en una variedad de registros, sólo podemos acceder a los objetos matemáticos a través de vías de representación y por último, porque la representación de un objeto nos muestra ciertas características del mismo y no otras [1]. De esta forma cuanto más sistemas se puedan coordinar mejor se conocerá el objeto en cuestión.

Los que involucramos en este trabajo son:

- Registro verbal: El lenguaje coloquial es el utilizado para representar situaciones que pueden ser modeladas en cualquiera de los otros registros.
- Registro analítico: Se expresa analíticamente un concepto recurriendo a notaciones matemáticas adecuadas utilizando símbolos acordados.
- Registro gráfico: Es la representación en el plano cartesiano o eje real o espacio de acuerdo a qué objeto se está tratando.
- Registro numérico: cuando los datos están dados por cantidades y números que se pueden organizar a través de tablas [3] y brindar información de aproximaciones a valores y evaluaciones, de tendencias, etc.

Con los registros de representación se pueden realizar las siguientes operaciones cognitivas:

- Formulación: Es la formación de una representación identificable y comunicable.
- Tratamiento: es la transformación de la representación dentro del mismo registro usado para la representación formada. donde ha sido formulada.
- Conversión: es la transformación de la representación en otra representación en otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial.

2.2. Habilidades matemáticas

Respecto a la definición de habilidad, varios autores ([4], [5], [6], [7]), hablan de procedimientos o habilidades como los modos de actuación, de un saber hacer o de contenidos procedimentales. Nosotros definimos procedimiento a la acción o tarea que debemos realizar para lograr un objetivo o fin en el cual la matemática está involucrada. En tanto que una habilidad matemática es la facultad personal de efectuar el

procedimiento eficientemente, es decir, la capacidad de realizar acciones correctamente que conducen al logro del objetivo planteado.
En el año de 1956, Benjamín Bloom, desarrolló su taxonomía de Objetivos Educativos, que sostiene que el proceso de aprendizaje está relacionado con tres dominios psicológicos, el dominio cognitivo para procesar información, conocimiento y habilidades mentales, el dominio afectivo relacionado con las actitudes y sentimientos y el dominio psicomotor, vinculado a las habilidades manipulativas, manuales o físicas. Lorin Anderson revisó dicha taxonomía y publicó, en el año 2001, la Taxonomía Revisada de Bloom, que como novedad incorpora el uso de verbos en lugar de sustantivos para cada categoría. Las categorías incluyen las habilidades recordar, comprender, aplicar, analizar, evaluar y crear [8].
En cuanto a las habilidades matemáticas, Delgado Rubí [6] aporta una clasificación la cual resume las habilidades matemáticas en habilidades conceptuales, traductoras, operativas, heurísticas y meta-cognitivas. Profundizando cada una de ellas:

- Habilidades conceptuales: aquellas que operan directamente con los conceptos (identificar, fundamentar, comparar, demostrar)
- Habilidades traductoras: aquellas que permiten pasar de un dominio a otro del conocimiento (interpretar, modelar, recodificar)
- Habilidades operativas: funcionan generalmente como auxiliares de otras más complejas y están relacionadas con la ejecución en el plano material o verbal (graficar, algoritmizar, aproximar, optimizar, calcular).
- Habilidades heurísticas: aquellas que emplean recursos heurísticos y que están presentes en un pensamiento reflexivo, estructurado y creativo (resolver, analizar, explorar)
- Habilidades metacognitivas: las que son necesarias para la adquisición, empleo y control del conocimiento y demás habilidades cognitivas (planificar, predecir, verificar, comprobar, controlar).

2.3. Enseñanza de la derivada

Con respecto a investigaciones vinculadas con el concepto de derivada, varios autores que han trabajado con el concepto de derivada mediante actividades diseñadas para tal fin sostienen que es necesario incorporar la noción de variación, razón promedio e instantánea de la variación ([9], [10], [11], [12]). Este enfoque, que los autores llaman variacional, permite acercarse a los significados de la aproximación, local y global, propios del análisis matemático, y trascender los enfoques algebraico y formalista que hacen hincapié en la transformación algebraica de expresiones y fórmulas para salvar indeterminaciones, en la resolución algebraica de desigualdades con módulo y en la definición formal de límite. El enfoque variacional, trata de construir el significado de la derivada incorporando también un abordaje numérico y geométrico al analítico.

3. Breve referencia al contexto de clase para la implementación de actividades.

Las actividades las utilizamos en la cátedra de Análisis Matemático I del DIIT de la UNLaM, asignatura de régimen cuatrimestral con carga horaria de 8 horas reloj por semana con temas de cálculo diferencial e integral en una variable. Los cursos cuentan con un promedio de 70 alumnos y dos docentes por cada uno de ellos. Dentro de la metodología de trabajo de la misma, hay un espacio de clases bajo modalidad taller en las cuales los alumnos resuelven actividades en equipos de dos personas para resolver problemas y diferentes actividades. Éstas se refieren a funciones, límite, derivada, problemas de optimización, ecuaciones diferenciales sencillas e integrales definidas. Consideramos este espacio de trabajo como una buena oportunidad para poner en práctica las actividades mostradas en este artículo.

4. Recorrido metodológico para el diseño de las actividades

El trabajo se realizó mediante los siguientes pasos:

- Justificación teórica de los registros de representación elegidos
- Justificación teórica de las habilidades matemáticas seleccionadas

- Selección de los temas de los ítems de acuerdo a las habilidades matemáticas y los registros
- Diseño de la actividad de acuerdo a las selecciones previamente hechas

Explicamos a continuación cada uno de ellos.

4.1. Justificación teórica del uso combinado de más de un registros de representación

Con el fin de facilitar un acceso rápido, visual y de cálculo, y acorde al enfoque variacional de la enseñanza de la derivada ya mencionado, decidimos utilizar en la presentación de la tarea dos registros, gráfico y numérico. Para el primer registro hicimos dos variantes, registro gráfico considerando una función de trazo continuo, y otra, dada por un conjunto finito de puntos. Para el registro numérico elegimos utilizar una tabla a doble entrada. Con el fin de incrementar la variedad de registros usados y que el alumno se habitúe a hacer conversiones entre los mismos tomamos la decisión de pedir estos cambios expresamente en cada tarea.

La propuesta de consignas para poner en juego más de un registro, se fundamenta en los trabajos de Duval y Rojas, pues de acuerdo a estos autores, la comprensión emerge mediante la coordinación de al menos dos registros de representación [2], a su vezque los mismos ofrecen mayores posibilidades de apreciar ciertas características de dichos objetos matemáticos [1]. El registro gráfico con función continua lo elegimos pues los alumnos están habituados a ver funciones de este estilo y mucho más una parábola que suele estar presente en los estudios secundarios previos y en el curso de admisión a la UNLaM. Tanto el registro gráfico dado por un conjunto de puntos como el registro numérico lo seleccionamos con el fin de ir introduciendo al alumno a otras maneras de trabajar más propias de la ingeniería, en la cual, al resolver problemas concretos es muy probable que se encuentre con este tipo de registros. Para fines didácticos se han reducido el conjunto de puntos a seis para el registro gráfico y a cuatro pares ordenados para el registro numérico.

4.2. Justificación teórica de las habilidades matemáticas seleccionadas

Las habilidades matemáticas elegidas para esta actividad de funciones son:

- Identificar variable independiente y dependiente, dominio e imagen en funciones y en diferentes contextos
- Identificar y diferenciar razón de cambio promedio
- Calcular razones de cambio promedio por medios numéricos y analíticos
- Explicar el significado de razón de cambio promedio en funciones y en diferentes contextos

Esta selección de habilidades tiene su justificación teórica en los aportes de Bloom con su Taxonomía que categoriza y ordena tanto las habilidades de pensamiento como el proceso del aprendizaje, sus actualizaciones y en los trabajos de investigación de Dolores y García ([9], [10]). Como esta es la primera actividad relacionada con el concepto de derivada sólo estamos apuntando a habilidades de los niveles recordar y aplicar, de acuerdo a la Taxonomía de Bloom y sus actualizaciones. La consideramos como una actividad preparatoria como sostiene Dolores, ya que esperamos que el alumno se familiarice con aspectos variacionales y a formas de trabajo apropiadas.

Nos centramos en los conceptos de variable independiente y dependiente y en razón de cambio en un intervalo pues, como sostienen Dolores y García, la comprensión del concepto de derivada puede lograrse a través de la formación de ideas variacionales, basadas en tres nociones físicas: la variación, la rapidez media de la variación y la rapidez instantánea de la variación. Estos autores también recomiendan trabajar con situaciones de movimiento de un cuerpo y con la interpretación geométrica de la derivada. Nosotros incorporamos un modelo más a fin que el alumno aprecie que existe situaciones de variación en las cuales la variable independiente no es el tiempo.

4.3. Selección de los temas de los ítems de acuerdo a las habilidades matemáticas y los registros

Para la habilidad "Identificar variable independiente y dependiente en funciones y en diferentes contextos", consideramos apropiado que los ítems de la tarea estuvieran relacionados con el hallazgo de dominio e imagen tanto en funciones matemáticas generales como en problemas con contexto particular y la diferenciación entre variable independiente y dependiente.

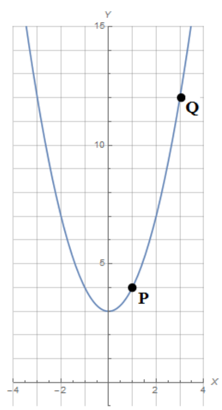
Con el fin de contribuir al desarrollo de la habilidad "Identificar y diferenciar razón de cambio promedio", pretendimos lograrlo a través del cálculo de cambios o variaciones de la variable dependiente, en funciones y en diferentes contextos, por lo que los ítems relacionados son el cálculo de variaciones de variables independientes y dependientes; como así también por medio del cálculo de razones de cambio promedio por medios numéricos y analíticos.

Para fomentar la habilidad "Explicar el significado de razón de cambio promedio en funciones y en diferentes contextos de la razón de cambio promedio", decidimos incorporar trazado de recta secante con la ecuación correspondiente y la relación entre la pendiente de la recta secante y el cociente incremental. Y cálculo de cociente incremental y su explicación de acuerdo al contexto de los problemas.
Los ítems se repiten casi en todos los modelos elegidos (correspondientes a las tres tareas). El objetivo de esto es que el alumno identifique que el cálculo de cada cambio o de cada razón de cambio promedio es el mismo en los tres casos, pero con diferente notación y con distinta interpretación de acuerdo al contexto elegido.

4.4. Diseño de la actividad de acuerdo a las selecciones previamente hechas

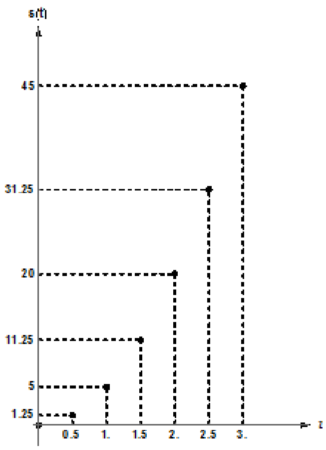
En este apartado mostramos el diseño de las tareas de la actividad de acuerdo a las decisiones teóricas previamente hechas. En una primera tabla se verán las tareas de la actividad con el registro de representación utilizado y la conversión solicitada, y a continuación, una tabla por cada una de las habilidades matemáticas en la que podemos apreciar la relación con los ítems de las tareas.

Tabla 1. Enunciados tareas, registros de representación y conversiones.

Actividad	**Registro de la tarea**	**Conversión solicitada**
Tarea 1		
La siguiente gráfica corresponde a una función f(x)  a) Hallar dominio e imagen b) Indicar las coordenadas de los puntos P y Q. c) Expresar la función en registro analítico. d) Calcular la variación de ambas variables cuando la función cambia de P hacia Q. e) Calcular la razón de cambio promedio. f) Trazar la recta que pasa por dichos puntos y determinar su ecuación. g) ¿Qué relación existe entre la pendiente de la recta secante y el cociente calculado en el ítem e?	Registro gráfico (función continua).	Registro analítico, tanto en la función como en las coordenadas de los puntos
Tarea 2		

El siguiente gráfico de puntos representa la posición de un móvil a lo largo del intervalo de tiempo [0,3], en donde t se mide en segundos y s(t) en metros.

a) Indicar dominio e imagen en el contexto del problema.



b) ¿Cuál es la variable independiente y cuál la dependiente?

c) Unir los puntos en el gráfico y realizar una tabla de acuerdo a los datos dados en el gráfico.

d) Calcular la variación Δs para intervalos de 1 segundo

e) Calcular el cociente $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ a intervalos de 1 segundo

f) Explicar con tus palabras qué significado tiene ese cociente en el contexto del problema

Registro gráfico: conjunto de puntos

Registro analítico para indicar dominio e Imagen

Registro numérico, para construir la tabla

Registro verbal al explicar significado

Tarea 3

Con el objetivo de analizar la variación del volumen de cierto gas al variar su presión se realiza con dicho gas y, a temperatura constante, una experiencia en la que se obtiene la siguiente tabla de valores.

P(atm)	1	4	7	10
V(lts)	30.00	7.45	4.3	3.00

a) Indicar dominio e imagen en el contexto del problema.

b) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Cuál la dependiente?

c) Graficar los puntos de la tabla y unirlos.

d) Calcular los cambios ΔV del volumen para intervalos de tres atmósferas.

e) Calcular el cociente $\frac{\Delta V}{\Delta P}$ a intervalos de tres atmósferas.

f) Explicar con tus palabras qué significado tiene ese cociente bajo el contexto del problema.

Registro numérico

Registro analítico para indicar dominio e Imagen

Registro gráfico: función de trazo continuo

Registro verbal al explicar significado

Tabla 2. Habilidad: Identificar variable independiente y dependiente, dominio e imagen en funciones y en diferentes contextos

Temas de los ítems	Ítems correspondientes en las tareas
Hallazgo de dominio e imagen tanto en funciones matemáticas generales como en problemas con contexto particular Diferenciación entre variable independiente y dependiente.	**Tarea 1** – Hallar dominio e imagen – Indicar las coordenadas de los puntos P y Q. – Expresar la función en registro analítico. **Tarea 2** – Hallar dominio e imagen en el contexto del problema. – ¿Cuál es la variable independiente y cuál la dependiente? – Unir los puntos en el gráfico y realizar una tabla de acuerdo a los datos dados en el gráfico. **Tarea 3** – Hallar dominio e imagen en el contexto del problema.

	– ¿Cuál es la variable independiente y cuál la dependiente? – Graficar los puntos de la tabla y unirlos con un trazo continuo.

Tabla 3. Habilidad: Identificar y diferenciar razón de cambio promedio

Temas de los ítems	Ítems correspondientes en las tareas
Cálculo de variaciones de variables independientes y dependientes	**Tarea 1** – Calcular la variación de ambas variables cuando la función cambia de P hacia Q. – Calcular la razón de cambio promedio.
Cálculo de variaciones de variables independientes y dependientes	**Tarea 2** – Calcular la variación Δs para intervalos de 1 segundo – Calcular el cociente $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ a intervalos de 1 segundo **Tarea 3** – Calcular los cambios ΔV del volumen para intervalos de tres atmósferas. – Calcular el cociente $\frac{\Delta V}{\Delta P}$ a intervalos de tres atmósferas.

Tabla 4. Habilidad: Explicar el significado de razón de cambio promedio en funciones y en diferentes contextos

Temas de los ítems	Ítems correspondientes en las tareas
Trazado de recta secante con la ecuación correspondiente y la relación entre la pendiente de la recta secante y el cociente incremental.	**Tarea 1** – Trazar la recta que pasa por dichos puntos y determinar su ecuación. – ¿Qué relación existe entre la pendiente de la recta secante y el cociente calculado en el ítem e?
Explicación del significado del cociente incremental de acuerdo al contexto de los problemas.	**Tarea 2** – Explicar con tus palabras qué significado tiene ese cociente en el contexto del problema **Tarea 3** – Explicar con tus palabras qué significado tiene ese cociente en el contexto del problema.

5. Consideraciones finales

El diseño de actividades de acuerdo a marcos teóricos es una tarea que precisa de un análisis minucioso de los ítems a incluir y los aspectos que resultarían más adecuados para lograr los objetivos que el docente se plantea. Es necesario redactar los ítems o enunciados de las mismas con cuidado, tratando de evitar ambigüedades que den lugar a interpretaciones erróneas.

Consideramos que la inclusión de varios registros de representación y las diferentes conversiones es un aspecto facilitador para abordar conceptos complejos como el de derivada. Otro aspecto a analizar es el nivel de dificultad de las tareas, intentando que sea en orden creciente y comenzado por niveles más sencillos para que todos los alumnos puedan comenzar la resolución de las tareas de manera más sencilla.

Como el diseño se centró en la vinculación de los temas y las habilidades matemáticas e incluimos tres diferentes registros de representación para la actividad, nos ha resultado beneficioso trabajar de manera paralela con ellos para intentar que cada ítem de cada tarea esté relacionado con el mismo tema. De esta manera no aseguramos que el alumno trabaje con el mismo concepto desde varios puntos de vista.

La propuesta de enseñanza comenzó con actividades preparatorias para el concepto de derivada, esto quiere decir que, aunque no estemos nombrando el concepto, sí hacemos hincapié en los aspectos destacados, esto es distinguir variables independientes de dependientes, la variación de dichas variables y el cociente incremental, aunque el mismo no fue nombrado de esa manera. Otro aspecto considerado es la introducción de la notación matemática de manera coherente, ya que incorporamos el símbolo delta (Δ) para indicar variación y se usó

varias veces: en la función cuadrática para hallar la recta secante, para el conjunto de puntos y para la tabla con valores del volumen de un gas en función de la presión.
Dado que esta es la primera actividad con la que se enfrentan los alumnos, la diseñamos de tal manera que las habilidades matemáticas a desarrollar fueran sencillas, pertenecientes a niveles de pensamiento iniciales de acuerdo a la Taxonomía de Bloom, y dejamos para las otras actividades, la correspondiente a límite y a derivadas, habilidades matemáticas de niveles superiores.

6. Conclusiones y trabajo futuro

El diseño de esta actividad de acuerdo a los aportes teóricos de los registros de representación de Duval y la taxonomía de Bloom y el análisis realizado, nos ayuda a reflexionar sobre algunas conclusiones:

– La necesidad de dedicarle tiempo suficiente al diseño de las actividades, ya que es necesario balancear la cantidad de ítems de las tareas, la variedad de registros, las conversiones y las habilidades.

– El considerar modelos sencillos de funciones, que no estén tan alejados de los conocimientos previos de los alumnos así podemos ir introduciendo conceptos complejos como el de derivada a partir de funciones conocidas.

– La incorporación de varios registros de representación para el mismo tema o ítem para abordarlo de diversas maneras y favorecer la comprensión del mismo.

– Al utilizar registro gráfico con conjuntos de puntos o registro numérico con tabla a doble entrada, es conveniente minimizar la cantidad de pares ordenados para no generar distracción en cuentas o saturación de información, lo que podría generar bloqueo en los alumnos.

– En estas tareas hemos utilizado varios ítems tratando de ser precisos con los enunciados para conducir los aprendizajes de los alumnos. Este modo de ejecución de tareas secuenciadas ha resultado muy orientador para nuestro estudiantado, habituado más a la ejecución que a la captación global del problema o a la libertad de abordaje de consignas más abiertas.

– Tener establecida la relación entre las habilidades matemáticas y los ítems de los enunciados de las tareas facilita la evaluación de las mismas al momento de la corrección de las producciones de los alumnos.

Este último punto nos ha resultado una importante ventaja que esperamos aprovechar en nuestro trabajo futuro el cual se centrará en la elaboración de rúbricas para evaluar la presencia de las habilidades matemáticas de los alumnos. Consideramos este trabajo como punto de partida y marco de referencia para la justificación de dicha rúbrica.
Por último cabe señalar que el aporte que pretendemos realizar con el presente artículo es mostrar cómo el diseño y la presentación de tareas a los estudiantes desde bases teóricas didácticas y cognitivas, provenientes de la investigación, podría resultar más enriquecedor y eficiente para el aprendizaje universitario de temas introductorios que solamente adaptar los textos matemáticos al perfil del alumnado.

Referencias

1. Rojas, P. Sistemas de representación y aprendizaje de las matemáticas. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*. http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/ (2012). Accedido el 10 de marzo de 2013.
2. Duval, R.: Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Hitt, F. (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II,* pp. 173-201. Grupo Editorial Iberoamérica. (1998). Traducción de Registres de preséntationssémiotiques et fonctionnementcognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de ScienceCognitives*, Vol 5, pp. 37-65 (1993).
3. Prieto, F. y Vicente, S. Análisis de registros semióticos en actividades de ingresantes a la facultad de ingeniería. Ponencia presentada enI REPEM (2006).

4. Hernández Fernández, H.: Vigotsky y la estructuración del conocimiento matemático. Experiencia cubana. Hernández Fernández, H.; Delgado Rubí, J.R.; Fernández de Alaíza, B.; Valverde Ramírez, L. & Rodríguez Hung, T. (Eds). *Cuestiones de didáctica de la Matemática.* Serie Educación. Homo Sapiens Ediciones. pp. 33-53. (1998).
5. Delgado Rubí, J.R. Los procedimientos generales matemáticos. Hernández Fernández, H.; Delgado Rubí, J.R.; Fernández de Alaíza, B.; Valverde Ramírez, L. & Rodríguez Hung, T. (Eds). *Cuestiones de didáctica de la Matemática.* Serie Educación. Homo Sapiens Ediciones, pp. 69-87. (1998).
6. Zabala, A. Los enfoques didácticos. Coll, C.; Martín, E.; Mauri, T.; Miras, M.; Onrubia, J.; Solé, I. & Zabala, A. (Eds). *El constructivismo en el aula*. Editorial GRAÓ, pp.125-161. (2007).
7. Sánchez, M. La investigación sobre el desarrollo y la enseñanza de las habilidades del pensamiento. *Revista Electrónica de Investigación Educativa,* Vol. *4,* No 1. http://redie.ens.uabc.mx/vol14no1/contenido-amestoy.html(2002). Accedido el 4 de diciembre de 2009.
8. Churches, A. Taxonomía de Bloom para la era digital..http://www.eduteka.org/TaxonomiaBloomDigital.php (2009). Accedido el 1 de febrero de 2017.
9. Dolores, C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. Cantoral, R. (Ed). *El futuro del Cálculo Infinitesimal, ICME 8*. Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 155-181. (2000).
10. García, M. *Una situación de aprendizaje para contribuir a la mejora de la comprensión del concepto de derivada*. Tesis de maestría no publicada, Universidad autónoma de Guerrero, Unidad Académica de Matemáticas, Centro de Investigación en Matemática Educativa. (2011).
11. Vrancken, S., Engler, A., Müller, D. Una propuesta para la introducción del concepto de derivada desde la variación. Análisis de los resultados. *Premisa,* Vol. 10, No. 38, pp. 36-46. (2008).
12. Vidal, O. *Interpretación de la noción de derivada como razón de cambio instantánea en contextos matemáticos.* Tesis de Maestría no publicada, Universidad Nacional de Colombia. (2012).

Actividades para promover el desarrollo de habilidades matemáticas en torno al concepto de derivada: diseño y prueba piloto.

Betina Williner[1], Scorzo Roxana[1], Favieri Adriana[1]
[1]Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional de La Matanza
Florencio Varela 1903, San Justo, Provincia de Buenos Aires, Argentina
{bwilliner, rscorzo.afavieri}@unlam.edu.ar

Resumen. El presente artículo reporta un conjunto de actividades diseñadas para promover el desarrollo de habilidades matemáticas en estudiantes de ingeniería de la Universidad Nacional de La Matanza. El propósito de las mismas es que los alumnos construyan el concepto de derivada y utilicen diferentes registros de representación. Esto forma parte de un proyecto de investigación cuyo objetivo general es explorar el desarrollo de habilidades matemáticas ligadas al concepto de derivada cuando los alumnos resuelven actividades con las características anteriormente mencionadas. El estudio surge debido a las serias dificultades que tienen los alumnos para comprender dicho concepto, cuya importancia es trascendental en la formación de un ingeniero. Presentamos las actividades, hacemos una discusión general de las mismas y por último mostramos los resultados de una prueba piloto que nos permiten realizar ajustes en el diseño.

Palabras Clave: Derivada, Habilidades matemáticas, Diseño de actividades.

1. Introducción

Este artículo surge como parte de una investigación que realizamos en el Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas (DIIT) de la Universidad Nacional de La Matanza (UNLaM) sobre el desarrollo de habilidades matemáticas y el aprendizaje del concepto de derivada. El objetivo general del estudio es explorar el desarrollo de habilidades matemáticas ligadas al concepto de derivada cuando los alumnos resuelven actividades especialmente diseñadas que involucran diversos sistemas de representación.
Desde hace varios años que parte de la comunidad de educadores matemáticos pone su atención en la falta de comprensión por parte de los alumnos de uno de los conceptos más importantes del Cálculo: la derivada. Dentro de los autores que reflejan esta problemática elegimos a Cantoral y Mirón [1] que expresan:

> (…) la enseñanza habitual del análisis matemático logra que los estudiantes deriven, integren, calculen límites elementales sin que sean capaces de asignar un sentido más amplio a las nociones involucradas en su comprensión. De modo que aun siendo capaces de derivar una función no puedan reconocer en un cierto problema la necesidad de una derivación (pp. 269-270).

En el caso de alumnos de ingeniería la construcción adecuada de este concepto se hace indispensable. A través del mismo se resuelven problemas de optimización, se estudian funciones y sus características, se pueden realizar aproximaciones, entre otros.
A su vez estos alumnos, futuros ingenieros, usan la matemática como herramienta; es decir deben aplicar conocimiento a la resolución de problemas, deben saber "hacer". Este saber hacer se involucra con las habilidades matemáticas, ya que son las acciones o tareas orientadas al logro de un objetivo donde la matemática está involucrada. El desarrollo de habilidades matemáticas ayuda al alumno a no proceder en forma mecánica, memorizando conceptos, definiciones, teoremas y técnicas. Éstas lo auxilian a planificar, a evaluar, a deducir, a inducir, a razonar en matemática, teniendo la capacidad de adaptarse a distintas situaciones y problemas, tal como lo hará una vez inserto en su vida laboral con otros temas. Pensamos que, si ofrecemos al estudiante la posibilidad de enfrentarse a situaciones que lo inviten a desplegar sus facultades creativas para resolverlas por sí mismo, que pueda "hacer" en vez de "copiar", estaremos dándole la oportunidad de "despertarles el gusto por un razonamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello" [2]
Otro punto que tuvimos en cuenta en la producción de conocimiento matemático es el empleo de diversos sistemas o registros de representación: numérico, gráfico, algebraico y verbal. Duval [3] indica que la comprensión de un objeto matemático está basada en la coordinación de al menos dos sistemas de representación. En los últimos años se ha fortalecido la postura de que el aprendizaje de la matemática se

favorece cuando se incorporan en su enseñanza actividades didácticas en las cuales se usan y articular diferentes sistemas de representación [4].

La combinación de estos aspectos: aprendizaje de la derivada, habilidades matemáticas y registros de representación nos conducen a formular las siguientes preguntas: ¿qué habilidades matemáticas son convenientes desarrollar en los alumnos para que logren una construcción adecuada del concepto de derivada? ¿qué tipo de actividades diseñar para desarrollar habilidades en torno al concepto de derivada y que promuevan el uso flexible de diferentes registros de representación?

Presentamos a continuación cómo seleccionamos las habilidades matemáticas que pensamos favorecen a la comprensión del concepto tratado, cómo diseñamos las actividades que las involucran y los resultados de una prueba piloto que tuvo como objetivo poner a punto la situación didáctica planteada.

2. Marco teórico

2.1. Habilidades matemáticas

Respecto a la definición de habilidad, varios autores ([5], [6], [7], [8]), hablan de procedimientos o habilidades como los modos de actuación, de un saber hacer o de contenidos procedimentales. Nosotros definimos procedimiento a la acción o tarea que debemos realizar para lograr un objetivo o fin en el cual la matemática está involucrada. En tanto que una habilidad matemática es la facultad personal de efectuar el procedimiento eficientemente, es decir, la capacidad de realizar acciones correctamente en relación al logro del objetivo planteado.

En el año de 1956, Benjamín Bloom, desarrolló su taxonomía de Objetivos Educativos, que sostiene que el proceso de aprendizaje está relacionado con tres dominios psicológicos, el dominio cognitivo para procesar información, conocimiento y habilidades mentales, el dominio afectivo relacionado con las actitudes y sentimientos y el dominio psicomotor, vinculado a las habilidades manipulativas, manuales o físicas. Lorin Anderson revisó dicha taxonomía y publicó, en el año 2001, la Taxonomía Revisada de Bloom, que como novedad incorpora el uso de verbos en lugar de sustantivos para cada categoría. Las categorías incluyen las habilidades recordar, comprender, aplicar, analizar, evaluar y crear [9].

Otro autor que clasifica las habilidades, y en este caso las habilidades matemáticas, es Delgado Rubí [6]. Esta clasificación resume las habilidades matemáticas en habilidades conceptuales, traductoras, operativas, heurísticas y meta-cognitivas. Profundizando cada una de ellas:

- Habilidades conceptuales: aquellas que operan directamente con los conceptos (identificar, fundamentar, comparar, demostrar)
- Habilidades traductoras: aquellas que permiten pasar de un dominio a otro del conocimiento (interpretar, modelar, recodificar)
- Habilidades operativas: funcionan generalmente como auxiliares de otras más complejas y están relacionadas con la ejecución en el plano material o verbal (graficar, algoritmizar, aproximar, optimizar, calcular).
- Habilidades heurísticas: aquellas que emplean recursos heurísticos y que están presentes en un pensamiento reflexivo, estructurado y creativo (resolver, analizar, explorar)
- Habilidades metacognitivas: las que son necesarias para la adquisición, empleo y control del conocimiento y demás habilidades cognitivas (Planificar, Predecir, Verificar, Comprobar, Controlar).

2.2. Registros de representación

En matemática el sujeto no entra en contacto directo con el objeto en estudio sino con una representación particular de ese objeto matemático [10]. Existen tres polos que no deben confundirse:

- El objeto representado.
- El contenido de una representación, es decir lo que una representación particular presenta del objeto.
- La forma de representación, llamada registro o sistema de representación [3].

Así la comprensión emerge en los sujetos mediante la coordinación de al menos dos registros de representación [3]. Es imprescindible comprender los sistemas de representación porque los objetos matemáticos están dispuestos en una variedad de registros, porque sólo podemos acceder a los objetos matemáticos a través de las vías de representación y porque la representación de un objeto nos muestra ciertas

características del mismo y no otras [10]. De esta forma cuantos más sistemas podamos coordinar mejor conoceremos el objeto en cuestión.
Los que involucramos en este trabajo son:

- Registro verbal: El lenguaje coloquial es el utilizado para representar situaciones que pueden ser modeladas en cualquiera de los otros registros.
- Registro analítico: Se expresa analíticamente un concepto recurriendo a notaciones matemáticas adecuadas utilizando símbolos acordados.
- Registro gráfico: Es la representación en el plano cartesiano o eje real o espacio de acuerdo a qué objeto se está tratando.
- Registro numérico: cuando los datos están dados, por ejemplo, a través de tablas [11].

Considerando que se pueden realizar las siguientes operaciones:

- Tratamiento: es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formulada.
- Conversión: es la transformación de la representación en otra representación en otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial.

3. Nuestro contexto

Nuestro contexto es la cátedra de Análisis Matemático I del DIIT de la UNLaM. Esta materia posee un programa tradicional de cálculo diferencial e integral en una variable y es de cursada cuatrimestral con carga horaria de 8 horas reloj por semana. Desde el año 2013 estamos trabajando con una modalidad de enseñanza que combina clases tradicionales expositivas-dialogadas con clases bajo modalidad taller donde los alumnos trabajan con actividades en equipos de dos personas. Estas actividades se basan en los temas fundamentales de la materia: funciones, límite, derivada, problemas de optimización, ecuaciones diferenciales sencillas e integrales definidas. Trabajamos con modelos matemáticos simples (movimiento de una partícula, crecimiento de una población, enfriamiento de un cuerpo, etc.) y las presentamos en distintos registros de representación. Para este espacio contamos con un cuadernillo de actividades común a todas las comisiones de la cátedra. Este espacio es el campo propicio para que el alumno desarrolle habilidades matemáticas vinculadas a los conceptos matemáticos propios del cálculo.

4. Proceso de desarrollo del trabajo

El proceso de desarrollo del trabajo consta de las siguientes etapas:

- Indagación en bibliografía sobre investigaciones y experiencias que tienen como objetivo favorecer en el alumno la comprensión del concepto de derivada.
- Elección de las habilidades matemáticas que consideramos favorecen la comprensión de dicho concepto.
- Indagación sobre diseño de actividades usando diversos registros de representación y basadas en el concepto de derivada.
- Búsqueda en el cuadernillo de la cátedra sobre actividades que se adecúen a nuestro propósito.
- Diseño de actividades.
- Experiencia piloto para ajustar cuestiones como: claridad en las consignas, tiempos de resolución por parte de los alumnos, objetivos de aprendizaje, exigencias en las producciones de los alumnos.

Indagamos en diversas investigaciones que tienen como objetivo favorecer la comprensión del concepto de derivada mediante actividades diseñadas para tal fin ([12], [13], [14], [15]). Estos autores señalan que involucrar en las actividades ideas de variación produce resultados alentadores en el aprendizaje de los alumnos sobre el concepto de derivada.
El trabajo que más aporta al nuestro es la propuesta de enseñanza que brinda Dolores [12]; la cual se basa en tres nociones: la *variación*, la *rapidez promedio* de la variación y la *rapidez instantánea* de la variación. En la primera fase se parte de la modelación de problemas sencillos de la física de donde se abstraen las nociones de *variable* y *función,* de éstas se estudian sus propiedades básicas y se resuelven problemas. En la segunda fase la formación del concepto se inicia a través la *rapidez de la variación,* particularmente de la velocidad y aceleración promedio. Después se arriba a la rapidez instantánea mediante un acercamiento intuitivo al límite y mediante la utilización de los infinitesimales. En la tercera fase se amplía la extensión del concepto a

funciones que no necesariamente dependen del tiempo introduciendo la definición de *derivada*, se introduce la noción de función derivada, se deducen (por medio de los diferenciales) y utilizan las fórmulas y reglas básicas de derivación, pero sobre todo esta etapa se resuelven problemas para fijar el concepto.
Entonces, inspirados en la propuesta descripta anteriormente, las habilidades que definimos como indicadores del aprendizaje del concepto de derivada tienen su fundamento en las tres nociones fundamentales:

- Variación
- Rapidez promedio de variación
- Rapidez instantánea de variación.

Y son:

- Identificar variable independiente y dependiente, dominio e imagen en funciones y en diferentes contextos.
- Identificar y diferenciar las tres nociones fundamentales definidas anteriormente.
- Calcular razones de cambio promedio e instantáneas por medios numéricos y analíticos.
- Explicar el significado en diferentes contextos (incluyendo el geométrico) de las tres nociones fundamentales.
- Aplicar el concepto en la solución de problemas.

Luego nos apoyamos en las actividades seleccionadas sobre el concepto de derivadas presentadas en el cuadernillo de la cátedra, en las investigaciones estudiadas y en las habilidades que queremos fomentar para diseñar una situación de aprendizaje que las promueva.
Pensamos que las actividades tienen que involucrar las nociones fundamentales mencionadas y tienen que brindarse en diversos registros. A su vez quisimos trabajar con tres modelos matemáticos, dos de los cuales están inspirados en el surgimiento del concepto de derivada a través de la historia: por un lado, el problema de la recta tangente y por el otro la necesidad de definir la velocidad instantánea de un cuerpo en movimiento.
Entonces diseñamos tres actividades: una sobre funciones, una sobre límite y la última sobre derivada. Cada una de estas actividades está formada por tres tareas:

- Tarea 1: basada en el modelo geométrico sobre la recta tangente
- Tarea 2: basada en el modelo de movimiento rectilíneo
- Tarea 3: basada en el modelo de la presión de un gas a temperatura constante.

En la primera actividad introducimos el concepto de cambio de una variable o variación y el de razón de cambio, dándole a éste último una interpretación dentro de cada contexto. En el primero como pendiente de la recta secante, en el segundo como velocidad media y en el tercero como razón de cambio promedio del volumen del gas respecto a la presión del mismo. La segunda actividad induce a la construcción de la razón de cambio instantánea a través del proceso de límite en los tres modelos. Por último, en la tercera se aplica el concepto de derivada a diversas situaciones.

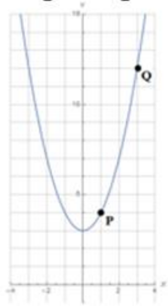
5. La propuesta didáctica

La situación de aprendizaje está formada por las tres actividades anteriormente mencionadas y las llevamos al aula en tres sesiones de trabajo en las que los alumnos las resuelven en grupos de dos personas. El tiempo destinado es aproximadamente dos horas.
Presentamos cada actividad, los enunciados de las tres tareas que la forman y una descripción breve de la misma.

5.1. Actividad de Funciones

Tarea 1

La siguiente gráfica corresponde a una función f(x):

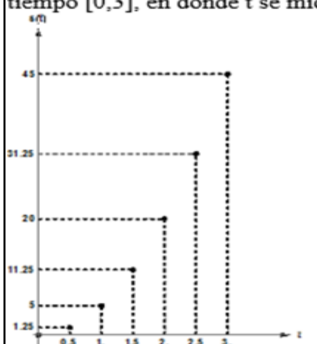


a) Hallar dominio e imagen
b) Indicar las coordenadas de los puntos P y Q.
c) Expresar la función en registro analítico.
d) Calcular la variación de ambas variables cuando la función cambia de P hacia Q.
e) Calcular la razón de cambio promedio.
f) Trazar la recta que pasa por dichos puntos y determinar su ecuación.
g) ¿Qué relación existe entre la pendiente de la recta secante y el cociente calculado en el ítem e?

Fig.1. Tarea 1 correspondiente a la actividad de Funciones

Tarea 2

El siguiente gráfico de puntos representa la posición de un móvil a lo largo del intervalo de tiempo [0,3], en donde t se mide en segundos y s(t) en metros.



a) Indicar dominio e imagen en el contexto del problema.
b) ¿Cuál es la variable independiente y cuál la dependiente?
c) Unir los puntos en el gráfico y realizar una tabla de acuerdo a los datos dados en el gráfico.
d) Calcular la variación Δs para intervalos de 1 segundo.
e) Calcular el cociente $\Delta s / \Delta t$ a intervalos de 1 segundo.
f) Explicar con tus palabras qué significado tiene ese cociente en el contexto del problema.

Fig.2. Tarea 2 correspondiente a la actividad de Funciones

Tarea 3

Con el objetivo de analizar la variación del volumen de cierto gas al variar su presión se realiza con dicho gas y, a temperatura constante, una experiencia en la que se obtiene la siguiente tabla de valores.

P(atm)	1	4	7	10
V(lts)	30.00	7.45	4.3	3.00

a) Indicar dominio e imagen en el contexto del problema.
b) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Cuál la dependiente?
c) Graficar los puntos de la tabla y unirlos.
d) Calcular los cambios ΔV del volumen para intervalos de tres atmósferas.
e) Calcular el cociente $\frac{\Delta V}{\Delta P}$ a intervalos de tres atmósferas.
f) Explicar con tus palabras qué significado tiene ese cociente bajo el contexto del problema.

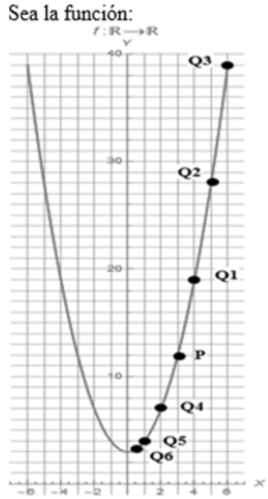
Fig.3. Tarea 3 correspondiente a la actividad de Funciones

El objetivo de aprendizaje que pretendemos en cada tarea es que el alumno identifique la variable independiente y dependiente (dominio e imagen), calcule los cambios o variaciones de la variable dependiente, calcule la razón de cambio o cociente incremental y que pueda explicar qué significado tiene este cociente en cada una de las situaciones brindadas. Respecto a los registros las tres tareas demandan conversión entre los mismos y están dadas en diferentes registros de representación.

5.2. Actividad de Límite funcional

Tarea 1

Sea la función:



a) Trazar las rectas secantes que pasan por Q1P, Q2P, Q3P, Q4P
b) Se define recta tangente a una función en un punto como la posición límite de las rectas secantes trazadas desde un punto móvil Q a un punto fijo P de la curva. Teniendo en cuenta esta definición trazar en forma aproximada la recta tangente a la función en el punto P.
c) Calcular la pendiente de las rectas secantes del ítem a)
d) Explicar el significado de los cálculos recién realizados
e) Debido a que la recta tangente es la posición límite de la recta secante, su pendiente será el límite de las pendientes de las rectas secantes, es decir: $m_t = \lim_{x\to 1} m_s = \lim_{x\to 1} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ donde m_s es la pendiente de la recta secante genérica calculada en el punto c). Calcular m_t.
f) Explicar el significado del límite recién calculado

Fig.4. Tarea 1 correspondiente a la actividad de Límite funcional

Tarea 2

La ecuación de la posición de un móvil está dada por la ecuación $s(t) = 5\ t^2$, en donde t se mide en segundos y s(t) en metros.

a) La velocidad media se define como $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. De acuerdo a esta definición ¿cuál es la velocidad media del móvil en cada intervalo de la siguiente tabla?

	Intervalo [1, t]				tendencia		Intervalo [t,1]		
	[1,1.5]	[1,1.01]	[1,1.001]	→		←	[0.999,1]	[0.99,1]	[0.5,1]
Vm									

b) Explicar el significado de los cálculos recién realizados

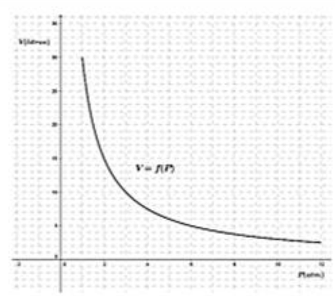
c) Si la velocidad instantánea es $v_i = \lim_{t \to 1} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ¿Cuál es la velocidad instantánea en t=1?

d) Explicar el significado del límite recién calculado

Fig.5. Tarea 2 correspondiente a la actividad de Límite funcional

Tarea 3

A temperatura constante el volumen (V, en litros) de un gas es inversamente proporcional a la presión de ese gas (P, en atmósferas). En una experiencia se obtuvieron los datos que se graficaron de la siguiente manera:



a) Calcular los cambios promedios de volumen respecto a la presión para los siguientes intervalos. Recordar $rcp = \frac{\Delta V}{\Delta P}$.

Intervalo [6, P]					tendencia	Intervalo [P,6]			
	[5.7,6]	[5.8,6]	[5.9,6]	→		←	[6,6.1]	[6,6.2]	[6,6.3]
rcp									

b) ¿Qué indica el signo de cada cambio promedio?

c) Explicar el significado de los cálculos recién realizados

d) Se define como razón de cambio instantánea en un valor P = a, como el límite de las razones de cambio promedio cuando el intervalo tiene longitud tendiendo a cero; es decir, $rci = \lim_{P \to 6} \frac{\Delta V}{\Delta P}$. Calcularla.

e) Explicar el significado del límite recién calculado.

Fig.6. Tarea 3 correspondiente a la actividad de Límite funcional

Como observamos continuamos con los tres modelos dados en la actividad anterior. En el primer caso brindamos la tarea en registro gráfico y exige su conversión a registro analítico. En el segundo la damos en registro analítico y demanda del alumno tratamiento en dicho registro y conversión a registro numérico. La última tarea dada en registro gráfico requiere conversión en registro numérico y analítico. El objetivo principal de aprendizaje de esta actividad es que el alumno pueda construir por sí mismo el concepto de cambio instantáneo (derivada) y lo pueda interpretar en los distintos modelos: la interpretación gráfica como pendiente de la recta tangente, la interpretación física como velocidad instantánea y la interpretación general como razón de cambio instantánea de una función. Tomando como sustento esta actividad, en la parte teórica de la materia, el docente define la derivada de una función en un punto y fortalece lo que los alumnos trabajaron por sí solos.

5.3. Actividad de Derivada

Presentamos las tres tareas en forma conjunta las cuales están dadas en registro analítico y todas demandan una conversión a registro gráfico. El objetivo de aprendizaje es que el alumno aplique el concepto de derivada en situaciones diferentes, una de las cuales anticipa el teorema del valor medio de Lagrange.

Tarea 1:

Dada la función $g: R \rightarrow R / g(x) = 3x^3 - x$.

a) Determinar si existe una única recta tangente a dicha función que sea paralela a la recta y=8x y hallar las ecuaciones.

b) Graficar la situación resuelta en el ítem a).

Tarea 2

La siguiente fórmula relaciona el espacio recorrido s(t) (en metros) recorrido por un móvil y el tiempo t (en segundos): $s:[0,3] \rightarrow [0,45] / s(t) = 5t^2$

Responder:

a) ¿Cuál es la velocidad del móvil a los 2 segundos?

b) ¿Cuándo la velocidad es de 7,2 m/s?

c) Escribir la fórmula de la velocidad del móvil para todo instante t, indicando dominio e imagen.

d) Graficar s(t) y v(t)

Tarea 3: la siguiente fórmula relaciona el volumen V (en litros) de un cierto gas, a temperatura constante, en función de la presión P (en atmósferas):

$$f:[1,12] \rightarrow (0,30] / V = f(P) = \frac{30}{P}$$

a) Calcular el cambio instantáneo o tasa de variación instantánea del volumen respecto a la presión para cualquier valor de P mediante la definición y luego utilizando reglas de derivación, comparar los resultados.

b) Hallar el valor de P para el cual la razón de cambio instantánea es igual a la razón de cambio promedio en el intervalo [2,6].

c) Interpretar gráficamente la situación anterior.

Fig. 7. Actividad de derivada

6. Prueba piloto

Realizamos una prueba piloto de las tres actividades en una de las comisiones de la asignatura que está a cargo de una de las investigadoras, a fin de ajustar consignas, tiempos de resolución por parte de los alumnos y estudiar, en forma general, si los alumnos son capaces de construir el concepto de derivada a través de las mismas o necesitan un rediseño.

La primera actividad (Funciones) se llevó a cabo el tercer día de clase. Previo al mismo se había repasado el tema y presentado algunos modelos de funciones. Cabe aclarar que este tema forma parte del curso de admisión a la universidad, en el cual los alumnos trabajan en profundidad funciones lineales y cuadráticas. En el pizarrón se escribieron algunas orientaciones y los estudiantes podían recurrir a sus apuntes, computadoras, celular y libros para resolverla. Participaron 95 alumnos divididos en equipos de dos personas, un alumno trabajó solo. El tiempo designado de dos horas resultó insuficiente ya que demandó gran parte para que se organizaran y se acomodaran en los bancos en un aula que no está preparada para la modalidad taller. Recordemos que es la primera actividad que realizaron los alumnos.

Varios equipos presentaron producciones desprolijas, sin cuidar la notación matemática o los gráficos. A pesar que la mayoría de los alumnos realizó el curso de admisión, en general observamos serias dificultades para reconocer modelos funcionales básicos como el cuadrático y lineal. En la devolución la docente retomó los conceptos trabajados y aclaró errores comunes.

La segunda actividad (sobre el concepto de límite) se llevó a cabo en la clase número ocho, participaron 88 alumnos, algunos equipos se disolvieron y se formaron otros. En esta oportunidad el tiempo fue más aprovechado, pero tampoco suficiente para que todos los equipos terminaran las tres tareas.
El ítem que presentó mayores dificultades fue el de la tarea 1 que hace referencia por primera vez a la recta tangente. A pesar que en el enunciado se explicita su definición, los alumnos realizaron muchas preguntas y la mayoría no pudo resolverlo. Sin embargo, hemos notado que, cuando la docente a cargo explicó el concepto de derivada, que fue posterior a esta actividad, inmediatamente varios estudiantes asociaron lo que se estaba explicando con lo hecho en la actividad.
Finalmente, la tercera de las actividades se implementó en la clase número trece una vez finalizado el desarrollo de la unidad de derivada. Los grupos en general se fueron manteniendo y en esta oportunidad participaron 76 alumnos. Las producciones mejoraron notablemente a diferencia de las primeras, ya sea en la presentación general, en la notación utilizada, como en la cantidad de ítems resueltos. El tiempo fue administrado en forma más adecuada por los estudiantes, algunos equipos se dividían las tareas entre sus integrantes y luego hacían una puesta en común. Esto favoreció que la mayoría de los equipos complete las tres tareas.
El ítem que mayor dificultad presentó fue el de la tarea 3 donde pedíamos la interpretación geométrica de la situación resuelta. Los alumnos no entendían qué hacer, preguntaron mucho acerca de este enunciado. Pocos pudieron realizar una gráfica interpretando la relación entre la variación promedio e instantánea del volumen con respecto a la presión. No pudieron asociar el concepto desde el punto de vista geométrico y desde el punto de vista variacional, a pesar que las tres tareas se realizaron en forma conjunta y la docente remarcó en todas las devoluciones las distintas interpretaciones de la razón de cambio promedio e instantánea.
Sin embargo, cuando a posteriori se explicó el Teorema de Lagrange, para estímulo nuestro percibimos que, muchos alumnos recordaron acerca de lo solicitado en esta actividad y pudieron establecer la relación entre la razón de cambio promedio e instantánea.

7. Discusión

El trabajo realizado de indagación bibliográfica y la prueba piloto nos permitieron seguir reforzando con evidencia lo difícil que es para el alumno una construcción adecuada del concepto de derivada. A pesar que los tres conceptos: cambio, razón de cambio promedio y razón de cambio instantánea se trabajaron desde un inicio en las tres tareas en forma simultánea, recién es en la última actividad donde podemos vislumbrar alguna mejora en el aprendizaje.
La experiencia previa a la propiamente dicha de la investigación nos permitió realizar algunos ajustes.
En cuanto a los tiempos designados para la resolución, fueron insuficientes en las dos primeras actividades en las cuales los alumnos todavía no estaban acostumbrados a la metodología. Entonces consideramos la posibilidad de que éstas puedan estar formadas por las dos primeras tareas en forma presencial y dejar la tercera para que sea resuelta en forma domiciliaria como refuerzo de lo realizado en la clase.
Respecto a las consignas, la tarea 3 de la actividad de derivada requiere un ajuste a fin de que los alumnos puedan entender el punto de interpretación geométrica. Consideramos que las demás tareas no demandan reelaboración en lo solicitado.
Previo a cada sesión de trabajo juzgamos importante dar diversas orientaciones, por ejemplo, recordar las características básicas del modelo cuadrático.
Pensamos también importante agregar una instancia de debate grupal, que permita intercambiar ideas entre los alumnos y el profesor sobre cómo resolvieron la actividad y posibilite a este último formalizar los conceptos que intervienen en la misma.
Dentro de los registros de representación usados notamos que el registro numérico produce, a veces, confusión en los alumnos en cuanto al dominio de la variable independiente. Es común que los estudiantes piensen que son sólo los valores de la tabla dada los que toma dicha variable. Esto se puede subsanar con orientaciones anteriores a la resolución de las actividades.
Con respecto a las formas de presentación o de comunicar lo realizado por los alumnos observamos una mejora desde la primera actividad a la tercera, lo que nos alienta a seguir en esta línea de trabajo en grupo con presentación de lo actuado.

Pensamos que sería apropiado contar con algún instrumento que permita corroborar si las percepciones realizadas durante la experiencia piloto, relacionadas con la explicación del concepto de derivada y del Teorema de Lagrange, con lo realizado en la actividad, se sostienen en el tiempo.
La línea de trabajo a futuro es rescatar estos resultados de la prueba piloto, optimizar, en la medida de lo posible, el diseño de las actividades aquí presentadas, y evaluar el grado de desarrollo de las habilidades matemáticas vinculadas al concepto de derivada con las actividades y con algún otro instrumento de valoración luego de ser realizadas.

Referencias

1. Cantoral, R.; Mirón, H. Sobre el estatus de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* Vol. 3, No. 3, pp. 265-292 (2000).
2. Polya, G.: *¿Cómo plantear y resolver problemas?* (22da. ed.). Editorial Trillas. (1998).
3. Duval, R.: Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Hitt, F. (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II,* pp. 173-201. Grupo Editorial Iberoamérica. (1998). Traducción de Registres de preséntationssémiotiques et fonctionnementcognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de ScienceCognitives*, Vol 5, pp. 37-65 (1993).
4. Ibarra, S. E.; Bravo, J.M.; Grijalva, A. El papel de los registros de representación semiótica en la enseñanza del cálculo diferencial. http://semana.mat.uson.mx/MemoriasXVII/XII/Ibarra%20Olmos.pdf (2001). Accedido el 5 de julio de 2011.
5. Hernández Fernández, H.: Vigotsky y la estructuración del conocimiento matemático. Experiencia cubana. Hernández Fernández, H.; Delgado Rubí, J.R.; Fernández de Alaíza, B.; Valverde Ramírez, L. & Rodríguez Hung, T. (Eds). *Cuestiones de didáctica de la Matemática.* Serie Educación. Homo Sapiens Ediciones. pp. 33-53. (1998).
6. Delgado Rubí, J.R. Los procedimientos generales matemáticos. Hernández Fernández, H.; Delgado Rubí, J.R.; Fernández de Alaíza, B.; Valverde Ramírez, L. & Rodríguez Hung, T. (Eds). *Cuestiones de didáctica de la Matemática.* Serie Educación. Homo Sapiens Ediciones, pp. 69-87. (1998).
7. Zabala, A. Los enfoques didácticos. Coll, C.; Martín, E.; Mauri, T.; Miras, M.; Onrubia, J.; Solé, I. & Zabala, A. (Eds). *El constructivismo en el aula*. Editorial GRAÓ, pp.125-161. (2007).
8. Sánchez, M. La investigación sobre el desarrollo y la enseñanza de las habilidades del pensamiento. *Revista Electrónica de Investigación Educativa,* Vol. *4,* No 1. http://redie.ens.uabc.mx/vol14no1/contenido-amestoy.html(2002). Accedido el 4 de diciembre de 2009.
9. Churches, A. Taxonomía de Bloom para la era digital..http://www.eduteka.org/TaxonomiaBloomDigital.php (2009). Accedido el 1 de febrero de 2012.
10. Rojas, P. Sistemas de representación y aprendizaje de las matemáticas. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*. http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/ (2012). Accedido el 10 de marzo de 2013.
11. Prieto, F. y Vicente, S. Análisis de registros semióticos en actividades de ingresantes a la facultad de ingeniería. Ponencia presentada enI REPEM (2006).
12. Dolores, C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. Cantoral, R. (Ed). *El futuro del Cálculo Infinitesimal, ICME 8*. Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 155-181. (2000).
13. García, M. *Una situación de aprendizaje para contribuir a la mejora de la comprensión del concepto de derivada*. Tesis de maestría no publicada, Universidad autónoma de Guerrero, Unidad Académica de Matemáticas, Centro de Investigación en Matemática Educativa. (2011).
14. Vrancken, S., Engler, A., Müller, D. Una propuesta para la introducción del concepto de derivada desde la variación. Análisis de los resultados. *Premisa,* Vol. 10, No. 38, pp. 36-46. (2008).
15. Vidal, O. *Interpretación de la noción de derivada como razón de cambio instantánea en contextos matemáticos.* Tesis de Maestría no publicada, Universidad Nacional de Colombia. (2012).

Dictado de Taller en el Congreso EMCI

Herramientas de Google Drive para el diseño de evaluaciones

Favieri Adriana[1], Scorzo Roxana[1], Betina Williner[1]
[1]Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas, Universidad Nacional de La Matanza
Florencio Varela 1903, San Justo, Provincia de Buenos Aires, Argentina
{afavieri ,rscorzo ,.bwilliner }@unlam.edu.ar

1 Fundamentaciónyobjetivos

FUNDAMENTACIÓN:
Las nuevas tecnologías ofrecen una variedad de herramientas que los docentes podemos utilizar y sacar provecho para las actividades educativas. A través de ellas logramos acercarnos a un paradigma educativo más personalizado y centrado en la actividad de los estudiantes. A través de las mismas conseguimos brindar información de una manera diferente a los libros tradicionales y videos. (1). A su vez facilitan la gestión pedagógica, promueven la interacción y la enseñanza-aprendizaje tanto de los estudiantes como de los docentes(2).
Entre las herramientas TIC contamos con los servicios de Google Drive. Ofrece un servicio de almacenamiento gratuito de 15 GB que integra también Gmail y Google Fotos en donde podemos guardar archivos adjuntos a correos electrónicos entre muchas funciones. Una de sus características principales es que funciona de manera eficiente con varias aplicaciones (3). En Google Drive podemos crear:

- Carpetas: para organizar todos los archivos almacenados.
- Documentos: crear y modificar documentos. Insertar imágenes y comentarios. Compartir, publicar e imprimir.
- Presentaciones: crear y modificar presentaciones simultáneamente con otros usuarios. Subir presentaciones previas. Descargar presentaciones en formato .pdf, .ppt, .txt. Insertar imagen y embeber vídeo. Es compatible con Office y Libreoffice.
- Hojas de Cálculo: crear y modificar hojas de cálculo. Insertar datos y fórmulas. Compartir y publicar hojas de cálculo con otros usuarios.
- Formularios: planificar eventos. Elaborar encuestas. Crear pruebas. Conectar un formulario a una hoja de cálculo.
- Dibujos: Editar e insertar. Mapas mentales. Lluvias de ideas. Posters (4).

Estos servicios resultan útiles para organizar la tarea educativa ya que permiten realizar actividades como:

- Planillas de seguimiento de asistencia de alumnos
- Organización de los materiales para el aula
- Asignación de tareas y Organización
- Apuntes
- Incorporación de elementos multimediales
- Evaluaciones y autoevaluaciones (5)

En particular para este taller nos enfocaremos en el uso de los Formularios de Google Drive (FDG), sus características, usos educativos y ventajas de su uso.

OBJETIVOS:
Al finalizar el taller los asistentes podrán:

- Identificar las diferentes aplicaciones de Google Drive, en particular la correspondiente a los Formularios
- Combinar el uso de diferentes complementos en un Formulario
- Crear evaluaciones y/o autoevaluaciones personalizadas para sus alumnos

2 Dirigidoa

El taller está dirigido a docentes interesados en desarrollar sus propias evaluaciones o autoevaluaciones en la red, a través de herramientas de Google Drive, con el fin de ofrecer a sus alumnos un recurso más que favorezca su proceso de aprendizaje.

3 DuracióndelTaller

El taller se desarrollará en dos bloques de 2 horas cada uno.

4 Númeromáximode participantes

20

5 Contenidos

- Presentación de las herramientas de Google Drive, en particular los Formularios
- Características generales de los Formularios de Google Drive (FGD)
- Diversas configuraciones posibles
- Barras de herramientas, menú flotante
- Opciones para las preguntas y las respuestas
- Introducción de salto de página y secciones
- Incorporación de imágenes a los FDG
- Inserción de videos a los FDG
- Transformación de un formulario en una evaluación
- Evaluaciones diferenciadas por grupo o curso
- Creación de evaluaciones auto-corregibles
- Establecer límite de respuestas y/o de tiempo disponible para las respuestas
- Creación de devoluciones personalizadas sobre la evaluación a los correos personales de los alumnos

6 Conocimientospreviosrequeridos

Se requerirá como conocimiento previo:

- Manejo básico de archivos en Windows y de captura de imágenes
- Manejo de herramientas de correo electrónico (sería conveniente que los participantes cuenten con un correo Gmail)
- Creación y edición de documentos
- Creación y guardado de imágenes en el disco rígido y/o en la nube.

7 Cronogramaypropuestade evaluación

CRONOGRAMA:

Primera clase (2 horas)

- Presentación grupo de docentes y del taller
- Conocimiento sobre los participantes del taller
- Presentación de los contenidos
- Actividades en grupo

Segunda clase (2 horas)

Trabajo en grupos para:

- Elaboración de FDG con ciertas características
- Puesta en común sobre los realizado
- Creación de un FDG para utilizar en sus clases habituales

PROPUESTADEEVALUACIÓN:

La evaluación se realizará a partir de las participaciones en el taller, las actividades realizadas en el taller y los aportes de cada uno de los asistentes. Los trabajos finales de los asistentes serán recopilados en un blog para este taller.

8 Referencias

1. Fernández-Fernández, I. Las TICS en el ámbito educativo. *Educrea*. https://educrea.cl/las-tics-en-el-ambito-educativo/ (2015) Accedido el 15 de febrero de 2017.
2. Camargo-Merchán, P. Las TIC como herramientas facilitadoras en la gestión pedagógica. *Universidad Tecnológica del Bolivar*. http://cor.to/1zoH(2014) . Accedido el 15 de febrero de 2017.
3. Google. Explora las funciones de almacenamiento de Drive. *Google Drive.* https://www.google.com/intl/es-419_ALL/drive/using-drive/ (2016) Accedido el 15 de febrero de 2017.
4. Moll, S. ¿Para qué sirve Google Drive en el aula? *Justifica tu respuesta.* http://justificaturespuesta.com/para-que-sirve-google-drive-en-el-aula/ (2014) Accedido el 15 de febrero de 2017.
5. ***Escuela20***. 10 usos de Google Drive en educación. *Proyecto Escuela 2.0.* http://cor.to/1zo4 (2014) Accedido el 19 de febrero de 2017